

Diplomarbeit

Stabile Verteilungen und das  
asymptotische Verhalten von Random  
Walks in stetiger Zeit

Jasmin Grages  
September 2007

Diplomarbeit am  
Fachbereich Mathematik  
der Westfälischen Wilhelms-Universität  
Münster

Betreuer: Prof. Dr. Gerold Alsmeyer



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Stabile Verteilungen und ihre Anziehungsbereiche</b>	<b>3</b>
1.1 Stabile Verteilungen . . . . .	3
1.2 Stabile charakteristische Funktionen . . . . .	12
1.3 Stabile Verteilungen (zweiter Teil) . . . . .	22
1.4 Anziehungsbereiche . . . . .	30
<b>2 Random Walks in stetiger Zeit</b>	<b>41</b>
2.1 Modellierung . . . . .	41
2.2 Im Anziehungsbereich einer Standard-stabilen Verteilung . . . . .	43
2.3 Das asymptotische Verhalten von Random Walks in stetiger Zeit . . . . .	47
<b>3 Eine Anwendung in der Theoretischen Chemie</b>	<b>59</b>
3.1 Theoretische Chemie . . . . .	59
3.2 Glas . . . . .	60
3.3 Simulationen . . . . .	61
<b>A Hilfsergebnisse</b>	<b>69</b>
A.1 Ergebnisse für Kapitel 1 . . . . .	69
A.2 Ergebnisse für Kapitel 2 . . . . .	79
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>85</b>



# Einleitung

Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, das asymptotische Verhalten von Random Walks in stetiger Zeit zu untersuchen (Kapitel 2). Die Grundlage hierfür liefert der Artikel „Asymptotic Distributions of Continuous-Time Random Walks“ von Marcin Kotulski, der 1995 im Journal of Statistical Physics erschienen ist.

Um dieses Ziel zu erreichen, ist es notwendig, auf einige Bereiche der Wahrscheinlichkeitstheorie zurückzugreifen. Während die Theorie der bedingten Erwartungswerte innerhalb der Vorlesungen behandelt wurde, bleiben die stabilen Verteilungen und ihre Anziehungsbereiche ein für Studenten weniger bekanntes Gebiet. Dies ist der Grund dafür, diese in einem eigenen Kapitel ausführlich einzuführen (Kapitel 1). Die Literaturgrundlagen für diesen Abschnitt sind die Bücher „An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Volume II)“ von William Feller und „Probability“ von Leo Breiman.

Das dritte Kapitel dieser Arbeit behandelt ein Beispiel für einen Random Walk in stetiger Zeit in der Chemie. Zu diesem Zweck gab es eine Zusammenarbeit mit dem Arbeitskreis Heuer, Bereich Theoretische Chemie, des Fachbereichs Chemie der Universität Münster. Für die Möglichkeit, an diesem Projekt teilzunehmen, möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Heuer bedanken.

Der Anhang beinhaltet eine Auflistung der Definitionen, Sätze und Lemmata, die in den Kapiteln 1 und 2 angewendet werden, aber nicht sinnvoll in die Arbeit integriert werden können.

Abschließend möchte ich mich für die Auswahl des Diplomarbeitsthemas und der guten Betreuung bei Herrn Prof. Dr. Alsmeyer und seinem Assistenten Dipl.-Math. Matthias Meiners bedanken.



# Kapitel 1

## Stabile Verteilungen und ihre Anziehungsbereiche

Im ersten Abschnitt dieses Kapitel beginnen wir mit der Einführung stabiler Verteilungen und diskutieren einige ihrer Eigenschaften elementar. In dem folgenden Abschnitt untersuchen wir die Gestalt charakteristischer Funktionen stabiler Verteilungen. Mit diesem neuen Wissen beleuchten wir die Klasse der stabilen Verteilungen im Abschnitt 1.3 noch einmal. Der vierte Abschnitt beinhaltet eine allgemeine Definition des Anziehungsbereiches einer Verteilung und einen für das zweite Kapitel wichtigen Satz, der eine notwendige und hinreichende Bedingung angibt, wann eine Verteilung im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung liegt.

Für das gesamte Kapitel seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen  $X, X_1, X_2, \dots$  mit Verteilung  $R$  gegeben und es sei  $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$  die  $n$ -te Partialsumme der Folge  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ( $n \geq 0$ ).

### 1.1 Stabile Verteilungen

#### 1.1.1 Definition (vgl. [Fe2], VI.1, Definition 1).

Die Verteilung  $R$  heißt stabil (im weiteren Sinne), wenn es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $c_n > 0$  und ein  $\gamma_n \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$(1.1) \quad S_n \stackrel{d}{=} c_n X + \gamma_n;$$

dabei sei der Fall  $R = \delta_c$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  ausgeschlossen.  $R$  heißt stabil im engeren Sinne, wenn (1.1) mit  $\gamma_n = 0$  gilt.

Betrachten wir direkt zwei Beispiele, um den Begriff „stabil“ zu verinnerlichen.

**1.1.2 Beispiele (vgl. [Fe2], VI.2).**

- a) Die Normalverteilungen  $\mathfrak{N}(0, \sigma^2)$  mit  $\sigma^2 > 0$  sind stabil im engeren Sinne mit  $c_n = \sqrt{n}$ .
- b) Die Cauchy-Verteilungen  $\mathcal{C}(a, b)$  mit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$  sind stabil im engeren Sinne mit  $c_n = n$ .

*Begründung.* Zu a): Sei  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Familie unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen, wobei  $X_1$  normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\sigma^2 > 0$  sei. Dann gilt:

$$S_n \sim \mathfrak{N}(0, \sigma^2)^{* (n)} = \mathfrak{N}(0, n\sigma^2) \sim \sqrt{n}X_1.$$

Zu b): Sei  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Familie unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen, wobei  $X_1$   $\mathcal{C}(a, b)$ -verteilt mit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$  sei. Dann gilt:  $S_n$  besitzt die Fourier-Transformierte

$$\phi_{X_1}^n(t) = \left( e^{iat-b|t|} \right)^n = e^{n(iat-b|t|)}$$

und zu  $nX_1$  gehört die Fourier-Transformierte

$$\phi_{nX_1}(t) = \phi_{X_1}(nt) = e^{iant-b|nt|} = e^{n(iat-b|t|)}.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Fourier-Transformierten muss  $S_n \stackrel{d}{=} nX_1$  gelten.  $\square$

Kommen wir nun zu unserem ersten Satz, der eine weitere Definition beinhaltet.

**1.1.3 Satz und Definition (vgl. [Fe2], VI.1, Theorem 1).**

Die Normierungskonstanten  $c_n$  aus (1.1) können nur von der Form  $n^{1/\alpha}$  für ein  $\alpha > 0$  sein. Dabei wird die Konstante  $\alpha$  charakteristischer Exponent genannt.

Wir werden am Ende dieses Abschnitts zeigen, dass außerdem stets  $0 < \alpha \leq 2$  gilt.

*Beweis.* Sei  $R$  stabil und  $X', X'_1, \dots, X'_n$  seien unabhängige Kopien von  $X, X_1, \dots, X_n$ . Betrachten wir  $\sum_{i=1}^n (X_i - X'_i)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - X'_i) &= S_n - S'_n \stackrel{d}{=} (c_n X + \gamma_n) - (c_n X' + \gamma_n) \\ &= c_n (X - X'). \end{aligned}$$

Daher ist die Verteilung  $R'$  von  $X_1 - X'_1$  ebenfalls stabil – sogar stabil im engeren Sinne – und besitzt dieselben Normierungskonstanten wie  $R$ . Es



genügt deshalb, die Behauptung für eine symmetrische, stabile Verteilung zu beweisen. Dafür müssen wir zunächst ein paar Vorüberlegungen anstellen:

$S_{m+n}$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) ist die Summe unabhängiger Variablen  $S_m$  und  $S_{m+n} - S_m$ , die wie  $c_m X$  bzw.  $c_n X$  verteilt sind. Somit gilt

$$(1.2) \quad c_{m+n} X \stackrel{d}{=} c_m X_1 + c_n X_2.$$

Die Summe  $S_{rk}$  ( $r, k \in \mathbb{N}$ ) lässt sich andererseits als

$$\sum_{i=1}^k X_i + \sum_{i=k+1}^{2k} X_i + \dots + \sum_{i=(r-1)k+1}^{rk} X_i$$

schreiben und daraus folgt:  $S_{rk} \stackrel{d}{=} c_k X_1 + \dots + c_k X_r = c_k S_r \stackrel{d}{=} c_k (c_r X)$ . Da aber außerdem  $S_{rk}$  wie  $c_{rk} X$  verteilt ist, muss

$$(1.3) \quad c_{rk} = c_r c_k$$

für alle  $r, k \in \mathbb{N}$  gelten. Durch Induktion nach  $\nu \in \mathbb{N}$  und durch das Anwenden von (1.3) können wir nun schließen, dass

$$(1.4) \quad c_n = c_r^\nu \text{ ist, wenn } n = r^\nu \text{ gilt.}$$

Als nächstes zeigen wir, dass die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend ist: Dazu betrachten wir für ein  $m \in \mathbb{N}$  erst einmal

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}(c_{m+n} X > c_m x) &\stackrel{(1.2)}{=} \mathbb{P}(c_m X_1 + c_n X_2 > c_m x) \\ &= \mathbb{P}(c_m X_1 + c_n X_2 > c_m x, X_2 \geq 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(c_m X_1 + c_n X_2 > c_m x, X_2 < 0) \\ &\geq \mathbb{P}(c_m X_1 > c_m x, X_2 \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x) \mathbb{P}(X_2 \geq 0) \\ &\geq \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_1 > x). \end{aligned}$$

Nun wählen wir  $x > 0$  so klein, dass  $\mathbb{P}(X_1 > x)$  eine positive Konstante ist. Dies ist möglich, weil  $R \neq \delta_0$  eine symmetrische Verteilung ist. Es folgt, dass  $(c_m/c_{m+n})$  beschränkt ist: Andernfalls gäbe es eine Folge  $((m_k, n_k))_{k \geq 1}$ , so dass  $(c_{m_k}/c_{m_k+n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$  und dann würde

$$\mathbb{P}(c_{m_k+n_k} X > c_{m_k} x) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{c_{m_k+n_k}}{c_{m_k}}}_{\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0} X > x\right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 < \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_1 > x)$$

gelten, was im Widerspruch zu (1.5) steht.

Setzen wir  $m = r^\nu$  und  $m + n = (r + 1)^\nu$ , wobei wir  $r$  festhalten und  $\nu$  gegen  $\infty$  gehen lassen, so erhalten wir

$$\frac{c_m}{c_{m+n}} = \frac{c_r^\nu}{c_{(r+1)^\nu}} \stackrel{(1.4)}{=} \frac{c_r^\nu}{c_{r+1}^\nu} = \left( \frac{c_r}{c_{r+1}} \right)^\nu.$$

Da wir ein paar Zeilen zuvor gezeigt haben, dass  $(c_m/c_{m+n})$  beschränkt ist, ist auch die Folge  $((c_r/c_{r+1})^\nu)$  für  $\nu \rightarrow \infty$  beschränkt. Daher muss  $c_r/c_{r+1} \leq 1$  für alle  $r \in \mathbb{N}$  gelten, was äquivalent ist zu der Aussage, dass  $c_r \leq c_{r+1}$  für alle  $r \in \mathbb{N}$  ist, und die Monotonieeigenschaft der Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  liefert.

Und sie ist sogar streng monoton wachsend: Wäre nämlich  $c_r = c_{r+1}$  für ein  $r > 0$ , so folgte

$$S_r \stackrel{d}{=} c_r X = c_{r+1} X \stackrel{d}{=} S_{r+1} = S_r + X_{r+1}$$

und damit  $X_{r+1} = 0$  f.s., was im Widerspruch zur Voraussetzung  $R \neq \delta_0$  steht.

Nun sind unsere Vorüberlegungen fast abgeschlossen. Wir betrachten ganze Zahlen  $j, k \geq 2$ . Zu jedem hinreichend großen  $\nu \in \mathbb{N}$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $\lambda \in \mathbb{N}$ , so dass

$$(1.6) \quad j^\lambda \leq k^\nu < j^{\lambda+1}$$

gilt. Aufgrund der strengen Monotonie der  $(c_n)$  lässt sich  $c_{j^\lambda} \leq c_{k^\nu} < c_{j^{\lambda+1}}$  folgern und mit (1.4) wird daraus

$$(1.7) \quad c_j^\lambda \leq c_k^\nu < c_j^{\lambda+1},$$

was  $c_j > 1$  impliziert. Durch Logarithmieren lassen sich nun die Ungleichungen (1.6) und (1.7) umformen zu  $\lambda \log j \leq \nu \log k < (\lambda + 1) \log j$  bzw.  $(\lambda + 1)^{-1} (\log c_j)^{-1} < \nu^{-1} (\log c_k)^{-1} \leq \lambda^{-1} (\log c_j)^{-1}$ , was zusammen

$$\frac{\lambda}{\lambda + 1} \frac{\log j}{\log c_j} < \frac{\log k}{\log c_k} < \frac{\lambda + 1}{\lambda} \frac{\log j}{\log c_j}$$

ergibt. Da  $\nu$  in dieser Ungleichung nicht mehr enthalten ist, kann es beliebig – also auch beliebig groß – gewählt werden, wodurch auch  $\lambda$  beliebig groß wird. Für  $\lambda \rightarrow \infty$  ist daher  $\alpha := \log k / \log c_k = \log j / \log c_j$  und somit unabhängig von  $k$ , woraus wir  $c_k = k^{1/\alpha}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  folgern können.  $\square$

Mit dem Begriff „charakteristischer Exponent“ können wir Beispiel 1.1.2 umformulieren. Wir haben es dort mit Verteilungen zu tun, die im engeren Sinne stabil sind mit charakteristischem Exponenten 2 bzw. 1.

Als weitere Folgerung aus Satz 1.1.3 erhalten wir den folgenden Satz:

**1.1.4 Satz (vgl. [Fe2], VI.1, Theorem 2).**

Ist  $R$  im engeren Sinne stabil mit charakteristischem Exponenten  $\alpha$ , dann gilt für alle  $s, t \in [0, \infty)$ :

$$s^{1/\alpha} X_1 + t^{1/\alpha} X_2 \stackrel{d}{=} (s+t)^{1/\alpha} X.$$

*Beweis.* Nach Satz 1.1.3 gilt für Verteilungen, die im engeren Sinne stabil sind, Gleichung (1.2), mit der sich die Behauptung für rationale  $s := s_1/s_2$  und  $t := t_1/t_2$  mit  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{N}$  zeigen lässt:

$$\begin{aligned} s^{1/\alpha} X_1 + t^{1/\alpha} X_2 &= \left( \frac{1}{s_2 t_2} \right)^{1/\alpha} \left( (s_1 t_2)^{1/\alpha} X_1 + (t_1 s_2)^{1/\alpha} X_2 \right) \\ &\stackrel{d}{=} \left( \frac{1}{s_2 t_2} \right)^{1/\alpha} \left( (s_1 t_2 + t_1 s_2)^{1/\alpha} X_1 \right) \\ &= \left( \frac{s_1 t_2 + t_1 s_2}{s_2 t_2} \right)^{1/\alpha} X_1 \\ &= (s+t)^{1/\alpha} X_1. \end{aligned}$$

Die Ausweitung auf beliebige  $s, t \in [0, \infty)$  folgt per Grenzübergang.  $\square$

Jede stabile Verteilung lässt sich durch Verschiebung in eine im engeren Sinne stabile Verteilung transformieren:

**1.1.5 Satz (vgl. [Fe2], VI.1, Theorem 3).**

Wenn  $R$  stabil ist mit charakteristischem Exponenten  $\alpha \neq 1$ , existiert eine Konstante  $b$ , so dass  $R(\cdot + b)$  im engeren Sinne stabil ist.

*Beweis.* Wählt man  $X'_i := X_i - b$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) und  $X' := X - b$ , so gilt

$$\begin{aligned} S'_n := S_n - nb &\stackrel{d}{=} (c_n X + \gamma_n) - nb = c_n(X - b) + (\gamma_n + (c_n - n)b) \\ &= c_n X' + \gamma'_n \end{aligned}$$

mit  $\gamma'_n := \gamma_n + (c_n - n)b$ . Es bleibt zu zeigen, dass ein  $b \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $\gamma'_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Dafür stellen wir zunächst einmal fest, dass es möglich ist,  $b$  so zu wählen, dass  $\gamma'_2 = 0$  ist: Da  $\gamma'_2 = \gamma_2 + (c_2 - 2)b$  ist, ist es genau dann gleich 0, wenn  $b = \gamma_2 / (2 - c_2)$  gilt. Weil nach Voraussetzung  $\alpha \neq 1$  gilt, ist  $c_2 = 2^{1/\alpha}$  ungleich 2. Nehmen wir also an, dass  $\gamma'_2 = 0$  ist.

Die Summe  $S'_{2n}$  lässt sich schreiben als  $(X'_1 + X'_2) + (X'_3 + X'_4) + \dots + (X'_{2n-1} + X'_{2n})$ , wobei  $X'_i + X'_{i+1}$  für  $1 \leq i < 2n$  wie  $c_2 X' + \gamma'_2 = c_2 X'$  verteilt ist. Daraus folgt:

$$S'_{2n} \stackrel{d}{=} c_2 (X'_1 + \dots + X'_n) = c_2 S'_n \stackrel{d}{=} c_2 (c_n X' + \gamma'_n) = c_2 c_n X' + c_2 \gamma'_n.$$

Außerdem ist  $S'_{2n} = \sum_{i=1}^n X'_i + \sum_{i=n+1}^{2n} X'_i$  auch die Summe zweier unabhängiger Variablen, die wie  $S'_n$  verteilt sind, woraus

$$\begin{aligned} S'_{2n} &\stackrel{d}{=} (c_n X'_1 + \gamma'_n) + (c_n X'_2 + \gamma'_n) = c_n(X'_1 + X'_2) + 2\gamma'_n \\ &\stackrel{d}{=} c_n(c_2 X') + 2\gamma'_n = c_n c_2 X' + 2\gamma'_n \end{aligned}$$

folgt. Es muss also  $c_2 \gamma'_n = 2\gamma'_n$  und damit  $\gamma'_n = 0$  gelten.  $\square$

Da die Faltung eine Art Glättung der Verteilung bewirkt, ist es naheliegend zu vermuten, dass stabile Verteilungen stetig sind. Das folgende Lemma bestätigt diese Vermutung:

**1.1.6 Lemma (vgl. [Fe2], VI.1, Lemma 1).**

*Alle (im weiteren Sinne) stabilen Verteilungen sind stetig.*

Um dieses Lemma beweisen zu können, benötigen wir jedoch die Aussage eines weiteren Lemmas, das wir zuvor beweisen werden. Dazu benötigen wir zwei neue Begriffe:

*a heißt genau dann Atom der Verteilung  $R$ , wenn  $R(\{a\}) > 0$  gilt;  $p := R(\{a\})$  wird dann das Gewicht von  $a$  genannt.*

**1.1.7 Lemma (vgl. [Fe2], V.11, Problem 8).**

*Die Verteilung  $R$  habe genau die Atome  $a_i$ ,  $i \in I$ , mit den Gewichten  $p_i$ ,  $i \in I$ , und mit  $p$  werde das Maximum der  $p_i$ ,  $i \in I$ , bezeichnet, wobei  $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{N}$  gelte. Dann sind die Gewichte aller Atome von  $R * R$  echt kleiner als  $p$ , außer im Fall  $I = \{1, \dots, n\}$  für ein  $n \geq 1$  und  $p_1 = \dots = p_n = 1/n$ .*

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass jedes Atom von  $R * R$  von der Gestalt  $a_i + a_j$  für  $i, j \in I$  ist:

Seien also  $c$  ein Atom von  $R * R$  und  $X, Y$  unabhängige Zufallsgrößen mit Verteilung  $R$ . Dann ist unter Benutzung des Satzes 52.5 aus [A]

$$\begin{aligned} 0 < R * R(\{c\}) &= \mathbb{P}(X + Y = c) \\ &= \int \mathbb{P}(X + Y = c | X = x) \mathbb{P}^X(dx) \\ &= \int \mathbb{P}(Y = c - x) \mathbb{P}^X(dx) \\ &= \sum_{x: \mathbb{P}(Y=c-x) > 0} \mathbb{P}(Y = c - x) \mathbb{P}(X = x). \end{aligned}$$

Es folgt daher, dass es zumindest ein  $x$  gibt, so dass  $\mathbb{P}(Y = c - x) > 0$  und  $\mathbb{P}(X = x) > 0$  gelten; d.h.  $x' := c - x$  ist ein Atom von  $Y$  und  $x$  ein Atom von  $X$ . Somit ist  $c = x + x'$  von der behaupteten Gestalt.

Alle Atome von  $R * R$  haben also die Gestalt  $a_i + a_j$  mit  $i, j \in I$ . Nehmen wir uns nun ein solches Atom von  $R * R$  und betrachten

$$\begin{aligned}
 R * R(\{a_i + a_j\}) &= \mathbb{P}(X + Y = a_i + a_j) \\
 &= \int \mathbb{P}(Y = a_i + a_j - x) \mathbb{P}^X(dx) \\
 &= \sum_{x: \mathbb{P}(Y = a_i + a_j - x) > 0} \mathbb{P}(Y = a_i + a_j - x) \mathbb{P}(X = x) \\
 &= \sum_{k \in I} \mathbb{P}(Y = a_k) \underbrace{\mathbb{P}(X = a_i + a_j - a_k)}_{\leq p} \\
 &\leq p.
 \end{aligned}$$

Aber wann genau gilt  $R * R(\{a_i + a_j\}) = p$ ? Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\mathbb{P}(X = a_i + a_j - a_k) = p$  für alle  $k \in I$  und  $\sum_{k \in I} \mathbb{P}(Y = a_k) = 1$  gilt. Daher muss in diesem Fall  $I$  gleich einer endlichen Menge  $\{1, \dots, n\}$  ( $n \geq 1$ ) und  $p = p_1 = \dots = p_n = 1/n$  sein.  $\square$

*Beweis von Lemma 1.1.6.* Seien  $R$  eine (im weiteren Sinne) stabile Verteilung,  $I \subseteq \mathbb{N}$  und  $a_i, i \in I$ , alle Atome von  $R$  mit zugehörigen Gewichten  $p_i, i \in I$ . Angenommen,  $R$  ist nicht stetig, d.h.  $I \neq \emptyset$ . Dann wählen wir  $i_0 \in I$  so, dass  $p_{i_0} = \max_{i \in I} p_i$  ist. Wegen  $R * R(\cdot) = P(c_2 X_1 + \gamma_2 \in \cdot)$  ist die Menge der Atome von  $R * R$  gleich  $\{c_2 a_i + \gamma_2 : i \in I\}$  und für jedes  $i \in I$  gilt:  $R * R(\{c_2 a_i + \gamma_2\}) = p_i$ . Dann ist insbesondere  $R * R(\{c_2 a_{i_0} + \gamma_2\}) = p_{i_0}$ . Mit Lemma 1.1.7 können wir nun folgern, dass wir uns in folgender Situation befinden:

$$I = \{1, \dots, n\} \text{ für ein } n \geq 1 \text{ und } p_1 = \dots = p_n = 1/n.$$

Aus dem Beweis von Lemma 1.1.7 wissen wir außerdem, dass die Menge aller Atome von  $R * R$  gerade  $\{a_i + a_j : i, j \in I\}$  ist, deren Mächtigkeit hier gleich  $n$  ist.

Nehmen wir nun an, dass  $n \geq 2$  ist. Zudem gelte o.B.d.A.  $a_1 < \dots < a_n$ . Dann ist aber  $\{a_i + a_j : i, j \in I\} \supseteq \{a_1 + a_1, \dots, a_1 + a_n\} \cup \{a_2 + a_n\}$  und damit  $|\{a_i + a_j : i, j \in I\}| \geq n + 1$ . Widerspruch. Also muss  $n = 1$  sein, was bedeutet, dass  $R = \delta_c$  für ein  $c > 0$  ist. Dies ist aber wegen der Stabilität von  $R$  ausgeschlossen. Daher muss unsere anfängliche Annahme, dass  $I \neq \emptyset$  ist, falsch sein.  $\square$

Es lässt sich zeigen, dass stabile Verteilungen absolute Momente bestimmter Ordnungen besitzen:

### 1.1.8 Satz (vgl. [Fe2], VI.13, Problem 3).

*Eine stabile Verteilung mit charakteristischem Exponenten  $\alpha$  besitzt absolute Momente jeder Ordnung  $0 < \beta < \alpha$ .*

*Beweis.* Der Beweis dieses Lemmas gliedert sich in drei Schritte.

Im ersten Schritt zeigen wir, dass für eine symmetrische stabile Verteilung  $R$  mit charakteristischem Exponenten  $\alpha$  die Folge  $n(1 - R(n^{1/\alpha}x))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , für alle hinreichend großen  $x$  beschränkt ist: Wir setzen für festes  $x > 0$   $p_n := \mathbb{P}(|X_1| > n^{1/\alpha}x)$  und damit gilt

$$n \left(1 - R \left(n^{1/\alpha}x\right)\right) = n \mathbb{P} \left(X_1 > n^{1/\alpha}x\right) = \frac{1}{2} n \mathbb{P} \left(|X_1| > n^{1/\alpha}x\right) = \frac{1}{2} np_n.$$

Als nächstes betrachten wir  $m_n := \mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > n^{1/\alpha}x)$ :

$$m_n \stackrel{A.1.1}{\leq} 2 \mathbb{P} \left(|S_n| > n^{1/\alpha}x\right) = 2 \mathbb{P} \left(|X_1| > x\right),$$

weil jede symmetrische stabile Verteilung im engeren Sinne stabil ist. Sei nun  $x$  so groß, dass  $2 \mathbb{P}(|X_1| > x) < 1$  ist. Sehen wir uns  $m_n$  noch einmal genauer an, so erkennen wir, dass es sich durch  $p_n$  ausdrücken lässt:

$$\begin{aligned} m_n &= 1 - \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| \leq n^{1/\alpha}x\right) \\ &= 1 - \mathbb{P} \left(|X_1| \leq n^{1/\alpha}x, \dots, |X_n| \leq n^{1/\alpha}x\right) \\ &= 1 - \mathbb{P} \left(|X_1| \leq n^{1/\alpha}x\right)^n \\ &= 1 - (1 - p_n)^n. \end{aligned}$$

Umgekehrt lässt sich natürlich auch  $p_n$  durch  $m_n$  ausdrücken:

$$p_n = 1 - (1 - m_n)^{1/n}.$$

Insgesamt können wir nun folgern, dass

$$\begin{aligned} n \left(1 - R \left(n^{1/\alpha}x\right)\right) &= \frac{1}{2} np_n = \frac{1}{2} n \left(1 - (1 - m_n)^{1/n}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} n \left(1 - (1 - 2 \mathbb{P}(|X_1| > x))^{1/n}\right) \\ &= \frac{1}{2} n \left(1 - q^{1/n}\right) \end{aligned}$$

mit  $q := 1 - 2 \mathbb{P}(|X_1| > x) \in (0, 1]$  ist. Und weil

$$\begin{aligned} \left|n \left(1 - q^{1/n}\right)\right| &= \left|n \left(1 - e^{1/n \log q}\right)\right| = \left|n \left(1 - \sum_{k \geq 0} \frac{(1/n \log q)^k}{k!}\right)\right| \\ &= \left| -n \sum_{k \geq 1} \frac{(1/n \log q)^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k \geq 1} \frac{(1/n)^{k-1} (\log q)^k}{k!} \right| \\ &\leq |\log q| \sum_{k \geq 1} \frac{|1/n \log q|^{k-1}}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\log q| \end{aligned}$$

gilt, haben wir die erste Behauptung gezeigt.

Im zweiten Schritt zeigen wir nun, dass eine symmetrische stabile Verteilung  $R$  mit charakteristischem Exponenten  $\alpha$  absolute Momente jeder Ordnung  $0 < \beta < \alpha$  besitzt: Sei dazu  $X$  eine Zufallsgröße mit Verteilung  $R$ . Wir können o.B.d.A. annehmen, dass die Folge  $n(1 - R(n^{1/\alpha}))$ ,  $n \geq 1$ , beschränkt ist. Denn nach Schritt 1 existiert ein  $x > 0$ , so dass die Folge  $n(1 - R(n^{1/\alpha}x))$ ,  $n \geq 1$ , beschränkt ist. Geht man von  $X$  zu  $cX$  für hinreichend großes  $c > 0$  über, so lässt sich die Beschränktheit der obigen Folge auch für  $x = 1$  erreichen. Es gilt

$$\mathbb{E} |X|^\beta = \int_{\mathbb{R}} |x|^\beta \mathbb{P}^X(dx) = 2 \int_{(0, \infty)} x^\beta \mathbb{P}^X(dx).$$

Für alle  $\beta > 0$  ist  $\int_0^\infty x^\beta \mathbb{P}^X(dx) = \beta \int_0^\infty x^{\beta-1} (1 - R(x)) dx$  (vgl. [A], (A.3) auf Seite 115). Betrachten wir die rechte Seite dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} & \beta \int_0^\infty x^{\beta-1} (1 - R(x)) dx \\ &= \beta \int_0^\infty (x^{1/\alpha})^{\beta-1} (1 - R(x^{1/\alpha})) (\alpha x^{1-1/\alpha})^{-1} dx \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^\infty x^{\beta/\alpha-1} \mathbb{P}(X > x^{1/\alpha}) dx \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha} \left( \underbrace{\int_0^1 x^{\beta/\alpha-1} dx}_{=\alpha/\beta} + \int_1^\infty x^{\beta/\alpha-1} \mathbb{P}(X > x^{1/\alpha}) dx \right). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\int_1^\infty x^{\beta/\alpha-1} \mathbb{P}(X > x^{1/\alpha}) dx < \infty$  ist: Da  $\beta/\alpha - 1 < 0$  gilt, ist die Funktion  $g(x) := x^{\beta/\alpha-1} \mathbb{P}(X > x^{1/\alpha})$  monoton fallend in  $x$ . Dadurch und weil  $\beta/\alpha - 2 < -1$  ist, können wir folgern, dass

$$\begin{aligned} \int_1^\infty x^{\beta/\alpha-1} \mathbb{P}(X > x^{1/\alpha}) dx &\leq \sum_{n \geq 1} n^{\beta/\alpha-1} \mathbb{P}(X > n^{1/\alpha}) \\ &= \sum_{n \geq 1} n^{\beta/\alpha-2} \underbrace{n \mathbb{P}(X > n^{1/\alpha})}_{=n(1-R(n^{1/\alpha}))} \\ &\stackrel{\text{Schritt 1}}{\leq} C \sum_{n \geq 1} n^{\beta/\alpha-2} < \infty, \end{aligned}$$

gilt.

Abschließend weiten wir die Aussage im dritten Schritt auf beliebige stabile Verteilungen aus: Sei  $R$  eine beliebige stabile Verteilung mit charakteristischem Exponenten  $\alpha$  und seien  $X_1, X_2, \dots$  und  $X'_1, X'_2, \dots$  stochastisch unabhängige Zufallsgrößen, die wie  $R$  verteilt sind. Dann ist die Verteilung  $R'$  von  $X_1 - X'_1$  symmetrisch und im engeren Sinne stabil. Wir haben bereits gezeigt, dass in diesem Fall  $\mathbb{E} |X_1 - X'_1|^\beta < \infty$  für alle  $0 < \beta < \alpha$  gilt.

Sei  $a > 0$  so groß, dass  $\mathbb{P}(X_1 \geq a) \leq 1/2$  und  $\mathbb{P}(X_1 \leq -a) \leq 1/2$  gilt. Dann folgt aus Lemma A.1.2, dass für  $t > 0$

$$\mathbb{P}(|X_1| > t + a) \leq 2\mathbb{P}(|X_1 - X'_1| \geq t) \stackrel{1.1.6}{=} 2\mathbb{P}(|X_1 - X'_1| > t)$$

ist, woraus sich Folgendes schließen lässt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X|^\beta &= \beta \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1| > x) x^{\beta-1} dx \\ &= \underbrace{\beta \int_0^a \mathbb{P}(|X_1| > x) x^{\beta-1} dx}_{\leq a^\beta} + \beta \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1| > x + a) (x + a)^{\beta-1} dx \\ &\leq a^\beta + \beta \int_0^\infty 2\mathbb{P}(|X_1 - X'_1| > x) (x + a)^{\beta-1} dx \\ &\leq \begin{cases} a^\beta + \beta \int_0^a 2\mathbb{P}(|X_1 - X'_1| > x) (x + a)^{\beta-1} dx \\ \quad + 2^\beta \mathbb{E}|X_1 - X'_1|^\beta, & \text{falls } \beta \geq 1, \\ a^\beta + 2\mathbb{E}|X_1 - X'_1|^\beta, & \text{falls } \beta < 1, \end{cases} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von Satz 1.1.8 können wir nun auch zeigen, dass  $0 < \alpha \leq 2$  gilt.

### 1.1.9 Folgerung (vgl. [Fe2], VI.1, im Text auf Seite 169).

Der charakteristische Exponent  $\alpha$  liegt im Intervall  $(0, 2]$ .

*Begründung.* Dass  $\alpha > 0$  ist, wissen wir bereits aus Satz 1.1.3. Wir nehmen an,  $\alpha$  sei echt größer als 2. Gegeben seien eine stabile Verteilung  $R$  mit charakteristischem Exponenten  $\alpha$  und unabhängige Kopien  $X'_1, X'_2, \dots$  von  $X_1, X_2, \dots$ . Dann ist die Verteilung  $R'$  von  $X_1 - X'_1$  symmetrisch, im engeren Sinne stabil und besitzt ebenfalls den charakteristischen Exponenten  $\alpha$ . Nach Satz 1.1.8 existiert insbesondere das zweite Moment, also die Varianz  $\sigma^2$  von  $R'$ . Weil  $X_1 - X'_1$  nichtdegeneriert ist, gilt  $\sigma^2 > 0$ . Daher genügt die Folge  $(S'_n)_{n \geq 1}$  mit  $S'_n := \sum_{i=1}^n (X_i - X'_i)$  dem zentralen Grenzwertsatz, d.h., dass  $n^{-1/2} S'_n$  in Verteilung gegen die  $\mathfrak{N}(0, \sigma^2)$ -Verteilung konvergiert. Da  $R'$  im engeren Sinne stabil ist, gilt außerdem:  $n^{-1/\alpha} S'_n \sim X_1 - X'_1$ . Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich umformen zu  $n^{-1/2} S'_n n^{1/2-1/\alpha}$ . Da  $1/2 - 1/\alpha > 0$  ist, strebt  $n^{1/2-1/\alpha}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$ : Widerspruch. □

## 1.2 Stabile charakteristische Funktionen

Wie in 1.1.1 definiert wurde, heißt eine Verteilung  $R$  stabil, wenn es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $c_n > 0$  und ein  $\gamma_n \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $S_n \stackrel{d}{=} c_n X + \gamma_n$  ist.



Beim Übergang zu den charakteristischen Funktionen

$$\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot \phi_{X_n}(t) = \phi_X^n(t)$$

und

$$\phi_{c_n X + \gamma_n}(t) = \phi_X(c_n t) e^{i\gamma_n t}$$

erhält man die Gleichheit  $\phi_X^n(t) = \phi_X(c_n t) e^{i\gamma_n t}$ , die folgende Definition nahe legt.

### 1.2.1 Definition.

Eine charakteristische Funktion  $\phi$  heißt stabil, wenn nicht  $|\phi| = 1$  gilt und es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $c_n > 0$  und ein  $\gamma_n \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$(1.8) \quad \phi^n(t) = \phi(c_n t) e^{i\gamma_n t}$$

gilt.

Als nächstes bestimmen wir die charakteristischen Funktionen aller stabilen Verteilungen und bemerken dazu, dass wir für jede auf einem Intervall  $I \supseteq \{0\}$  nullstellenfreie charakteristische Funktion  $\phi$  mit  $\log \phi$  die eindeutig bestimmte stetige Funktion  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen mit  $\psi(0) = 0$  und  $\exp \circ \psi = \phi$ .

### 1.2.2 Satz (vgl. [Br], 9.9, Theorem 9.27).

Sei  $R$  eine stabile Verteilung mit charakteristischem Exponenten  $\alpha \in (0, 2]$ . Dann ist  $R$  für  $\alpha = 2$  eine Normalverteilung und im Fall  $\alpha \in (0, 2)$  gibt es Konstanten  $m_1 \geq 0$ ,  $m_2 \geq 0$ ,  $m_1 + m_2 > 0$ , und ein  $b \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\begin{aligned} \log \phi_R(t) &= ibt + m_1 \int_0^\infty \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \\ &\quad + m_2 \int_{-\infty}^0 \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}, \end{aligned}$$

wobei  $\phi_R$  die charakteristische Funktion von  $R$  bezeichne.

*Beweis.* Aus der Stabilität von  $R$  lässt sich direkt folgern, dass  $R$  unendlich teilbar ist. Nach Satz A.1.3 gilt dann, dass

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \psi_R(t) &:= \log \phi_R(t) \\ &= ibt - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \end{aligned}$$

mit einem endlichen Maß  $\nu$  auf  $\mathbb{R}^*$  ist. Mit dieser Darstellung können wir (1.8) zu

$$(1.10) \quad \left( e^{\psi_R(t)} \right)^n = e^{\psi_R(c_n t)} e^{i\gamma_n t} \quad \text{oder} \quad n\psi_R(t) = \psi_R(c_n t) + i\gamma_n t$$

umformen, da  $\psi_R$  stetig ist mit  $\psi_R(0) = 0$ . Wir unterscheiden nun die beiden folgenden Fälle:

$$\sigma^2 = 0 \quad \text{und} \quad \sigma^2 > 0.$$

1. Fall: Sei  $\sigma^2 = 0$ . Wäre in (1.9)  $\nu = 0$ , so wäre  $R$  eine Diracverteilung, was im Widerspruch zur Stabilität von  $R$  steht. Es muss also in diesem Fall  $\nu \neq 0$  gelten. Definieren wir ein Maß  $\mu$  durch  $\mu(B) = \int_B (1+x^2)/x^2 \nu(dx)$ ,  $B \in \mathfrak{B}$ , so gelten

$$(1.11) \quad \psi_R(t) = ibt + \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \mu(dx)$$

$$\begin{aligned} \text{und } \psi_R(c_n t) &= ibc_n t + \int \left( e^{ic_n t x} - 1 - \frac{ic_n t x}{1+x^2} \right) \mu(dx) \\ &= id_n t + \int \left( e^{ic_n t x} - 1 - \frac{ic_n t x}{1+c_n^2 x^2} \right) \mu(dx), \end{aligned}$$

wobei  $d_n = bc_n + c_n \int \left( \frac{x}{1+c_n^2 x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) \mu(dx)$  ist. Dieses letzte Integral existiert, weil

$$\frac{x}{1+c_n^2 x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{(1-c_n^2)x^3}{(1+c_n^2 x^2)(1+x^2)}$$

für  $x \rightarrow 0$  asymptotisch äquivalent zu  $(1-c_n^2)x^3$  ist, und sich

$$\int_{[-a,a]} \left( \frac{x}{1+c_n^2 x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) \mu(dx)$$

deshalb für hinreichend kleines  $a > 0$  wie

$$\int_{[-a,a]} (1-c_n^2)x(1+x^2) \nu(dx) < \infty$$

verhält. Außerhalb einer Umgebung  $[-a, a]$  ( $a > 0$ ) von 0 ist das Integral ebenfalls endlich, da der Integrand beschränkt ist und

$$\mu([-a, a]^c) = \int_{[-a, a]^c} \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \leq \left( 1 + \frac{1}{a^2} \right) \nu([-a, a]^c) < \infty$$

gilt.

Als nächstes definieren wir ein Maß

$$\mu_n(B) := \mu \left( \frac{B}{c_n} \right), \quad B \in \mathfrak{B}, n \geq 1,$$

und erhalten:

$$\psi_R(c_n t) = id_n t + \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \mu_n(dx),$$

wodurch (1.10) zu

$$\begin{aligned} ibtn + \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) n\mu(dx) \\ = i(\gamma_n + d_n)t + \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \mu_n(dx) \end{aligned}$$

wird. Nach Satz A.1.4 ist die Darstellung der charakteristischen Funktion einer unendlich teilbaren Verteilung eindeutig und daher muss

$$(1.12) \quad n\mu = \mu_n$$

gelten. Definieren wir nun  $M^+(x) := \mu([x, \infty))$  für  $x > 0$  und  $M^-(x) := \mu((-\infty, x))$  für  $x < 0$ , so folgt mit (1.12) und Satz 1.1.3 für  $n \geq 1$  und den charakteristischen Exponenten  $\alpha$ :

$$(1.13) \quad \begin{aligned} nM^+(x) &= M^+(x/n^{1/\alpha}) \text{ für } x > 0, \\ nM^-(x) &= M^-(x/n^{1/\alpha}) \text{ für } x < 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (1.13) ermöglichen eine sehr genaue Bestimmung der Funktionen  $M^+$  und  $M^-$ :

**1.2.3 Lemma (vgl. [Br], 9.9, Proposition 9.31).**

*In der obigen Situation gilt*

$$(1.14) \quad \begin{aligned} M^+(x) &= x^{-\alpha} M^+(1) \text{ für } x > 0, \\ M^-(x) &= |x|^{-\alpha} M^-(-1) \text{ für } x < 0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Seien  $k, n \geq 1$  und  $\alpha \in (0, 2]$ . Aus (1.13) folgt, dass  $nM^+((n/k)^{1/\alpha}) = M^+(1/k^{1/\alpha})$  für alle  $n, k \geq 1$  ist. Ist  $n = k$ , ergibt sich:  $kM^+(1) = M^+(1/k^{1/\alpha})$ . Setzen wir dies in die vorherige Gleichung ein, so erhalten wir, dass  $nM^+((n/k)^{1/\alpha}) = kM^+(1)$  bzw.  $M^+((n/k)^{1/\alpha}) = (n/k)^{-1}M^+(1)$  gilt, d.h.  $M^+(x) = x^{-\alpha}M^+(1)$  für  $x \in \{(n/k)^{1/\alpha} : n, k \geq 1\}$ . Da diese Menge dicht in  $(0, \infty)$  liegt, folgt die Ausweitung auf alle  $x > 0$  durch Grenzübergang unter Benutzung der Monotonie von  $M^+$ . Der Beweis für  $M^-$  verläuft analog.  $\square$

*Fortsetzung des Beweises von Satz 1.2.2:* Durch Differentiation erhalten wir aus (1.14), dass  $\mu$  die Lebesgue-Dichte

$$f_\mu(x) = \alpha M^+(1)x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) + \alpha M^-(-1)|x|^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(x)$$

besitzt. Weil  $\nu \neq 0$  gilt, ist  $\mu(\mathbb{R}^*) > 0$  und wir können mit Lemma 1.2.3 folgern, dass  $\max\{M^+(1), M^-(-1)\} > 0$  ist. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass

$M^+(1) > 0$  ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \infty > \int_{[0,1]} (1+x^2)\nu(dx) &= \int_{[0,1]} x^2\mu(dx) \\ &= \int_0^1 x^2\alpha M^+(1)x^{-(\alpha+1)}dx \\ &= \alpha M^+(1) \int_0^1 x^{1-\alpha}dx, \end{aligned}$$

was  $\alpha < 2$  impliziert. Die behauptete Gestalt von  $\psi_R(t)$  ergibt sich durch das Einsetzen der Lebesgue-Dichte von  $\mu$  in (1.11), wobei wir  $m_1 := \alpha M^+(1)$  und  $m_2 := \alpha M^-(1)$  setzen.

2. Fall: Sei  $\sigma^2 > 0$ . Dann gilt

$$\psi_R(t) = ibt - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx).$$

Wir wollen zunächst mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz zeigen, dass  $\psi_R(t)/t^2$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $-\sigma^2/2$  konvergiert. Dazu müssen wir prüfen, ob Folgendes gilt:

$$(1.15) \quad \sup_{\substack{t \geq 1, \\ x \in \mathbb{R}^*}} \left| \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{t^2 x^2} \right| < \infty,$$

$$(1.16) \quad \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{t^2 x^2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Beweis von (1.15): Seien  $t \geq 1$  und  $x \in \mathbb{R}^*$ . Betrachten wir zuerst den Fall, dass  $|tx| \geq 1$  ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{t^2 x^2} \right| &\leq 2 \left| \frac{1+x^2}{t^2 x^2} \right| + \left| \frac{itx}{1+x^2} \frac{1+x^2}{t^2 x^2} \right| \\ &= 2 \left| \frac{1}{t^2 x^2} + \frac{1}{t^2} \right| + \left| \frac{1}{tx} \right| \\ &\leq 4 + 1. \end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir leicht zeigen, dass (1.16) gegeben ist, denn:

$$\left| \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{t^2 x^2} \right| \leq 2 \left| \frac{1}{t^2 x^2} + \frac{1}{t^2} \right| + \left| \frac{1}{tx} \right| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Sei nun  $|tx| \leq 1$ . Dann ist  $|x| \leq 1$  und es gilt:

$$\begin{aligned} \left| \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{t^2 x^2} \right| &= \left| \left( e^{itx} - 1 - itx + \frac{itx(1+x^2-1)}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{t^2 x^2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sum_{n \geq 2} \frac{(itx)^n}{n!} (tx)^{-2} \right| + \left| \frac{ix}{t} \right| \\ &\leq 2 \sum_{n \geq 0} \frac{|tx|^n}{(n+2)!} + 1 \leq 2e^{|tx|} + 1 \leq 2e + 1. \end{aligned}$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz lässt sich daher anwenden und wir erhalten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi_R(t)}{t^2} = -\frac{\sigma^2}{2} + \int \lim_{t \rightarrow \infty} \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{t^2 x^2} \nu(dx) = -\frac{\sigma^2}{2}.$$

Dividieren wir nun (1.10) durch  $t^2$  und lassen dann  $t$  gegen  $\infty$  laufen, erhalten wir:  $c_n = n^{1/2}$ , d.h. wir befinden uns im Fall  $\alpha = 2$ . (1.10) hat somit die Gestalt  $n\psi_R(t) = \psi_R(n^{1/2}t) + i\gamma_n t$ , was äquivalent zu

$$\psi_R(t) = t^2 \frac{\psi_R(n^{1/2}t)}{nt^2} + i \frac{\gamma_n}{n} t$$

ist. Hier konvergiert  $\psi_R(n^{1/2}t)/(nt^2)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $-\sigma^2/2$ . Können wir nun zeigen, dass  $\gamma_n/n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt, so haben wir gezeigt, dass  $\psi_R(t)$  von der Gestalt  $ibt - (\sigma^2/2)t^2$  ist, d.h.  $R = \mathfrak{N}(b, \sigma^2)$  gilt.

Klar ist, dass

$$i \frac{\gamma_n}{n} t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ibt + \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx)$$

gilt. Insbesondere muss

$$\begin{aligned} 0 &= -\Re \left( \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \right) \\ &= \int (1 - \cos(tx)) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx) \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  gelten. Da der Integrand für jedes  $t$  nichtnegativ ist, muss er  $\nu$ -f.ü. verschwinden. Daher ist  $\nu$  auf die Menge

$$\bigcap_{t > 0} \frac{2\pi\mathbb{Z}}{t} = \{0\}$$

konzentriert. Weil nach Voraussetzung  $\nu(\{0\}) = 0$  ist, muss  $\gamma_n/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$  gelten.  $\square$

**1.2.4 Satz (vgl. [Br], 9.10, Theorem 9.32).**

Für jede stabile Verteilung  $R$  gibt es Konstanten  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\beta \in [-1, 1]$  und  $\mu \in \mathbb{R}$ , so dass ihre charakteristische Funktion  $\phi_R$  von der Gestalt  $e^{\psi_R}$  ist mit

$$(1.17) \quad \psi_R(t) = \begin{cases} i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right), & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ i\mu t - \sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \log |t|\right), & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Umgekehrt ist jede solche Funktion  $\phi$  die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung.

*Beweis.* Sei  $R$  stabil. Der Fall  $\alpha = 2$  ist nach Satz 1.2.2 klar. Sei also  $0 < \alpha < 2$ . Wir setzen

$$I_1(t) := \int_0^\infty \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$$

und sehen direkt, dass  $I_1(-t) = \overline{I_1(t)}$  ist. Deshalb berechnen wir  $I_1(t)$  nur für  $t > 0$  und setzen

$$\begin{aligned} I_2(t) &:= \int_{-\infty}^0 \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} \\ &\stackrel{x \mapsto -x}{=} - \int_\infty^0 \left( e^{-itx} - 1 - \frac{-itx}{1+x^2} \right) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} = I_1(-t). \end{aligned}$$

Sei  $0 < \alpha < 1$ . Durch die Substitution  $x \mapsto t^{-1}x$  ( $t > 0$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^\infty (e^{itx} - 1) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} - it \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \frac{dx}{x^\alpha} \\ &= \int_0^\infty (e^{ix} - 1) t^\alpha \frac{dx}{x^{1+\alpha}} + itc \\ &= itc + t^\alpha H(\alpha), \end{aligned}$$

wobei  $H(\vartheta) := \int_0^\infty (e^{iy} - 1) y^{-(\vartheta+1)} dy$  und  $c := - \int_0^\infty (1+x^2)^{-1} x^{-\alpha} dx$  seien.

Sei  $1 < \alpha < 2$ . Dann erkennen wir mittels partieller Integration, dass

$$I_1(t) = \frac{it}{\alpha} \int_0^\infty \left( e^{itx} - \frac{d}{dx} \frac{x}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x^\alpha} = itc' + \frac{it}{\alpha} \int_0^\infty (e^{itx} - 1) \frac{dx}{x^\alpha}$$

ist, wobei  $c' := \alpha^{-1} \int_0^\infty \left(1 - \frac{d}{dx} \frac{x}{1+x^2}\right) x^{-\alpha} dx$  sei. Dabei ist hinsichtlich der Existenz des Integrals zu beachten, dass  $1 - \frac{d}{dx} \frac{x}{1+x^2}$  in 0 eine Nullstelle zweiter Ordnung besitzt. Analog zum Fall  $0 < \alpha < 1$  bekommen wir durch die Substitution  $x \mapsto t^{-1}x$  ( $t > 0$ ):

$$I_1(t) = itc' + t^\alpha \frac{i}{\alpha} H(\alpha - 1).$$

Sei  $\alpha = 1$ . Mit partieller Integration erhalten wir analog zum Fall  $1 < \alpha < 2$ , dass

$$I_1(t) = it \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left( e^{itx} - \frac{d}{dx} \frac{x}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x}$$

ist. Definieren wir nun  $J(T, t) := \int_0^T \left( e^{itx} - \frac{d}{dx} \frac{x}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x}$ , so erhalten wir für  $t_2 \geq t_1 > 0$  unter Verwendung des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} J(T, t_2) - J(T, t_1) &= \int_0^T (e^{it_2x} - e^{it_1x}) \frac{dx}{x} = i \int_0^T \left( \int_{t_1}^{t_2} e^{ixz} dz \right) dx \\ &= i \int_{t_1}^{t_2} \int_0^T e^{ixz} dx dz = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{iTz} - 1}{z} dz. \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Riemann und Lebesgue (vgl. Lemma A.1.5) ist

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{iTz}}{z} dz = 0,$$

woraus folgt, dass  $\lim_{T \rightarrow \infty} (J(T, t_2) - J(T, t_1)) = \log(t_1/t_2)$  für  $t_2 \geq t_1 > 0$  gilt. Betrachten wir nun  $\lim_{T \rightarrow \infty} J(T, 1)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left( e^{ix} - \frac{d}{dx} \frac{x}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x} &= \int_0^\infty \left( e^{ix} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \right) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\pi i}{2} + \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^2 \cos x - (1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Dieses Integral existiert bei 0, da der Integrand dort stetig fortsetzbar ist. Es existiert ebenfalls bei  $\infty$ , weil  $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx$  als uneigentliches Riemann-Integral und  $\int_1^\infty \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \frac{dx}{x}$  im Lebesgueschen Sinne existieren. Daher können wir folgern, dass

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J(T, t) = -\log t + c''$$

ist, wobei

$$\begin{aligned} c'' := \lim_{T \rightarrow \infty} J(T, 1) &= \int_0^\infty \left( e^{ix} - \frac{d}{dx} \frac{x}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\pi i}{2} + c_1 \end{aligned}$$

mit  $c_1 := \int_0^\infty \left( \cos x - \frac{d}{dx} \frac{x}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x}$  sei. Damit gilt für  $t > 0$

$$I_1(t) = itc'' - it \log t = itc_1 - (\pi/2)t - it \log t.$$

Um nun endlich auf die behauptete Gestalt von  $\psi_R$  zu kommen, müssen wir noch  $H(\alpha)$  für  $0 < \alpha < 1$  bestimmen. Dies haben wir in Satz A.1.11 getan:

$$H(\vartheta) = e^{-\frac{\pi i}{2}\vartheta} L(\vartheta),$$

wobei  $L$  reell und negativ ist. Aus dem vorherigen Satz und unseren Anfangsüberlegungen wissen wir:

$$\psi_R(t) = ibt + m_1 I_1(t) + m_2 I_2(t) = ibt + m_1 I_1(t) + m_2 \overline{I_1(t)}.$$

Für  $0 < \alpha < 1$  ist dann

$$\begin{aligned} \psi_R(t) &= ibt + m_1 (ict + t^\alpha H(\alpha)) + m_2 \left( -ict + t^\alpha \overline{H(\alpha)} \right) \\ &= i\mu t + t^\alpha \left( m_1 e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha} L(\alpha) + m_2 e^{\frac{\pi i}{2}\alpha} L(\alpha) \right) \\ &= i\mu t + t^\alpha \left( \underbrace{(m_1 + m_2) L(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}}_{=\Re(H(\alpha))} - i(m_1 - m_2) L(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right) \\ &= i\mu t + (m_1 + m_2) \Re(H(\alpha)) t^\alpha \left( 1 - i \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \\ &= i\mu t - \sigma^\alpha t^\alpha \left( 1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

mit  $\mu := b + (m_1 - m_2)c \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^\alpha := -(m_1 + m_2)\Re(H(\alpha)) > 0$  und  $\beta := (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) \in [-1, 1]$ .

Im Fall  $1 < \alpha < 2$  benötigen wir

$$H(\alpha - 1) = e^{-\frac{\pi i}{2}(\alpha-1)} L(\alpha - 1) = ie^{-\frac{\pi i}{2}\alpha} L(\alpha - 1).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \psi_R(t) &= ibt + m_1 \left( ic't + \frac{it^\alpha}{\alpha} H(\alpha - 1) \right) + m_2 \left( -ic't - \frac{it^\alpha}{\alpha} \overline{H(\alpha - 1)} \right) \\ &= i\mu t + \frac{it^\alpha}{\alpha} L(\alpha - 1) \left( (m_1 + m_2)i \cos \frac{\pi\alpha}{2} + (m_1 - m_2) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right) \\ &= i\mu t + (m_1 + m_2) L(\alpha - 1) i \cos \frac{\pi\alpha}{2} \frac{it^\alpha}{\alpha} \left( 1 - i \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \\ &= i\mu t - \sigma^\alpha t^\alpha \left( 1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

mit  $\mu = b + (m_1 - m_2)c' \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^\alpha := ((m_1 + m_2)/\alpha) L(\alpha - 1) \cos \pi\alpha/2 > 0$  und  $\beta = (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) \in [-1, 1]$ .

Im Fall  $\alpha = 1$  gilt abschließend:

$$\begin{aligned} \psi_R(t) &= ibt + m_1 \left( ic_1 t - \frac{\pi}{2} t - it \log t \right) + m_2 \left( -ic_1 t - \frac{\pi}{2} t + it \log t \right) \\ &= i\mu t - (m_1 + m_2) \frac{\pi}{2} t - i(m_1 - m_2) t \log t \\ &= i\mu t - (m_1 + m_2) \frac{\pi}{2} t \left( 1 + i \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{2}{\pi} \log t \right) \\ &= i\mu t - \sigma t \left( 1 + i\beta \frac{2}{\pi} \log t \right) \end{aligned}$$



mit  $\mu := b + (m_1 - m_2)c_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma := (m_1 + m_2)\pi/2 > 0$  und  $\beta := (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) \in [-1, 1]$ .

Nach Satz A.1.3 existiert für gegebene Parameter  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\beta \in [-1, 1]$  und  $\mu \in \mathbb{R}$  eine unendlich teilbare Verteilung mit einer charakteristischen Funktion der Gestalt (A.3), die sich in die Form (1.17) transformieren lässt. Es kann leicht geprüft werden (mit Hilfe von Satz 1.3.4), dass diese unendlich teilbare Verteilung stabil ist.  $\square$

### 1.2.5 Korollar.

*Jede stabile Verteilung hat eine beliebig oft stetig differenzierbare Lebesgue-Dichte.*

*Beweis.* Sei  $R$  eine stabile Verteilung. Dann existieren nach Satz 1.2.4 Konstanten  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\beta \in [-1, 1]$  und ein  $\mu \in \mathbb{R}$ , so dass die charakteristische Funktion  $\phi$  von  $R$  von der Gestalt  $e^\psi$  ist mit

$$\psi(t) = \begin{cases} i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right), & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ i\mu t - \sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \log |t|\right), & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Damit gilt  $|\phi(t)| = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Also ist  $\phi$  Lebesgue-integrierbar über  $\mathbb{R}$  und nach der Umkehrformel (Satz 41.7 in [A]) ist eine Lebesgue-Dichte von  $R$  gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \phi(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Durch Induktion nach  $n$  können wir nun zeigen, dass  $f$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$   $n$ -mal differenzierbar ist mit Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^n e^{-ixt} \phi(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Für  $n = 0$  ist die Behauptung bereits gezeigt. Nehmen wir an, dass die Behauptung für  $n \in \mathbb{N}_0$  ebenfalls wahr ist, so erhalten wir wegen

$$\frac{d}{dx} (-it)^n e^{-ixt} \phi(t) = (-it)^{n+1} e^{-ixt} \phi(t)$$

und der Lebesgue-Integrierbarkeit von

$$t \mapsto |(-it)^{n+1} e^{-ixt} \phi(t)| = |t|^{n+1} e^{-\sigma^\alpha |t|^\alpha}$$

aus Satz IV.5.7 in [E] die Behauptung.  $\square$

### 1.3 Stabile Verteilungen (zweiter Teil)

Da wir im letzten Abschnitt die Gestalt der charakteristischen Funktion einer stabilen Verteilung hergeleitet haben, können wir nun auf dieser Basis eine Bezeichnung für stabile Verteilungen einführen:

Wir schreiben  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  mit  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\beta \in [-1, 1]$  und  $\mu \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn  $X$  eine stabile Verteilung besitzt, deren charakteristische Funktion  $\phi_X$  die Gestalt  $e^{\psi_X}$  mit

$$\psi_X(t) = \begin{cases} i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right), & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ i\mu t - \sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \log |t|\right), & \text{falls } \alpha = 1, \end{cases}$$

hat. Dabei wird  $\alpha$  *charakteristischer Exponent* (engl.: *index of stability*),  $\beta$  *Asymmetrieparameter* (engl.: *skewness parameter*),  $\sigma$  *Skalierungsparameter* (engl.: *scale parameter*) und  $\mu$  *Verschiebungsparameter* (engl.: *shift*) genannt.

In diesem Zusammenhang können wir noch einmal auf die Beispiele aus 1.1.2 zurückkommen: Die Verteilung  $\mathfrak{N}(0, \sigma^2)$  mit  $\sigma^2 > 0$  besitzt die Fourier-Transformierte

$$\phi(t) = e^{-\sigma^2 t^2/2},$$

entspricht also aufgrund der Eindeutigkeit der Fourier-Transformierten der Verteilung  $S_2(\sigma/\sqrt{2}, 0, 0)$ . Die Verteilung  $\mathcal{C}(a, b)$  mit  $a \in \mathbb{R}$  und  $b > 0$  besitzt die Fourier-Transformierte

$$\phi(t) = e^{iat - b|t|}$$

und entspricht somit der Verteilung  $S_1(b, 0, a)$ .

Viel allgemeiner als das obige Beispiel können wir Folgendes bemerken:

#### 1.3.1 Bemerkung.

Die Normalverteilungen bilden eine Teilklasse der stabilen Verteilungen.

*Beweis.* Wie im obigen Beispiel durchgeführt, lässt sich aufgrund der Eindeutigkeit der Fourier-Transformierten die Gleichheit

$$\mathfrak{N}(\mu, \sigma^2) = S_2(\sigma/\sqrt{2}, 0, \mu)$$

nachweisen. □

Als nächstes werden wir einige grundlegende Eigenschaften stabiler Verteilungen herleiten.

#### 1.3.2 Satz (vgl. [Sam], 1.2, Property 1.2.2).

Es seien  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  und  $a$  eine reelle Konstante. Dann gilt:

$$X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a).$$

*Beweis.* Sei  $\alpha \neq 1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \log \phi_{X+a}(t) &= \log e^{iat} \phi_X(t) = iat + \psi_X(t) \\ &= i(a + \mu)t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left( 1 - i\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Für  $\alpha = 1$  lässt sich eine ähnliche Rechnung durchführen.  $\square$

Damit ist klar, wieso  $\mu$  Verschiebungsparameter genannt wird; der nächste Satz erklärt die Bezeichnung „Skalierungsparameter“ für den Parameter  $\sigma$ .

**1.3.3 Satz (vgl. [Sam], 1.2, Property 1.2.3).**

Es seien  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  und  $a \neq 0$  eine reelle Konstante. Dann gilt:

$$\begin{aligned} aX &\sim S_\alpha(|a|\sigma, a\beta/|a|, a\mu) \text{ für } \alpha \neq 1, \\ aX &\sim S_1\left(|a|\sigma, a\beta/|a|, a\mu - a\sigma\beta\frac{2}{\pi}\log|a|\right) \text{ für } \alpha = 1. \end{aligned}$$

*Beweis.* Ist  $\alpha \neq 1$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \log \phi_{aX}(t) &= \log \phi_X(at) \\ &= ia\mu t - \sigma^\alpha |at|^\alpha \left( 1 - i\beta \frac{at}{|at|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \\ &= ia\mu t - (|a|\sigma)^\alpha |t|^\alpha \left( 1 - i\frac{a\beta}{|a|} \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Ist  $\alpha = 1$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \log \phi_{aX}(t) &= ia\mu t - \sigma|at| \left( 1 + i\beta \frac{at}{|at|} \frac{2}{\pi} \log|at| \right) \\ &= ia\mu t - \sigma|a||t| \left( 1 + i\frac{a\beta}{|a|} \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \log|t| \right) - ia\beta\sigma t \frac{2}{\pi} \log|a|. \end{aligned}$$

$\square$

Bereits an der Definition sehen wir, dass verschobene und skalierte stabile Verteilungen wieder stabil sind. Nach dem obigen Satz wissen wir nun auch, wie die zugehörigen, neuen Parameter aussehen. Für die Faltung stabiler Verteilungen (mit demselben charakteristischen Exponenten) liefert der folgende Satz die neuen Parameter:

**1.3.4 Satz (vgl. [Sam], 1.2, Property 1.2.1).**

Es seien unabhängige Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  mit  $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$ , gegeben. Dann gilt:  $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  mit

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{\sigma_1^\alpha \beta_1 + \sigma_2^\alpha \beta_2}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

*Beweis.* Sei  $\alpha \neq 1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \ln \phi_{X_1+X_2}(t) &= \ln(\phi_{X_1}\phi_{X_2})(t) = \psi_{X_1}(t) + \psi_{X_2}(t) \\ &= i(\mu_1 + \mu_2)t - (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|t|^\alpha + i(\sigma_1^\alpha\beta_1 + \sigma_2^\alpha\beta_2)|t|^\alpha \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \\ &= i(\mu_1 + \mu_2)t - (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|t|^\alpha \left(1 - i\frac{\sigma_1^\alpha\beta_1 + \sigma_2^\alpha\beta_2}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha} \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Für  $\alpha = 1$  lässt sich eine ähnliche Rechnung durchführen.  $\square$

**1.3.5 Satz (vgl. [Sam], 1.2, Property 1.2.4).**

Für jedes  $0 < \alpha < 2$  gilt: Ist  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ , so ist  $-X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0)$ .

*Beweis.* Setzt man  $\mu = 0$  und  $a = -1$ , so folgt die Behauptung aus Satz 1.3.3.  $\square$

Wieso  $\beta$  Asymmetrieparameter genannt wird, erklären die folgenden beiden Sätze.

**1.3.6 Satz (vgl. [Sam], 1.2, Property 1.2.5).**

$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  ist genau dann symmetrisch, wenn  $\beta = \mu = 0$  gilt.  $X$  ist genau dann symmetrisch bzgl.  $\mu$ , wenn  $\beta = 0$  ist.

*Beweis.* Nach Satz 41.13 aus [A] ist eine Verteilung genau dann symmetrisch, wenn ihre Fourier-Transformierte reellwertig ist. Und dies ist genau dann der Fall, wenn  $\beta = \mu = 0$  gilt. Die zweite Aussage folgt dann aus Satz 1.3.2.  $\square$

Wir haben gerade anhand der Parameter charakterisiert, welche stabilen Verteilungen symmetrisch sind, und werden nun untersuchen, welche stabilen Verteilungen auf  $[0, \infty)$  konzentriert sind.

**1.3.7 Satz (vgl. [Sat], 5, Example 24.12).**

$S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  ist genau dann auf  $[0, \infty)$  konzentriert, wenn  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\beta = 1$  und  $\mu \geq 0$  gilt.

*Beweis.* Nach [Sat], Beispiel 24.12, ist eine stabile Verteilung genau dann auf  $[0, \infty)$  konzentriert, wenn ihre charakteristische Funktion  $\phi$  die Gestalt  $e^\psi$  hat, wobei

$$\psi(t) = i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)$$

mit  $\alpha \in (0, 1)$ , beliebigem  $\sigma > 0$  und  $\mu \geq 0$  ist. Vergleicht man diese Darstellung mit Gleichung (1.17), so erhält man ferner  $\beta = 1$ .  $\square$

**1.3.8 Bemerkung.**

Aus Satz A.1.7 erhalten wir ebenfalls eine Implikation des obigen Satzes, nämlich dass  $S_\alpha(\sigma, 1, \mu)$  für  $\alpha \in (0, 1)$  und  $\mu \geq 0$  auf  $[0, \infty)$  konzentriert ist.

Eine stabile Verteilung heißt *vollständig nach rechts ausgelekt* (engl.: *totally skewed to the right*), wenn ihr Asymmetrieparameter  $\beta = 1$  ist. Analog heißt eine stabile Verteilung *vollständig nach links ausgelekt* (engl.: *totally skewed to the left*), wenn  $\beta = -1$  ist.

**1.3.9 Satz (vgl. [Sam], 1.2, Property 1.2.6).**

*X* habe die Verteilung  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  mit  $\alpha \neq 1$ . Dann gilt: *X* ist genau dann stabil im engeren Sinne, wenn  $\mu = 0$  gilt.

*Beweis.*  $X_1, X_2, \dots$  seien unabhängige Kopien von *X* und es gelte  $\alpha \neq 1$ . Durch wiederholtes Anwenden von Satz 1.3.4 erhalten wir für  $n \in \mathbb{N}$ :  $S_n \sim S_\alpha(n^{1/\alpha}\sigma, \beta, n\mu)$ . Wegen der Definition 1.1.1 betrachten wir nun  $n^{1/\alpha}X + \gamma_n$ . Hierfür gilt nach den Sätzen 1.3.2 und 1.3.3:

$$n^{1/\alpha}X + \gamma_n \sim S_\alpha(n^{1/\alpha}\sigma, \beta, n^{1/\alpha}\mu + \gamma_n).$$

*X* ist genau dann stabil im engeren Sinne, wenn  $S_n \stackrel{d}{=} 2^{1/\alpha}X + \gamma_n$  mit  $\gamma_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, was genau dann der Fall ist, wenn  $\mu = 0$  gilt.  $\square$

Als Folgerung aus den Sätzen 1.3.2 und 1.3.9 erhalten wir noch einmal Satz 1.1.5, wobei wir sogar die Konstante *b* aus Satz 1.1.5 als den Verschiebungsparameter  $\mu$  identifizieren können:

**1.3.10 Korollar (vgl. [Sam], 1.2, Corollary 1.2.7).**

*X* habe die Verteilung  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  mit  $\alpha \neq 1$ . Dann ist *X*  $-\mu$  stabil im engeren Sinne.

Ist der charakteristische Exponent  $\alpha = 1$ , lässt sich eine stabile Verteilung nicht durch Verschiebung zu einer im engeren Sinne stabile Verteilung transformieren:

**1.3.11 Satz (vgl. [Sam], 1.2, Property 1.2.8).**

$X \sim S_1(\sigma, \beta, \mu)$  ist genau dann stabil im engeren Sinne, wenn  $\beta = 0$  ist.

*Beweis.*  $X_1$  und  $X_2$  seien unabhängige Kopien von *X*. Mit Hilfe der Sätze 1.3.4, 1.3.2 und 1.3.3 erhalten wir:

$$X_1 + X_2 \sim S_1(2\sigma, \beta, 2\mu)$$

und

$$2X \sim S_1\left(2\sigma, \beta, 2\mu - 2\sigma\beta\frac{2}{\pi}\ln 2\right).$$

*X* ist nach Definition 1.1.1 genau dann stabil im engeren Sinne, wenn  $X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} 2X$  gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $2\sigma\beta\frac{2}{\pi}\ln 2 = 0$  gilt, d.h., wenn  $\beta = 0$  ist.  $\square$

**1.3.12 Satz (vgl. [Sam], 1.2, Property 1.2.13).**

$X$  habe die Verteilung  $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$  mit  $\alpha < 2$ . Dann gibt es zwei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen  $Y_1$  und  $Y_2$  mit  $Y_i \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ ,  $i = 1, 2$ , so dass

$$(1.18) \quad X \stackrel{d}{=} \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{1/\alpha} Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{1/\alpha} Y_2 \quad \text{für } \alpha \neq 1$$

und

$$X \stackrel{d}{=} \frac{1+\beta}{2} Y_1 - \frac{1-\beta}{2} Y_2 + \sigma \left( \frac{1+\beta}{\pi} \log \frac{1+\beta}{2} - \frac{1-\beta}{\pi} \log \frac{1-\beta}{2} \right)$$

für  $\alpha = 1$  gilt.

*Beweis.* Mit Hilfe der Sätze 1.3.4, 1.3.2 und 1.3.3 erhält man die Behauptung.  $\square$

Kommen wir nun zu einer Aussage über das asymptotische Verhalten der Überlebenswahrscheinlichkeiten:

**1.3.13 Satz (vgl. [Sam], 1.2, Property 1.2.15).**

Ist die Zufallsgröße  $X$   $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ -verteilt und  $\alpha \in (0, 2]$ , dann gelten

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^\alpha \mathbb{P}(X > y) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \sigma^\alpha$$

und

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^\alpha \mathbb{P}(X < -y) = C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \sigma^\alpha$$

mit

$$C_\alpha = \left( \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} & \text{für } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} & \text{für } \alpha = 1, \end{cases}$$

wobei  $C_2 = 0$  gesetzt wird.

*Beweis.* Zeigen wir zunächst, dass  $C_\alpha$  die behauptete Gestalt besitzt: Es ist bekannt, dass  $\int_0^\infty x^{-1} \sin x dx = \pi/2$  ist. Sei nun  $\alpha \neq 1$ . Dann entnehmen wir der Übungsaufgabe 2.12 a) aus [E], V.2:

$$\left( \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right)^{-1} = \left( \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}} \right)^{-1} = \frac{2\Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}.$$

Mit Hilfe der Funktionalgleichung der Gammafunktion und der Gleichung  $\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2-\alpha) = \pi/(\sin(\pi(\alpha-1)))$  aus [Fi], VII.4, Satz 5.1, erhalten wir:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1) \frac{\pi}{\Gamma(2-\alpha) \sin(\pi(\alpha-1))} = \frac{\pi(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha) \sin \pi\alpha}.$$

Wegen  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  ist  $2 \sin(\pi\alpha/2) = \sin \pi\alpha / \cos(\pi\alpha/2)$ . Insgesamt ergibt sich:

$$\left( \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right)^{-1} = \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}}.$$

Kommen wir zum asymptotischen Verhalten der Überlebenswahrscheinlichkeiten: Für  $\alpha = 2$  ist  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  eine Normalverteilung. In diesem Fall ist die Behauptung klar.

Sei nun  $0 < \alpha < 1$ . Außerdem seien  $X$  wie  $S_\alpha(\sigma, 1, 0)$  verteilt und  $\varphi$  die Laplace-Transformierte von  $X$ . Dann gilt für  $t \geq 0$ :

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{-tX} \stackrel{\text{A.1.8}}{=} \exp(-a^\alpha t^\alpha)$$

mit  $a^\alpha = \sigma^\alpha / \cos(\frac{\pi\alpha}{2})$ . Weil  $S_\alpha(\sigma, 1, 0)$  ausschließlich auf  $(0, \infty)$  lebt (dies ergibt sich aus Satz A.1.7 und auch aus Satz 1.3.7), folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-tx} \mathbb{P}(X > x) dx &= \int_0^\infty e^{-tx} \int_x^\infty \mathbb{P}^X(ds) dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^s e^{-tx} dx \mathbb{P}^X(ds) \\ &= \int_0^\infty \frac{1 - e^{-st}}{t} \mathbb{P}^X(ds) = \frac{1 - \varphi(t)}{t} \\ &= \frac{1 - \exp(-a^\alpha t^\alpha)}{t} \sim a^\alpha t^{\alpha-1} \quad (t \downarrow 0), \end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^\alpha t^{\alpha-1}} \frac{1 - \exp(-a^\alpha t^\alpha)}{t} &= \frac{1}{a^\alpha t^\alpha} \left( 1 - \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (a^\alpha t^\alpha)^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} (a^\alpha t^\alpha)^{k-1}}{k!} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1. \end{aligned}$$

Mit Satz A.1.10 können wir weiter folgern:

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathbb{P}(X > t) dt &\sim x^{1-\alpha} a^\alpha \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \\ &= x^{1-\alpha} a^\alpha \frac{1}{(1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha)} \quad (x \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{x^{1-\alpha} a^\alpha ((1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha))^{-1}}{\int_0^x \mathbb{P}(X > t) dt} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1.$$

Mit der Regel von de l'Hospital erhalten wir daraus:

$$\frac{x^{-\alpha} a^\alpha (\Gamma(1 - \alpha))^{-1}}{\mathbb{P}(X > x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > x) &\sim x^{-\alpha} a^\alpha \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \\ &= \frac{\sigma^\alpha}{\Gamma(1-\alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} x^{-\alpha} = \sigma^\alpha C_\alpha x^{-\alpha} \quad (x \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

und wir haben die Behauptung für  $\alpha < 1$ ,  $\beta = 1$  und  $\mu = 0$  bewiesen.

Um die Behauptung auf beliebige  $\beta \in [-1, 1]$  auszuweiten, betrachten wir stochastisch unabhängige Zufallsgrößen  $Y_1$  und  $Y_2$  mit  $Y_i \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ ,  $i = \{1, 2\}$ . Nach (1.18) ist dann

$$X := \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{1/\alpha} Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{1/\alpha} Y_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0),$$

woraus wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > x) &= \mathbb{P}\left(\left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{1/\alpha} Y_1 > x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Y_1 > \left(\frac{2}{1+\beta}\right)^{1/\alpha} x\right) \sim \sigma^\alpha C_\alpha \frac{1+\beta}{2} x^{-\alpha}\end{aligned}$$

für  $x \rightarrow \infty$  folgern können. Analog erhalten wir

$$\mathbb{P}(X < -x) \sim \sigma^\alpha C_\alpha \frac{1-\beta}{2} x^{-\alpha} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Betrachten wir nun den Fall  $\alpha < 1$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\sigma > 0$  und  $\mu \neq 0$ . Ist  $X$  wie  $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$  verteilt, dann gilt:  $X + \mu \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  und

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + \mu > x) &= \mathbb{P}(X > x - \mu) \sim \sigma^\alpha C_\alpha \left(\frac{1+\beta}{2}\right) (x - \mu)^{-\alpha} \\ &\sim \sigma^\alpha C_\alpha \left(\frac{1+\beta}{2}\right) x^{-\alpha} \quad (x \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir die Aussage für  $1 \leq \alpha < 2$  und  $\beta = 0$ . Dazu seien  $X \sim S_{\alpha'}(\sigma, 0, 0)$  mit  $0 < \alpha' \leq 2$  und  $\alpha \in (0, \alpha')$ . Weiter sei  $Y \sim S_{\alpha/\alpha'}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2\alpha'}\right)^{\alpha'/\alpha}, 1, 0\right)$  stochastisch unabhängig von  $X$ . Dann besitzt  $Z := Y^{1/\alpha'} X$  nach Satz A.1.9 die Verteilung  $S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned}t^\alpha \mathbb{P}(Z > t) &= t^\alpha \mathbb{P}\left(Y^{1/\alpha'} X > t\right) \\ &= t^\alpha \int_{(0, \infty)} \mathbb{P}\left(Y^{1/\alpha'} x > t\right) \mathbb{P}^X(dx) \\ &= \int_{(0, \infty)} \left(t^{\alpha'} x^{-\alpha'}\right)^{\alpha/\alpha'} \mathbb{P}\left(Y > t^{\alpha'} x^{-\alpha'}\right) x^\alpha \mathbb{P}^X(dx).\end{aligned}$$



Weil  $\alpha/\alpha' < 1$  ist, wissen wir nach dem bereits Gezeigten, dass folgende Konvergenzaussage gilt:

$$\left(t^{\alpha'} x^{-\alpha'}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha'}} \mathbb{P}\left(Y > t^{\alpha'} x^{-\alpha'}\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_{\frac{\alpha}{\alpha'}} \left(\left(\cos \frac{\pi\alpha}{2\alpha'}\right)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha'}} = C_{\frac{\alpha}{\alpha'}} \cos \frac{\pi\alpha}{2\alpha'}.$$

Wählen wir nun  $\alpha' = 2$ , so ist  $X \sim \mathfrak{N}(0, 2\sigma^2)$  und wir können mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz,  $\mathbb{E}|X|^\alpha < \infty$ , der Funktionalgleichung der Gamma-Funktion, der Gleichung  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ , der Legendreschen Verdoppelungsformel und dem Additionstheorem  $\sin(\pi\alpha) = 2\sin(\pi\alpha/2)\cos(\pi\alpha/2)$  folgern:

$$\begin{aligned} t^\alpha \mathbb{P}(Z > t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_{\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\pi\alpha}{4} \int_0^\infty x^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} dx \\ &=_{x \rightarrow 2\sigma\sqrt{x}} C_{\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\pi\alpha}{4} \frac{2^{\alpha-1}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{\alpha/2-1/2} e^{-x} dx \\ &= C_{\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\pi\alpha}{4} \frac{2^{\alpha-1}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\alpha/2 + 1/2) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha/2 + 1/2)}{\Gamma(2 - \alpha/2)} \frac{(1 - \alpha/2)2^{\alpha-1}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \frac{1}{2} \sigma^\alpha = C_\alpha \frac{1}{2} \sigma^\alpha. \end{aligned}$$

Die Erweiterung der Aussage auf  $\mu \neq 0$  verläuft völlig analog zum Fall  $\alpha < 1$ . Die Ausweitung auf beliebiges  $\beta$  bleiben wir schuldig.  $\square$

Einige stabile Verteilungen erhalten eine spezielle Bezeichnung:

- 1) für  $\mu = \beta = 0$  haben wir es mit einer symmetrischen stabilen Verteilung zu tun; sie erhält die Bezeichnung  $S_\alpha S$  mit  $\sigma > 0$ ,
- 2) für  $\sigma = 1$  und  $\mu = \beta = 0$  schreibt man kurz  $S_\alpha$ ,
- 3) im Fall  $\sigma = 1$  und  $\mu = 0$  erhalten wir die sogenannte Standard-stabile Verteilung, die mit  $S_{\alpha,\beta}$  bezeichnet wird.

Die Klasse der Standard-stabilen Verteilungen wird uns im Kapitel 2 häufiger begegnen. Aus Satz 1.3.13 können wir folgern, wie sich die Dichte  $s_{\alpha,\beta}$  einer Standard-stabilen Verteilung  $S_{\alpha,\beta}$  asymptotisch verhält.

### 1.3.14 Folgerung.

Ist die Zufallsgröße  $X$   $S_{\alpha,\beta}$ -verteilt und  $\alpha \in (0, 2)$ , dann gilt für  $r \rightarrow \infty$

$$(1.19) \quad s_{\alpha,\beta}(r) \sim \alpha C_\alpha \frac{1+\beta}{2} r^{-\alpha-1},$$

$$s_{\alpha,\beta}(-r) \sim \alpha C_\alpha \frac{1-\beta}{2} r^{-\alpha-1}$$

mit

$$C_\alpha = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} & \text{für } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} & \text{für } \alpha = 1. \end{cases}$$

*Beweis.* Die asymptotische Gestalt der Dichte folgt leicht aus Satz 1.3.13.  $\square$

An der Gestalt (1.19) lässt sich gut erkennen, dass  $\beta$  für das Symmetrieverhalten der Verteilung verantwortlich ist und dass  $\alpha$  bestimmt, wie schnell die Dichten abfallen.

Im Kapitel 2 wird uns noch eine weitere Verteilung begegnen, die wir bisher noch nicht kennengelernt haben. Da sie eine Variation der Standardstabilen Verteilung ist, ist dies die passende Stelle, um die *inverse Standardstabile Verteilung*  $H_\alpha$  für  $\alpha \in (0, 1)$  einzuführen:

$$(1.20) \quad H_\alpha(r) = \begin{cases} 1 - S_{\alpha,1}(r^{-1/\alpha}) & \text{für } r > 0, \\ 0 & \text{für } r \leq 0. \end{cases}$$

Der Beiname „inverse“ ist sehr treffend, denn es gilt:

*Ist die Zufallsgröße  $X$   $S_{\alpha,1}$ -verteilt mit  $\alpha \in (0, 1)$ , so besitzt die Zufallsgröße  $X^{-\alpha}$  die Verteilung  $H_\alpha$ .*

Diese Aussage lässt sich leicht verifizieren: Wir betrachten dazu eine Zufallsgröße  $X$  mit  $X \sim S_{\alpha,1}$ . Dann gilt für  $r > 0$

$$H_\alpha(r) = 1 - S_{\alpha,1}(r^{-1/\alpha}) = \mathbb{P}(X > r^{-1/\alpha}) = \mathbb{P}(X^{-\alpha} \leq r).$$

## 1.4 Anziehungsbereiche

### 1.4.1 Definition (vgl. [Fe2], VI.1, Definition 2).

Die Verteilung  $R$  der unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , liegt im Anziehungsbereich einer (nichtdegenerierten) Verteilung  $F$ , wenn es Konstanten  $a_n > 0$  und  $b_n \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$a_n^{-1} S_n - b_n \xrightarrow{d} F.$$

Aus dieser Definition lässt sich folgern, dass eine Verteilung  $F$  genau dann einen nichtleeren Anziehungsbereich besitzt, wenn sie stabil ist, und dass jede stabile Verteilung in ihrem eigenen Anziehungsbereich liegt. Die Rückrichtung der ersten Aussage und die zweite Aussage sind klar, aber die Hinrichtung der ersten Aussage werden wir kurz begründen:

Ist  $F$  eine Verteilung mit nichtleerem Anziehungsbereich, so wissen wir, dass  $F$  nichtdegeneriert ist und Konstanten  $a_n > 0$  und  $b_n \in \mathbb{R}$  existieren, so dass  $a_n^{-1}S_n - b_n \xrightarrow{d} F$  gilt. Für ein festes  $m \in \mathbb{N}$  gilt daher

$$(1.21) \quad a_{nm}^{-1}S_{nm} - b_{nm} \xrightarrow{d} F.$$

Es seien nun  $S_n^{(i)}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , unabhängige Kopien von  $S_n$ . Dann konvergiert  $\sum_{k=1}^m (a_n^{-1}S_n^{(k)} - b_n)$  in Verteilung gegen  $F^{*(m)}$ , woraus sich

$$(1.22) \quad a_n^{-1}S_{nm} - mb_n \xrightarrow{d} F^{*(m)}$$

folgern lässt. Auf die Gleichungen (1.21) und (1.22) können wir nun Lemma A.1.6 anwenden und erhalten

$$\frac{a_{nm}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{a}_m \neq 0, \quad \frac{a_{nm}b_{nm} - a_n mb_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{b}_m$$

und  $F^{*(m)}(\hat{a}_m x + \hat{b}_m) = F(x)$  für  $x \in \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(F^{*(m)})$ , woraus wir schließen können, dass  $(\hat{a}_m)^{-1}(S_m - \hat{b}_m)$  in Verteilung gegen  $X_1$  konvergiert. Anders formuliert, haben wir Konstanten  $\hat{a}_m > 0$  und  $\hat{\beta}_m := (\hat{a}_m)^{-1}\hat{b}_m \in \mathbb{R}$  gefunden, so dass

$$S_m \stackrel{d}{=} \hat{a}_m X_1 + \hat{\beta}_m$$

gilt.

#### 1.4.2 Satz (vgl. [Br], 9.11, Theorem 9.34).

$R$  liegt genau dann im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung mit charakteristischem Exponenten  $\alpha < 2$ , wenn es Konstanten  $M^+, M^- \geq 0$  mit  $M^+ + M^- > 0$  gibt, so dass die folgenden Bedingungen gelten:

$$(1.23) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{R(-y)}{1 - R(y)} = \frac{M^-}{M^+};$$

und für jedes  $\xi > 0$  gilt:

$$(1.24) \quad \text{Ist } M^+ > 0, \quad \text{so ist } \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1 - R(\xi y)}{1 - R(y)} = \xi^{-\alpha};$$

$$\text{ist } M^- > 0, \quad \text{so ist } \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{R(-\xi y)}{R(-y)} = \xi^{-\alpha}.$$

*Beweis.* Wir verzichten auf den Beweis der Notwendigkeit, da diese Richtung der Aussage in dieser Arbeit nicht benötigt wird. Wir zeigen nur, dass die im Satz angegebenen Bedingungen hinreichend dafür sind, dass  $F$  im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung mit charakteristischem Exponenten  $\alpha < 2$  liegt: Dazu nehmen wir o.B.d.A. an, dass  $M^- > 0$  gilt.

*Behauptung: Es existiert eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  positiver Konstanten mit*

$$nR(-a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M^-.$$

Wegen  $\lim_{y \rightarrow \infty} R(-\xi y)/R(-y) = \xi^{-\alpha}$  für  $\xi > 0$  ist  $R(-x) > 0$  für alle  $x \geq x_0$ ,  $x_0$  hinreichend groß. Weil  $R$  wachsend ist, gilt sogar für alle  $x$   $R(-x) > 0$ . Für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  wählen wir  $a_n$  so, dass die Bedingungen

- (i)  $nR(-a_n) \geq M^-$  und
- (ii)  $nR(-(a_n + \varepsilon)) \leq M^-$  für alle  $\varepsilon > 0$

gelten. Zunächst zeigen wir, dass man die  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so wählen kann. Dazu sei  $n_0 \in \mathbb{N}$  fest und so groß, dass  $n_0 R(0) \geq M^-$  gilt, und es sei für  $n \geq n_0$

$$a_n := \sup \left\{ x \geq 0 : R(-x) \geq \frac{M^-}{n} \right\}.$$

Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von  $R$  gilt dann:  $nR(-a_n) \geq M^-$ . Nach der Definition von  $a_n$  gilt weiter:  $nR(-(a_n + \varepsilon)) < M^-$  für jedes  $\varepsilon > 0$ , d.h.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  leistet das Verlangte. Für diese Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt dann:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} nR(-a_n) \geq M^-.$$

Wäre  $\limsup_{n \rightarrow \infty} nR(-a_n) \geq M^-(1 + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , so gäbe es eine Teilfolge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{R(-(a_{n_k} + \varepsilon))}{R(-a_{n_k})} < \frac{M^-}{M^-(1 + \delta)} = \frac{1}{1 + \delta} \in (0, 1)$$

gilt. Weil aber

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{R(-(a_{n_k} + \varepsilon))}{R(-a_{n_k})} \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{R(-a_{n_k} \xi)}{R(-a_{n_k})} = \xi^{-\alpha} \text{ für alle } \xi > 1$$

ist, gilt andererseits

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{R(-(a_{n_k} + \varepsilon))}{R(-a_{n_k})} \geq 1.$$

Wir haben also einen Widerspruch erzeugt und können daher folgern, dass  $\limsup_{n \rightarrow \infty} nR(-a_n) \leq M^-$  ist. Also gilt:

$$(1.25) \quad nR(-a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M^-.$$

Sei nun  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge positiver Zahlen, die Gleichung (1.25) erfüllt. (Dann gilt notwendigerweise  $a_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .) Für jedes  $x > 0$  erhält man dann unter Benutzung von (1.24) und (1.25):

$$nR(-a_n x) = nR(-a_n) \frac{R(-a_n x)}{R(-a_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M^- x^{-\alpha}.$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} n(1 - R(a_n x)) &= nR(-a_n) \frac{1 - R(a_n)}{R(-a_n)} \frac{1 - R(a_n x)}{1 - R(a_n)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} M^- \frac{M^+}{M^-} x^{-\alpha} = M^+ x^{-\alpha}, \end{aligned}$$

wobei zusätzlich zu (1.24) und (1.25) noch (1.23) verwendet wurde. Sei  $\mu_n := n \mathbb{P}(a_n^{-1} X_1 \in \cdot)$ , d.h.  $\mu_n((-\infty, x]) = nR(a_n x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$(1.26) \quad \mu_n((x, \infty)) = n(1 - R(a_n x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M^+ x^{-\alpha} \quad (x > 0),$$

$$(1.27) \quad \mu_n((-\infty, x]) = nR(a_n x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M^- |x|^{-\alpha} \quad (x < 0),$$

woraus wir folgern können, dass die Folge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  straff ist. Dann ist auch die Folge  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definiert durch

$$\gamma_n(dx) := \frac{x^2}{1 + x^2} \mu_n(dx) \leq \mu_n(dx), \quad n \in \mathbb{N},$$

straff.

Sei  $\phi_n$  die Fourier-Transformierte von  $a_n^{-1} S_n$ . Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass  $a_1 = 1$  ist. Dann folgt:

$$\phi_n(t) = \mathbb{E} e^{it a_n^{-1} S_n} = (\phi_1(t a_n^{-1}))^n.$$

Hier gilt  $a_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  und außerdem  $|\phi_1(t) - 1| < 1/2$  für alle  $t \in [-\delta, \delta]$  ( $\delta$  hinreichend klein), wodurch wir folgende Aussage erhalten:  $|\phi_1(t a_n^{-1}) - 1| < 1/2$  für alle  $t \in [-a_n \delta, a_n \delta]$ .

Aus der Funktionentheorie ist die Existenz eines eindeutig bestimmten, stetigen Logarithmus  $\psi_1$  von  $\phi_1$  auf  $[-\delta, \delta]$  mit  $\psi_1(0) = 0$  bekannt, d.h., es gilt  $\exp(\psi_1(t)) = \phi_1(t)$  für alle  $t \in [-\delta, \delta]$ . Analog ist  $\phi_n$  auf  $[-a_n \delta, a_n \delta]$  nullstellenfrei und besitzt einen eindeutig bestimmten, stetigen Logarithmus  $\psi_n$  mit  $\psi_n(0) = 0$ .

Daher können wir folgern, dass

$$\exp(\psi_n(t)) = \phi_n(t) = (\phi_1(t a_n^{-1}))^n = (\exp(\psi_1(t a_n^{-1}))^n = \exp(n \psi_1(t a_n^{-1}))$$

für  $t \in [-a_n \delta, a_n \delta]$  und damit

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= n \psi_1(t a_n^{-1}) \\ (1.28) \quad &= n \frac{\psi_1(t a_n^{-1})}{\phi_1(t a_n^{-1}) - 1} (\phi_1(t a_n^{-1}) - 1) \\ &= \frac{\log(1 - (1 - \phi_1(t a_n^{-1})))}{\phi_1(t a_n^{-1}) - 1} n (\phi_1(t a_n^{-1}) - 1) \end{aligned}$$

für  $t \in [-a_n\delta, a_n\delta]$  gilt, wobei wir mit  $\log$  den Hauptzweig des komplexen Logarithmus bezeichnen. Weil  $\log(1-z) \sim -z$  ( $z \rightarrow 0$ ) ist und  $1 - \phi_1(ta_n^{-1})$  für  $n \rightarrow \infty$  kompakt gleichmäßig gegen 0 konvergiert, gilt für  $t \in [-a_n\delta, a_n\delta]$ :

$$\frac{\log(1 - (1 - \phi_1(ta_n^{-1})))}{\phi_1(ta_n^{-1}) - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ kp. glm.}$$

Definieren wir

$$1 + \varepsilon_n(t) := \frac{\log(1 - (1 - \phi_1(ta_n^{-1})))}{\phi_1(ta_n^{-1}) - 1},$$

so gilt  $\varepsilon_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  kp. glm. und wir können zusammenfassend schreiben:

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= (1 + \varepsilon_n(t)) n (\phi_1(ta_n^{-1}) - 1) \\ &= (1 + \varepsilon_n(t)) n \int (e^{ita_n^{-1}x} - 1) R(dx) \\ &= (1 + \varepsilon_n(t)) \int (e^{itx} - 1) \mu_n(dx) \\ &= (1 + \varepsilon_n(t)) \left( \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \gamma_n(dx) \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{itx}{1+x^2} \mu_n(dx) \right). \end{aligned}$$

Seien

$$(1.29) \quad b_n := \int \frac{x}{1+x^2} \mu_n(dx),$$

$$\varphi(x, t) := \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}, \quad x \neq 0,$$

und  $\varphi(0, t) := -t^2/2$ , so ist  $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2)$  und wir erhalten die Darstellung

$$(1.30) \quad \psi_n(t) = (1 + \varepsilon_n(t)) \int \varphi(x, t) \gamma_n(dx) + (1 + \varepsilon_n(t)) i b_n t.$$

Im Folgenden zeigen wir, dass die Folge  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  schwach konvergiert: Dazu seien  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  beliebig und  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt:

$$\int f(x) \gamma_n(dx) = \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} f(x) \gamma_n(dx) + \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c} f(x) \gamma_n(dx).$$

Definieren wir

$$g(x) := f(x) \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(1.31) \quad \mu(dx) := \alpha M^+ \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \frac{\lambda(dx)}{x^{\alpha+1}} + \alpha M^- \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(x) \frac{\lambda(dx)}{|x|^{\alpha+1}}$$

und

$$\gamma(dx) := \frac{x^2}{1+x^2} \mu(dx),$$

so lässt sich folgern:

$$\begin{aligned} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c} f(x) \gamma_n(dx) &= \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c} g(x) \mu_n(dx) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha M^+ \int_{\varepsilon}^{\infty} g(x) x^{-(\alpha+1)} dx + \alpha M^- \int_{-\infty}^{-\varepsilon} g(x) |x|^{-(\alpha+1)} dx \\ &= \alpha \left( M^+ \int_0^{\infty} g(x) x^{-(\alpha+1)} dx + M^- \int_{-\infty}^0 g(x) |x|^{-(\alpha+1)} dx \right) + \delta_1(\varepsilon) \\ &= \int f(x) \gamma(dx) + \delta_1(\varepsilon) \end{aligned}$$

mit  $|\delta_1(\varepsilon)| := C \left( \int_0^{\varepsilon} g(x) x^{-(\alpha+1)} dx + \int_{-\varepsilon}^0 g(x) |x|^{-(\alpha+1)} dx \right)$  ( $C > 0$  geeignet).  $\delta_1(\varepsilon)$  können wir weiter abschätzen, wobei wir benutzen, dass  $\alpha < 2$  ist:

$$\begin{aligned} \delta_1(\varepsilon) &\leq C \left( \int_0^{\varepsilon} f(x) x^2 x^{-(\alpha+1)} dx + \int_{-\varepsilon}^0 f(x) x^2 |x|^{-(\alpha+1)} dx \right) \\ &= C \left( \int_0^{\varepsilon} f(x) x^{-\alpha+1} dx + \int_{-\varepsilon}^0 f(x) |x|^{-\alpha+1} dx \right) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Für unsere nächste Abschätzung benötigen wir das folgende Lemma, dessen Beweis wir im Anschluss nachholen werden:

**1.4.3 Lemma (vgl. [Br], 9.11, Proposition 9.35).**

Für jedes  $1 \leq p \leq 2$  und  $\alpha \in (0, p)$  gibt es ein  $0 < c < \infty$ , so dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} |x|^p \mu_n(dx) \leq pc(M^+ + M^-) \varepsilon^{p-\alpha} =: \delta_2(\varepsilon)$$

gilt.

Damit erhalten wir die angekündigte Abschätzung:

$$\begin{aligned} &\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int f(x) \gamma_n(dx) - \int f(x) \gamma(dx) \right| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c} f(x) \gamma_n(dx) - \int f(x) \gamma(dx) \right| \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} |f(x)| \gamma_n(dx) \\ &\leq \delta_1(\varepsilon) + \|f\| \underbrace{\int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} |x|^2 \mu_n(dx)}_{\leq \delta_2(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0, \end{aligned}$$

aus der  $\gamma_n \xrightarrow{w} \gamma$  folgt. Weil wir bereits gezeigt haben, dass  $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2)$  ist, können wir folgern, dass  $\int \varphi(x, t) \gamma_n(dx)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\int \varphi(x, t) \gamma(dx)$  konvergiert.

Die charakteristische Funktion von  $a_n^{-1}S_n - b_n$  ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{it(a_n^{-1}S_n - b_n)} &= e^{-ib_nt} \phi_n(t) = e^{-ib_nt} \exp(\psi_n(t)) \\ &= \exp\left(-ib_nt + (1 + \varepsilon_n(t)) \int \varphi(x, t) \gamma_n(dx) + (1 + \varepsilon_n(t))ib_nt\right) \\ &= \exp\left(\varepsilon_n(t)ib_nt + (1 + \varepsilon_n(t)) \int \varphi(x, t) \gamma_n(dx)\right). \end{aligned}$$

Deshalb genügt es zu zeigen, dass  $\varepsilon_n(t)b_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert, um zu erhalten, dass

$$(1.32) \quad a_n^{-1}S_n - b_n \xrightarrow{d} X,$$

wobei  $X$  die Fourier-Transformierte  $\exp(\int \varphi(x, t) \gamma(dx))$  hat. Zeigen wir also  $\varepsilon_n(t)b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ :

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n(t)| &= \left| \frac{\log(1 - (1 - \phi_1(ta_n^{-1})))}{\phi_1(ta_n^{-1}) - 1} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{\log(1 - (1 - \phi_1(ta_n^{-1}))) + (1 - \phi_1(ta_n^{-1}))}{\phi_1(ta_n^{-1}) - 1} \right| \\ &= \left| (\phi_1(ta_n^{-1}) - 1)^{-1} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{k} (1 - \phi_1(ta_n^{-1}))^k \right| \\ &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} (1 - \phi_1(ta_n^{-1}))^{k-1} \right| \\ &\leq |1 - \phi_1(ta_n^{-1})| \end{aligned}$$

für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$ . Vergleichen wir die Gleichungen (1.28) und (1.30) miteinander, so sehen wir, dass

$$|\phi_1(ta_n^{-1}) - 1| = \frac{1}{n} \left| \int \varphi(x, t) \gamma_n(dx) + itb_n \right|$$

gilt, und können zusammen mit der obigen Ungleichung folgern:

$$|\varepsilon_n(t)b_n| \leq |(\phi_1(ta_n^{-1}) - 1)b_n| \leq \left| \frac{b_n}{n} \int \varphi(x, t) \gamma_n(dx) \right| + |t| \frac{b_n^2}{n}.$$

Nun müssen wir nur noch zeigen, dass  $b_n^2/n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert: Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Weil

$$\begin{aligned} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c} \frac{x}{1+x^2} \mu_n(dx) &\leq \mu_n((-\infty, -\varepsilon]) + \mu_n([\varepsilon, \infty)) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M^- |\varepsilon|^{-\alpha} + M^+ \varepsilon^{-\alpha} \end{aligned}$$



gilt, können wir mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgern:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{n} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{x}{1+x^2} \mu_n(dx) \right)^2 \\
&\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c} \frac{x}{1+x^2} \mu_n(dx) \right)^2 \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{x}{1+x^2} \mu_n(dx) \right)^2 \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} |x| \mu_n(dx) \right)^2 \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mu_n(-\varepsilon, \varepsilon) \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} |x|^2 \mu_n(dx) \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} |x|^2 \mu_n(dx).
\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.4.3 gilt:  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} |x|^2 \mu_n(dx) \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \downarrow 0$ .  $\square$

*Beweis von Lemma 1.4.3.* Wir definieren für  $x \geq 0$

$$I(x) := \int_0^x y^{p-1} R(-y) dy$$

mit  $1 \leq p \leq 2$ . Weil  $p > \alpha$  ist, gilt:  $I(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Wir zeigen zunächst, dass es eine Konstante  $c$  gibt, so dass  $I(x) \leq cx^p R(-x)$  für alle hinreichend großen  $x$  ist: Für  $t > \tau$  ist

$$(1.33) \quad I(tx) = I(\tau x) + x^p \int_{\tau}^t \xi^{p-1} R(-x\xi) d\xi.$$

Sei  $x > 1$  fest gewählt und für gegebenes  $\varepsilon > 0$  sei  $\tau$  so groß, dass für  $\xi > \tau$

$$\frac{R(-x\xi)}{R(-\xi)} \geq (1-\varepsilon)x^{-\alpha}$$

gilt. Aus Gleichung (1.33) folgt dann:

$$\begin{aligned}
I(tx) &\geq I(\tau x) + x^{p-\alpha}(1-\varepsilon) \int_{\tau}^t \xi^{p-1} R(-\xi) d\xi \\
&= I(\tau x) + x^{p-\alpha}(1-\varepsilon)(I(t) - I(\tau))
\end{aligned}$$

und weiter:

$$\frac{I(tx)}{I(t)} \geq \frac{I(\tau x)}{I(t)} + x^{p-\alpha}(1-\varepsilon) - \frac{x^{p-\alpha}(1-\varepsilon)I(\tau)}{I(t)}.$$

Da der erste und der dritte Summand der rechten Seite für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergieren, erhalten wir:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I(tx)}{I(t)} \geq x^{p-\alpha}(1 - \varepsilon).$$

Diese Ungleichung gilt für alle  $\varepsilon > 0$ , weil sie unabhängig von  $\tau$  ist. Daher können wir  $\varepsilon \downarrow 0$  gehen lassen:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I(tx)}{I(t)} \geq x^{p-\alpha}.$$

Setzen wir nun in (1.33)  $\tau = 1$ , erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\frac{I(tx)}{I(x)} = 1 + \frac{x^p R(-x)}{I(x)} \int_1^t \frac{R(-x\xi)}{R(-x)} \xi^{p-1} d\xi.$$

Weil der Integrand dieses Integrals durch  $\xi^{p-1}$  beschränkt ist, gilt für  $t > 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{I(tx)}{I(x)} &\leq 1 + \frac{x^p R(-x)}{I(x)} \int_1^t \xi^{p-1} d\xi \\ &\leq 1 + \frac{x^p R(-x)}{I(x)} t^p. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Limes inferior, dann erhalten wir:

$$t^{p-\alpha} \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{I(tx)}{I(x)} \leq 1 + t^p \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p R(-x)}{I(x)},$$

woraus wir für hinreichend großes  $x$  folgern können, dass

$$I(x) \leq C \frac{t^p}{t^{p-\alpha} - 1} x^p R(-x)$$

mit einer geeigneten Konstante  $C$  gilt. Daher haben wir mit  $c = Ct^p / (t^{p-\alpha} - 1)$  eine Konstante gefunden haben, so dass  $I(x) \leq cx^p R(-x)$  für hinreichend großes  $x$  gilt.

Setzen wir in Satz 19.13 aus [A]  $\varphi(x) := x^p$  und  $f(x) = -x$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{(-\varepsilon, 0]} |x|^p \mu_n(dx) &= p \int_0^\infty t^{p-1} \mu_n((-\infty, -t) \cap (-\varepsilon, 0]) dt \\ &\leq np \int_0^\varepsilon t^{p-1} R(-a_n t) dt \\ &\leq \frac{np}{a_n^p} \int_{[0, a_n \varepsilon)} y^{p-1} R(-y) dy \\ &= \frac{np}{a_n^p} I(a_n \varepsilon) \leq npc \varepsilon^p R(-a_n \varepsilon) \end{aligned}$$

für hinreichend große  $n$ . Aus dieser Ungleichung wird mit Hilfe von (1.27) endlich:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{(-\varepsilon, 0]} |x|^p \mu_n(dx) \leq pcM^{-\varepsilon^{p-\alpha}}.$$

Der Schluss für das Integral  $\int_{(0, \varepsilon)} x^p \mu_n(dx)$  verläuft mit  $1 - R(x)$  anstelle von  $R(-x)$  analog.  $\square$



## Kapitel 2

# Random Walks in stetiger Zeit

In diesem Kapitel, das auf dem Artikel „Asymptotic Distributions of Continuous-Time Random Walks“ von Marcin Kotulski (vgl. [Ko]) basiert, werden wir Random Walks in stetiger Zeit in unterschiedlichen Situationen betrachten und einige Grenzwertsätze angeben. Den ersten Abschnitt nutzen wir, um den Random Walk in stetiger Zeit einzuführen. Außerdem stellen wir hier einige Voraussetzungen auf, die für die Formulierung der Grenzwertsätze notwendig sind. Im folgenden Abschnitt 2.2 knüpfen wir eine Verbindung zum vorherigen Kapitel 1, indem wir die Anziehungsbereiche der Verteilungen betrachten, die einen Random Walk in stetiger Zeit bestimmen. Der dritte und letzte Abschnitt dieses Kapitels bildet das Ziel unserer Bemühungen. Dort werden wir die angekündigten Grenzwertsätze formulieren und auch beweisen.

### 2.1 Modellierung<sup>1</sup>

Man betrachtet die stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvektoren  $(R_1, T_1), (R_2, T_2), \dots$  und setzt  $R_0 = T_0 = 0$ . Dabei bezeichnet  $R_i, i \in \mathbb{N}$ , die reellwertige Sprunghöhe eines Teilchen nach einem positiven Wartezeitintervall  $T_i, i \in \mathbb{N}$ . Daraus ergibt sich eine weitere Zufallsvariable:

$$(2.1) \quad N_t = \max \left\{ k : \sum_{i=0}^k T_i \leq t \right\}$$

ist die Anzahl der Sprünge im Zeitintervall  $[0, t]$ . *Random Walk in stetiger Zeit* (im Folgenden kurz mit CTRW für continuous-time random walk

---

<sup>1</sup>Vgl. [Ko], 2.1, 779/780.

bezeichnet) heißt der stochastische Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$ , der definiert ist durch

$$(2.2) \quad X_t = \sum_{i=0}^{N_t} R_i.$$

Anschaulich beschreibt  $X_t$  die Position eines Teilchens zum Zeitpunkt  $t$ .

In diesem Modell lassen sich zwei Arten von CTRW unterscheiden, der sogenannte *ungekoppelte CTRW* (engl.: decoupled), bei dem  $R_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  unabhängig von  $T_i$  ist, und der *gekoppelte CTRW* (engl.: coupled), bei dem  $R_i$  und  $T_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  voneinander abhängig sind.

Die Paare  $(R_i, T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sind identisch verteilt und besitzen eine gemeinsame Verteilung auf  $\mathbb{R}^2$ . Für die zugehörigen Randverteilungen  $F$  und  $G$ , die auf  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{R}_0^+$  leben, setzen wir für das gesamte zweite Kapitel Folgendes voraus: Ist  $\mathbb{E} R_1^2 = \infty$ , so gebe es Konstanten  $b > 0$ ,  $\beta \in [-1, 1]$  und  $0 < \alpha < 2$  mit

$$(2.3) \quad F(-r) \sim b \frac{1-\beta}{2\alpha} r^{-\alpha} \text{ und } 1 - F(r) \sim b \frac{1+\beta}{2\alpha} r^{-\alpha} \quad (r \rightarrow \infty).$$

Dabei wird die Konstante  $b$  *Größenkoeffizient von  $F$*  genannt. Im Fall  $\alpha = 1$  nehmen wir zusätzlich an, dass  $F$  symmetrisch ist, was insbesondere  $\beta = 0$  impliziert. Diese Zusatzvoraussetzung benötigen wir, um auf Seite 47 die Konstanten  $a_n$  und  $b_n$  bestimmen zu können. Ist  $\mathbb{E} R_1^2 < \infty$ , so setzen wir

$$(2.4) \quad \alpha = 2 \text{ und } \beta = 0.$$

Für die Verteilungsfunktion von  $G$  setzen wir voraus: Ist  $\mathbb{E} T_1^2 = \infty$ , so gebe es Konstanten  $b' > 0$  und  $0 < \alpha' < 2$  mit

$$(2.5) \quad 1 - G(t) \sim \frac{b'}{\alpha'} t^{-\alpha'} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Die Konstante  $b'$  wird analog *Größenkoeffizient von  $G$*  genannt. Für  $\mathbb{E} T_1^2 < \infty$  sei  $\alpha' = 2$ .

Nimmt man beispielsweise an, dass das Paar  $(R_1, T_1)$  eine gemeinsame, zweidimensionale Lebesguedichte  $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  besitzt, mit deren Hilfe die Wahrscheinlichkeitsdichten  $f$  von  $R_1$  und  $g$  von  $T_1$  beschrieben werden können:

$$f(r) = \int_0^\infty \psi(r, t) dt, \quad g(t) = \int_{-\infty}^\infty \psi(r, t) dr,$$

und nimmt man außerdem an, dass

$$f(-r) \sim b \frac{1-\beta}{2} r^{-\alpha-1} \text{ und } f(r) \sim b \frac{1+\beta}{2} r^{-\alpha-1} \quad (r \rightarrow \infty)$$

für  $0 < \alpha < 2$  gilt, dann sind unsere Voraussetzungen erfüllt. Dies wollen wir kurz begründen: Weil  $L_+(r) := f(r)/r^{-\alpha-1}$  für  $r \rightarrow \infty$  gegen  $b(1+\beta)/2$

konvergiert, ist  $L_+$  insbesondere langsam variierend (vgl. Definition A.2.1) und es gilt:

$$(2.6) \quad f(r) = r^{-\alpha-1} L_+(r)$$

mit einer langsam variierenden Funktion  $L_+$  und  $0 < \alpha < 2$ . Daraus ergibt sich nun:

$$1 - F(y) = \int_y^\infty f(r) dr \stackrel{(2.6)}{=} \int_y^\infty L_+(r) r^{-\alpha-1} dr \stackrel{A.2.2}{\sim} \frac{y^{-\alpha} L_+(y)}{\alpha} \quad (y \rightarrow \infty).$$

Analoge Rechnungen lassen sich für  $F(-y)$  und  $1 - G(y)$  durchführen.

Im Weiteren benötigen wir noch folgende Bezeichnungen:

$$\mu := \mathbb{E} R_1, \quad \tau := \mathbb{E} T_1,$$

falls  $\mu, \tau$  existieren; d.h. falls  $\alpha > 1$  bzw.  $\alpha' > 1$  ist.

## 2.2 Im Anziehungsbereich einer Standard-stabilen Verteilung

Als nächstes untersuchen wir, im Anziehungsbereich welcher stabilen Verteilung  $F$  bzw.  $G$  liegt. Dazu benötigen wir das folgende Lemma:

### 2.2.1 Lemma.

*Die Verteilung  $F$  liege im Anziehungsbereich einer Verteilung  $R$ . Dann gilt:  $F$  liegt genau dann im Anziehungsbereich der Verteilung  $Q$ , wenn  $Q$  aus  $R$  durch Skalierung und Verschiebung hervorgeht.*

*Beweis.* Dass  $F$  im Anziehungsbereich von  $Q$  liegt, wenn  $Q$  aus  $R$  durch Skalierung und Verschiebung hervorgeht, ist leicht zu verifizieren. Die umgekehrte Aussage folgt direkt aus Lemma A.1.6.  $\square$

### 2.2.2 Satz (vgl. [Ko], 2.2, 781).

*Die Verteilung  $F$  der Zufallsgrößen  $R_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , liegt im Anziehungsbereich der Standard-stabilen Verteilung  $S_{\alpha,\beta}$  mit  $0 < \alpha \leq 2$  und  $-1 \leq \beta \leq 1$ .*

*Beweis.* Betrachten wir zunächst den Fall, dass  $\mathbb{E} R_1^2 < \infty$  ist. Nach Gleichung (2.4) ist das der Fall, in dem  $\alpha = 2$  und  $\beta = 0$  gilt. Dann folgt sofort mit dem zentralen Grenzwertsatz, dass  $F$  zum Anziehungsbereich einer Normalverteilung gehört. Wenden wir hier Lemma 2.2.1 an, können wir folgern, dass  $F$  auch im Anziehungsbereich der  $\mathfrak{N}(0,2)$ -Verteilung liegt. Aufgrund von Bemerkung 1.3.1 wissen wir, dass die  $\mathfrak{N}(0,2)$ -Verteilung gleich der  $S_{2,0}$ -Verteilung ist.

Ist  $\mathbb{E} R_1^2 = \infty$ , so befinden wir uns in dem Fall, dass  $0 < \alpha < 2$  und  $\beta \in [-1, 1]$  gilt. Hier wissen wir (vgl. Gleichung (2.3)), dass

$$F(-r) \sim b \frac{1-\beta}{2\alpha} r^{-\alpha} \quad \text{und} \quad 1 - F(r) \sim b \frac{1+\beta}{2\alpha} r^{-\alpha}$$

für  $r \rightarrow \infty$  gelten. Um nun zu zeigen, dass  $F$  im Anziehungsbereich der Standard-stabilen Verteilung  $S_{\alpha,\beta}$  mit  $0 < \alpha \leq 2$  und  $-1 \leq \beta \leq 1$  liegt, möchten wir Satz 1.4.2 anwenden. Prüfen wir also die Bedingungen des Satzes nach: Setzen wir  $M^- := b(1 - \beta)/(2\alpha)$  und  $M^+ := b(1 + \beta)/(2\alpha)$ , so ist (1.23) erfüllt, denn:

$$\frac{F(-y)}{1 - F(y)} \sim \frac{b(1 - \beta)y^{-\alpha}}{2\alpha} \frac{2\alpha}{b(1 + \beta)y^{-\alpha}} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta},$$

wobei wir im Fall  $\beta = -1$  für  $(1 - \beta)/(1 + \beta)$  unendlich setzen. Sei  $\xi > 0$ . Dann gilt für  $r \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1 - F(\xi y)}{1 - F(y)} \sim \frac{b(1 + \beta)(\xi y)^{-\alpha}}{2\alpha} \frac{2\alpha}{b(1 + \beta)y^{-\alpha}} = \frac{1}{\xi^\alpha}, \text{ falls } \beta \neq -1 \text{ ist,}$$

und ebenso

$$\frac{F(-\xi y)}{F(-y)} \sim \frac{b(1 - \beta)(\xi y)^{-\alpha}}{2\alpha} \frac{2\alpha}{b(1 - \beta)y^{-\alpha}} = \frac{1}{\xi^\alpha}, \text{ falls } \beta \neq 1 \text{ ist.}$$

Demnach sind alle Bedingungen des Satzes 1.4.2 erfüllt und wir haben gezeigt, dass  $F$  im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  mit  $0 < \alpha < 2$  liegt. Mit Lemma 2.2.1 erhalten wir die Behauptung, dass  $F$  zum Anziehungsbereich der  $S_{\alpha,\beta}$ -Verteilung gehört für  $\alpha \in (0, 2)$ .  $\square$

### 2.2.3 Satz (vgl. [Ko], 2.2, 782).

Die Verteilung  $G$  der Zufallsgrößen  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , liegt im Anziehungsbereich der Standard-stabilen Verteilung  $S_{\alpha',1}$ , wenn  $0 < \alpha' < 2$  gilt, und gehört für  $\alpha' = 2$  zum Anziehungsbereich der  $\mathfrak{N}(0, 2)$ -Verteilung.

*Beweis.* Völlig analog zum Beweis von Satz 2.2.2.  $\square$

Wir wissen nun, dass  $F$  im Anziehungsbereich der Standard-stabilen Verteilung  $S_{\alpha,\beta}$  mit  $0 < \alpha \leq 2$  und  $-1 \leq \beta \leq 1$  liegt, d.h. nach Definition 1.4.1 gibt es Konstanten  $a_n > 0$  und  $b_n \in \mathbb{R}$ , so dass  $a_n^{-1}S_n - b_n$  in Verteilung gegen  $S_{\alpha,\beta}$  konvergiert. Für unsere weiteren Untersuchungen ist es notwendig, die genaue Gestalt der Konstanten  $a_n$  und  $b_n$  zu kennen. Dazu sehen wir uns den Beweis von Satz 1.4.2 noch einmal etwas genauer an: Dort haben wir herausgefunden, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beliebig gewählt werden kann, wenn  $nF(-a_n) \rightarrow M^-$  oder  $n(1 - F(a_n)) \rightarrow M^+$  gilt. Weil  $nF(-n^{1/\alpha}) \rightarrow b(1 - \beta)/(2\alpha) =: M^-$  und  $n(1 - F(n^{1/\alpha})) \rightarrow b(1 + \beta)/(2\alpha) =: M^+$  gelten, können wir zunächst  $a_n = n^{1/\alpha}$  setzen. Weiterhin wissen wir (vgl. (1.32)), dass dann  $a_n^{-1}S_n - b_n$  mit  $b_n = \int x/(1 + x^2) \mu_n(dx)$  in Verteilung gegen  $X$  konvergiert, wobei  $X$  die Fourier-Transformierte  $e^{\psi_X}$  mit

$$\begin{aligned} \psi_X(t) = \int \varphi(x, t) \gamma(dx) &= \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1 + x^2} \right) \frac{1 + x^2}{x^2} \gamma(dx) \\ &= \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1 + x^2} \right) \mu(dx) \end{aligned}$$



besitzt. Da wir aus (1.31) die Gestalt von  $\mu$  kennen, können wir weiter folgern:

$$\begin{aligned}\psi_X(t) &= \alpha M^+ \int_0^\infty \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x^{\alpha+1}} \\ &\quad + \alpha M^- \int_{-\infty}^0 \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

Dies ist gerade die Gestalt aus Satz 1.2.2 mit  $b = 0$ ,  $m_1 = \alpha M^+$  und  $m_2 = \alpha M^-$ . Satz 1.2.4 bringt uns von dieser Gestalt der Fourier-Transformierten zu der bekannten Form mit den vier eindeutig bestimmten Parametern, d.h.  $X \sim S_\alpha(\bar{\sigma}, \bar{\beta}, \bar{\mu})$ .

Im Fall  $0 < \alpha < 1$  sind dabei

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^\alpha &= -(m_1 + m_2)\Re(H(\alpha)) = -\alpha(M^+ + M^-) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \left( -\frac{1}{\alpha} \Gamma(1-\alpha) \right) \\ &= \frac{b}{\alpha C_\alpha} =: c_2^\alpha, \\ \bar{\beta} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \beta,\end{aligned}$$

und

$$\bar{\mu} = (m_1 - m_2)c = b\beta c \text{ mit } c = -\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} x^{-\alpha} dx.$$

Betrachten wir nun  $b_n$  etwas genauer:

$$\int \frac{x}{1+x^2} \mu_n(dx) = \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c} \frac{1}{x} \gamma_n(dx) + \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{x}{1+x^2} \mu_n(dx).$$

Dabei gelten:

$$\int_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c} \frac{1}{x} \gamma_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c} \frac{1}{x} \gamma(dx) = \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c} \frac{x}{1+x^2} \mu(dx)$$

und

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} \left| \frac{x}{1+x^2} \right| \mu_n(dx) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} |x| \mu_n(dx) \\ &\stackrel{1.4.3}{\leq} c(M^+ + M^-) \varepsilon^{1-\alpha} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0.\end{aligned}$$

Daraus können wir folgern, dass

$$\int \frac{x}{1+x^2} \mu_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \frac{x}{1+x^2} \mu(dx)$$

gilt, und unsere Konvergenzaussage neu formulieren:

$$n^{-1/\alpha} S_n - \int \frac{x}{1+x^2} \mu(dx) \xrightarrow{d} X \text{ mit } X \sim S_\alpha(\bar{\sigma}, \beta, \bar{\mu}).$$

Können wir nun noch zeigen, dass  $\bar{\mu} = -\int x/(1+x^2) \mu(dx)$  ist, so können wir endlich schließen, dass

$$c_2^{-1} n^{-1/\alpha} S_n \xrightarrow{d} X \text{ mit } X \sim S_\alpha(1, \beta, 0) = S_{\alpha, \beta},$$

was dann impliziert, dass im Fall  $0 < \alpha < 1$

$$(2.7) \quad a_n = c_2 n^{1/\alpha} \text{ und } b_n = 0$$

gewählt werden kann. Weisen wir nun die fehlende Behauptung nach:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2} \mu(dx) &= \alpha M^+ \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} x^{-(\alpha+1)} dx \\ &\quad + \alpha M^- \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} |x|^{-(\alpha+1)} dx \\ &= \alpha(M^+ - M^-) \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} x^{-\alpha} dx \\ &= -b\beta c = -\bar{\mu}. \end{aligned}$$

Im Fall  $1 < \alpha < 2$  sind

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^\alpha &= \frac{m_1 + m_2}{\alpha} L(\alpha - 1) \cos \frac{\pi\alpha}{2} = c_2^\alpha, \\ \bar{\beta} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \beta, \end{aligned}$$

und

$$\bar{\mu} = (m_1 - m_2)c' = b\beta c' \text{ mit } c' = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \left(1 - \frac{d}{dx} \frac{x}{1+x^2}\right) \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Wir zeigen als nächstes, dass  $b_n - n^{(1-1/\alpha)} \mu \rightarrow -\bar{\mu}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gilt, wobei wir die Konvergenzaussage aus [Br], 9.11, Problem 9, verwenden:

$$\begin{aligned} b_n - n^{(1-1/\alpha)} \mu &= b_n - n n^{-1/\alpha} \mathbb{E} R_1 = b_n - \int x \mu_n(dx) \\ &= \int \left( \frac{x}{1+x^2} - x \right) \mu_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \left( \frac{x}{1+x^2} - x \right) \mu(dx). \end{aligned}$$

Setzen wir die Definition von  $\mu$  ein und integrieren partiell, so erhalten wir

die obige Behauptung:

$$\begin{aligned}
 b_n - n^{(1-1/\alpha)}\mu &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha M^+ \int_0^\infty \left( \frac{x}{1+x^2} - x \right) x^{-(\alpha+1)} dx \\
 &\quad + \alpha M^- \int_{-\infty}^0 \left( \frac{x}{1+x^2} - x \right) |x|^{-(\alpha+1)} dx \\
 &= b\beta \int_0^\infty \left( \frac{x}{1+x^2} - x \right) x^{-(\alpha+1)} dx \\
 &= -\frac{b\beta}{\alpha} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{d}{dx} \frac{x}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x^\alpha} = -\bar{\mu}.
 \end{aligned}$$

Daraus können wir folgern, dass

$$c_2^{-1}n^{-1/\alpha}S_n - c_2^{-1}n^{(1-1/\alpha)}\mu \xrightarrow{d} X \text{ mit } X \sim S_\alpha(1, \beta, 0),$$

und haben damit im Fall  $1 < \alpha < 2$  die Gestalt von  $a_n$  und  $b_n$  gefunden:

$$(2.8) \quad a_n = c_2 n^{1/\alpha} \text{ und } b_n = c_2^{-1} n^{(1-1/\alpha)} \mu.$$

Im Fall  $\alpha = 1$  gelten:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma} &= (m_1 + m_2) \frac{\pi}{2} = b \frac{\pi}{2} = c_2, \\
 \bar{\beta} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \beta = 0,
 \end{aligned}$$

und

$$\bar{\mu} = (m_1 - m_2)c_1 = b\beta c_1 = 0,$$

da vorausgesetzt wurde, dass  $F$  im Fall  $\alpha = 1$  symmetrisch ist und damit  $\beta = 0$  gilt. Weil außerdem  $x/(1+x^2)$  ungerade ist, können wir  $b_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgern. Daher konvergiert

$$c_2^{-1}n^{-1}S_n \xrightarrow{d} S_1(1, 0, 0),$$

d.h. im Fall  $\alpha = 1$  erhalten wir:

$$(2.9) \quad a_n = c_2 n^{1/\alpha} \text{ und } b_n = 0.$$

## 2.3 Das asymptotische Verhalten von Random Walks in stetiger Zeit

Bevor wir endlich zu unserem eigentlichen Anliegen, dem Grenzverhalten von CTRWs, kommen, betrachten wir kurz den Spezialfall, dass  $T_i \equiv \tau_0$  für

alle  $i \in \mathbb{N}$  und einem  $\tau_0 \in \mathbb{R}_0^+$  ist<sup>2</sup>. Im Fall  $\tau_0 = 1$  hätten wir es dann mit einem gewöhnlichen Random Walk zu tun.

Ist  $T_i \equiv \tau_0$  f.s. für alle  $i \in \mathbb{N}$ , so lässt sich  $N_t$  genauer bestimmen:

$$N_t = \max\{k : \sum_{i=0}^k T_i \leq t\} = \max\{k : \tau_0 k \leq t\} = \lfloor t/\tau_0 \rfloor \text{ f.s.}$$

Gilt zusätzlich  $\mathbb{E} R_1^2 < \infty$ , so ist auch der Erwartungswert von  $R_1$  endlich und wir haben eine Folge  $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$  unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit Erwartungswert  $\mathbb{E} R_1 = \mu < \infty$  und Varianz  $c_1^2 := \text{Var} R_1 = \mathbb{E} R_1^2 - (\mathbb{E} R_1)^2 \in (0, \infty)$ , wobei wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $\mu = 0$  gilt, die dem zentralen Grenzwertsatz genügt:

$$\frac{\sum_{i=1}^n R_i}{c_1 n^{1/2}} \xrightarrow{d} X \text{ mit } X \sim \mathfrak{N}(0, 1).$$

Setzen wir  $n = N_t = \lfloor t/\tau_0 \rfloor$  und benutzen, dass  $R_0 = 0$  gilt, so ist

$$\frac{\sum_{i=1}^n R_i}{c_1 n^{1/2}} = \frac{\sum_{i=0}^{N_t} R_i}{c_1 N_t^{1/2}} = \frac{X_t}{c_1 \lfloor t/\tau_0 \rfloor^{1/2}}.$$

Es folgt daher:

$$\frac{X_t}{c_1 \lfloor t/\tau_0 \rfloor^{1/2}} \xrightarrow{d} X.$$

Gilt aber stattdessen  $\mathbb{E} R_1 = \infty$ , so wissen wir aus Satz 2.2.2, dass die Verteilung  $F$  von  $R_1$  im Anziehungsbereich der  $S_{\alpha, \beta}$ -Verteilung mit  $0 < \alpha < 2$  und  $\beta \in [-1, 1]$  liegt. Das heißt, es gibt Konstanten  $a_n > 0$  und  $b_n \in \mathbb{R}$ , so dass

$$a_n^{-1} \sum_{i=1}^n R_i - b_n \xrightarrow{d} S_{\alpha, \beta}.$$

Setzen wir nun wieder  $n = N_t = \lfloor t/\tau_0 \rfloor$ , so erhalten wir

$$\frac{X_t - b'_{\lfloor t/\tau_0 \rfloor}}{a_{\lfloor t/\tau_0 \rfloor}} \xrightarrow{d} S_{\alpha, \beta}$$

mit  $b'_k := a_k b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Im degenerierten Fall konvergiert also ein geeignet zentrierter und skaliertes CTRW gegen die Standardnormalverteilung, wenn das zweite Moment von  $R_1$  endlich ist, und gegen eine Standard-stabile Verteilung, wenn das zweite Moment von  $R_1$  nicht existiert.

Kehren wir nun zu der allgemeinen Situation zurück und betrachten darin zunächst den Fall, dass  $\tau$  endlich ist und  $\mu = 0$  im Fall  $1 < \alpha \leq 2$  gilt.

---

<sup>2</sup>Vgl. [Ko], 3.1, 783.

**2.3.1 Satz (vgl. [Ko], 3.1, 784).**

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein CTRW. Dann gilt im soeben beschriebenen Fall

$$(2.10) \quad \mathbb{P} \left( \frac{X_t}{(t/\tau)^{1/2} c_1} \leq r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathfrak{N}(0, 1)(r), \text{ falls } \mathbb{E} R_1^2 < \infty \text{ ist,}$$

$$(2.11) \quad \mathbb{P} \left( \frac{X_t}{(t/\tau)^{1/\alpha} c_2} \leq r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{\alpha, \beta}(r), \text{ falls } \mathbb{E} R_1^2 = \infty \text{ ist,}$$

mit  $c_1^2 = \text{Var } R_1$  und  $c_2 = (b/(\alpha C_\alpha))^{1/\alpha}$ .

*Beweis.* Wir wollen Satz A.2.4 anwenden. Dazu wählen wir eine Folge  $t_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $t_n \rightarrow \infty$  und definieren  $\mu_n$  als den Median von  $N_{t_n}$ . Dann haben wir eine Folge  $(N_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$  nichtnegativer, ganzzahliger Zufallsvariablen mit  $N_t \rightarrow \infty$  f.s. Aus Satz 2.2.2 wissen wir, dass es Konstanten  $a_n > 0$  und  $b_n \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$a_n^{-1} S_n - b_n \xrightarrow{d} X \quad \text{mit } X \sim S_{\alpha, \beta},$$

wobei  $S_n = \sum_{i=1}^n R_i$  ist. Und für  $\alpha \in (0, 2)$  wissen wir aus (2.7), (2.8) und (2.9), dass  $a_n = c_2 n^{1/\alpha}$  und  $b_n = 0$  gilt. Können wir noch zeigen, dass  $N_{t_n}/\mu_n \rightarrow 1$  f.s. gilt, so können wir Satz A.2.4 anwenden und damit folgern:

$$\frac{S_{N_{t_n}}}{a_{\mu_n}} = \frac{X_{t_n}}{c_2 \mu_n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d} X,$$

wodurch unsere Behauptung gezeigt ist, denn:

$$\frac{X_{t_n}}{(t_n/\tau)^{1/\alpha} c_2} = \frac{X_{t_n}}{\mu_n^{1/\alpha} c_2} \underbrace{\left( \frac{\mu_n}{t_n/\tau} \right)^{1/\alpha}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{d} X.$$

Zeigen wir nun, dass  $N_{t_n}/\mu_n \rightarrow 1$  f.s. gilt: Aus der Erneuerungstheorie (vgl. [A1], Korollar 29.3) wissen wir, dass  $N_{t_n}/(t_n/\tau) \rightarrow 1$  f.s. gilt. Daher genügt es zu zeigen, dass  $t_n/\tau \sim \mu_n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) ist. Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{N_{t_n}}{t_n/\tau} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Daraus lassen sich folgende Konvergenzaussagen folgern:

$$\mathbb{P} \left( N_{t_n} \geq (1 + \varepsilon) \frac{t_n}{\tau} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{P} \left( N_{t_n} \leq (1 - \varepsilon) \frac{t_n}{\tau} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Es existiert also ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  die beiden zuletzt erwähnten Wahrscheinlichkeiten  $< 1/2$  sind. Dass  $\mu_n$  der Median von  $N_{t_n}$  ist, bedeutet, dass

$$\mathbb{P}(N_{t_n} \geq \mu_n) \wedge \mathbb{P}(N_{t_n} \leq \mu_n) \geq 1/2$$

gilt. Dadurch können wir folgende Ungleichungsketten für alle  $n \geq N$  folgern:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(N_{t_n} \geq (1 + \varepsilon)\frac{t_n}{\tau}\right) &< 1/2 \leq \mathbb{P}(N_{t_n} \geq \mu_n), \\ \mathbb{P}\left(N_{t_n} \leq (1 - \varepsilon)\frac{t_n}{\tau}\right) &< 1/2 \leq \mathbb{P}(N_{t_n} \leq \mu_n) \end{aligned}$$

und erhalten damit:  $\mu_n < (1 + \varepsilon)t_n/\tau$  und  $(1 - \varepsilon)t_n/\tau < \mu_n$ .

Für  $\alpha = 2$  gilt mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes:

$$\frac{\sum_{i=1}^n R_i}{c_1 n^{1/2}} \xrightarrow{d} \mathfrak{N}(0, 1),$$

so dass Satz A.2.4 analog zum Fall  $0 < \alpha < 2$

$$\frac{X_{t_n}}{(t_n/\tau)^{1/\alpha} c_1} \xrightarrow{d} \mathfrak{N}(0, 1)$$

liefert. □

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass  $\mu$  existiert, aber ungleich 0 ist. Wir befinden uns also in dem Fall, dass  $1 < \alpha \leq 2$  und  $\mu \neq 0$  gilt. Um in diesem Fall die Grenzverteilung des CTRW zu bestimmen, müssen wir mehr über das asymptotische Verhalten von  $N_t$  wissen:

### 2.3.2 Lemma (vgl. [Ko], 3.2, 786 und 788).

Sei  $X_t$  ein CTRW. Dann gilt

$$(2.12) \quad \mathbb{P}\left(\frac{N_t}{t^{\alpha'}(c'_2)^{-\alpha'}} < r\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} H_{\alpha'}(r), \text{ falls } 0 < \alpha' < 1 \text{ ist,}$$

$$(2.13) \quad \mathbb{P}\left(\frac{N_t - t/\tau}{t^{1/\alpha'} c'_2 \tau^{-(1+1/\alpha')}} < r\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{\alpha', -1}(r), \text{ falls } 1 < \alpha' \leq 2 \text{ ist,}$$

$$(2.14) \quad \mathbb{P}\left(\frac{N_t - t/\tau}{t^{1/2} c'_1 \tau^{-(1+1/2)}} < r\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathfrak{N}(0, 1)(r) \text{ für } \alpha' = 2,$$

mit  $(c'_1)^2 := \text{Var } T_1$  und  $c'_2 := (b' / (\alpha' C_{\alpha'}))^{1/\alpha'}$ .  $H_{\alpha'}$  ist für  $\alpha' \in (0, 1)$  die in (1.20) eingeführte inverse Standard-stabile Verteilung.

*Beweis.* Bevor wir mit dem Beweis beginnen, bemerken wir kurz, dass wir es im Fall  $1 < \alpha' \leq 2$  mit einer endlichen mittleren Wartezeit zu tun haben, und dass  $\tau$  im Fall  $0 < \alpha' < 1$  nicht existiert. Am Ende des Abschnitts 2.2 haben wir die genaue Gestalt der Konstanten  $a_n$  und  $b_n$  aus der Konvergenzaussage 2.2.2 bestimmt. Dies lässt sich völlig analog auch für die Konvergenzaussage

2.2.3 durchführen. Diese Ergebnisse benutzen wir als Basis, um die obigen Aussagen zu beweisen. Außerdem bezeichnen wir in diesem Beweis mit  $S_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) die  $n$ -te Partialsumme der Folge  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

Sei  $0 < \alpha' < 1$ . Es gilt (nach dem Analogon zu (2.7)):

$$(\mathcal{c}'_2)^{-1} n^{-1/\alpha'} S_n \xrightarrow{d} S_{\alpha',1} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Betrachten wir die Wahrscheinlichkeit in (2.12) für  $r > 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{N_t}{t^{\alpha'} (\mathcal{c}'_2)^{-\alpha'}} < r\right) &= \mathbb{P}(N_t < r t^{\alpha'} (\mathcal{c}'_2)^{-\alpha'}) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(N_t \geq \underbrace{\lceil r t^{\alpha'} (\mathcal{c}'_2)^{-\alpha'} \rceil}_{=: n_t}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n_t} T_i \leq t\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left((\mathcal{c}'_2)^{-1} n_t^{-1/\alpha'} S_{n_t} \leq (\mathcal{c}'_2)^{-1} n_t^{-1/\alpha'} t\right). \end{aligned}$$

Weil

$$\begin{aligned} (\mathcal{c}'_2)^{-1} n_t^{-1/\alpha'} t &= (\mathcal{c}'_2)^{-1} \frac{\lceil r t^{\alpha'} (\mathcal{c}'_2)^{-\alpha'} \rceil^{-1/\alpha'}}{\underbrace{(\mathcal{c}'_2)^{-1} \lceil r t^{\alpha'} (\mathcal{c}'_2)^{-\alpha'} \rceil^{-1/\alpha'}}_{\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{1}}} (r t^{\alpha'} (\mathcal{c}'_2)^{-\alpha'})^{-1/\alpha'} t \\ &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} (\mathcal{c}'_2)^{-1} r^{-1/\alpha'} \mathcal{c}'_2 = r^{-1/\alpha'} \end{aligned}$$

gilt, können wir aufgrund der Stetigkeit der Verteilungsfunktion Folgendes schließen:

$$\mathbb{P}\left(\frac{N_t}{t^{\alpha'} (\mathcal{c}'_2)^{-\alpha'}} < r\right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1 - S_{\alpha',1}(r^{-1/\alpha'}) = H_{\alpha'}(r).$$

Sei  $1 < \alpha' < 2$ . Es liegt folgende Konvergenzaussage zu Grunde (nach dem Analogon zu (2.8)):

$$(\mathcal{c}'_2)^{-1} n^{-1/\alpha'} (S_n - n\tau) \xrightarrow{d} S_{\alpha',1} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dann gilt für  $r > 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{N_t - t/\tau}{t^{1/\alpha'} \mathcal{c}'_2 \tau^{-(1+1/\alpha')}} < r\right) &= \mathbb{P}\left(N_t < r t^{1/\alpha'} \mathcal{c}'_2 \tau^{-(1+1/\alpha')} + t/\tau\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(N_t \geq \underbrace{\lceil r t^{1/\alpha'} \mathcal{c}'_2 \tau^{-(1+1/\alpha')} + t/\tau \rceil}_{=: m_t}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m_t} T_i \leq t\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left((\mathcal{c}'_2)^{-1} m_t^{-1/\alpha'} (S_{m_t} - m_t \tau) \leq (\mathcal{c}'_2)^{-1} m_t^{-1/\alpha'} (t - m_t \tau)\right). \end{aligned}$$

Betrachten wir  $(c'_2)^{-1}m_t^{-1/\alpha'}(t - m_t\tau)$  etwas genauer:

$$\begin{aligned} (c'_2)^{-1}m_t^{-1/\alpha'}(t - m_t\tau) &= C(c'_2)^{-1} \left( rt^{1/\alpha'} c'_2\tau^{-(1+1/\alpha')} + t/\tau \right)^{-1/\alpha'} \\ &\quad \cdot \left( t - \left( rt^{1/\alpha'} c'_2\tau^{-(1+1/\alpha')} + t/\tau \right) \tau \right) \end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante  $C$ . Weiter gilt:

$$\begin{aligned} (c'_2)^{-1}m_t^{-1/\alpha'}(t - m_t\tau) &= C(c'_2)^{-1} \left( rt^{1/\alpha'} c'_2\tau^{-(1+1/\alpha')} + t/\tau \right)^{-1/\alpha'} \\ &\quad \cdot \left( -rt^{1/\alpha'} c'_2\tau^{-(1+1/\alpha')} \tau \right) \\ &= -Cr \left( \frac{rt^{1/\alpha'} c'_2\tau^{-(1+1/\alpha')} + t/\tau}{t/\tau} \right)^{-1/\alpha'} \\ &= -Cr \left( 1 + \frac{rt^{1/\alpha'} c'_2\tau^{-(1+1/\alpha')}}{t/\tau} \right)^{-1/\alpha'} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -r. \end{aligned}$$

Weil die Verteilungsfunktion von  $S_{\alpha',1}$  stetig ist, können wir folgern:

$$\mathbb{P} \left( \frac{N_t - t/\tau}{t^{1/\alpha'} c'_2\tau^{-(1+1/\alpha')}} < r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{\alpha',1}(-r) = S_{\alpha',-1}(r).$$

Sei  $\alpha' = 2$ . In diesem Fall ist  $\mathbb{E}T_1^2$  endlich und damit natürlich auch der Erwartungswert von  $T_1$ . Daher gilt nach dem zentralen Grenzwertsatz:

$$(c'_1)^{-1}n^{-1/2}(S_n - n\tau) \xrightarrow{d} \mathfrak{N}(0, 1).$$

Ab diesem Punkt können wir den Beweis des Falls  $1 < \alpha' < 2$  analog übernehmen und erhalten damit die Behauptung.  $\square$

Im Fall  $0 < \alpha' < 1$  konvergiert also die geeignet skalierte Verteilung von  $N_t$  gegen eine inverse Standard-stabile Verteilung und im Fall  $1 < \alpha' \leq 2$  gegen eine Standard-stabile Verteilung, wobei zusätzlich zentriert werden musste. Mit diesem Wissen können wir nun den folgenden Satz beweisen:

### 2.3.3 Satz (vgl. [Ko], 3.2, 786-787).

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein CTRW. Ist  $1 < \alpha \leq 2$  und existiert  $\mu \neq 0$ , dann gilt im Fall  $1 < \alpha' \leq 2$

$$(2.15) \quad \mathbb{P} \left( \frac{X_t - (t/\tau)\mu}{(t/\tau)^{1/\alpha} c_2} \leq r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{\alpha,\beta}(r), \text{ falls } \alpha < \alpha' \leq 2 \text{ ist,}$$

$$(2.16) \quad \mathbb{P} \left( \frac{X_t/\mu - t/\tau}{t^{1/\alpha'} c'_2\tau^{-(1+1/\alpha')}} < r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{\alpha',-1}(r), \text{ falls } \alpha' < \alpha \leq 2 \text{ ist,}$$



$$(2.17) \quad \mathbb{P} \left( \frac{X_t - (t/\tau)\mu}{(t/\tau)^{1/2}c_3} \leq r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathfrak{N}(0, 1)(r), \text{ falls } \alpha = \alpha' = 2 \text{ ist,}$$

$$(2.18) \quad \mathbb{P} \left( \frac{X_t - (t/\tau)\mu}{(t/\tau)^{1/\alpha}c_4} \leq r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{\alpha, \beta_1}(r), \text{ falls } \alpha = \alpha' < 2 \text{ ist,}$$

und im Fall  $0 < \alpha' < 1$

$$(2.19) \quad \mathbb{P} \left( \frac{X_t/\mu}{t^{\alpha'}(c'_2)^{-\alpha'}} < r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} H_{\alpha'}(r).$$

Dabei sind  $c_2 = (b/(\alpha C_\alpha))^{1/\alpha}$ ,  $c'_2 = (b'/(\alpha' C_{\alpha'}))^{1/\alpha'}$  und  $c_3^2 := \text{Var}(R_1 - (\mu/\tau)T_1)$ . Weiter ist  $c_4$  so definiert wie  $c_2$  mit dem Unterschied, dass anstelle von  $b$  der Größenkoeffizient von  $R_1 - (\mu/\tau)T_1$  verwendet wird, und  $\beta_1$  ist das Pendant zu  $\beta$  aus (2.3).

*Beweis.* Sei zunächst  $1 < \alpha' \leq 2$ . Betrachtet man die Zufallsgrößen  $R_i - \mu$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) anstatt  $R_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ), so wird aus (2.2)  $X_t - N_t\mu$  und damit aus (2.11)

$$(2.20) \quad \mathbb{P} \left( \frac{X_t - N_t\mu}{(t/\tau)^{1/\alpha}c_2} \leq r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{\alpha, \beta}(r), \text{ falls } 1 < \alpha < 2 \text{ gilt,}$$

und aus (2.10)

$$(2.21) \quad \mathbb{P} \left( \frac{X_t - N_t\mu}{(t/\tau)^{1/2}c_1} \leq r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathfrak{N}(0, 1)(r), \text{ falls } \alpha = 2 \text{ gilt.}$$

Dass wir (2.11) bzw. (2.10) hier benutzen können, liegt daran, dass die dafür benötigten Voraussetzungen

- (a)  $\mathbb{E}(R_1 - \mu) = \mathbb{E} R_1 - \mathbb{E} \mu = \mathbb{E} R_1 - \mathbb{E} R_1 = 0$ ,
- (b)  $\tau < \infty$ ,
- (c)  $\mathbb{E}(R_1 - \mu)^2 = \infty$ , da für  $1 < \alpha < 2$   $\mathbb{E} R_1^2 = \infty$  ist,  
bzw.  $\mathbb{E}(R_1 - \mu)^2 = \mathbb{E} R_1^2 - (\mathbb{E} R_1)^2 < \infty$ , da für  $\alpha = 2$   $\mathbb{E} R_1^2 < \infty$  ist,

erfüllt sind.

Sei  $\alpha < \alpha' \leq 2$ . Betrachten wir den zweiten Term auf der rechten Seite in folgender Gleichung

$$\frac{X_t - (t/\tau)\mu}{(t/\tau)^{1/\alpha}c_2} = \frac{X_t - N_t\mu}{(t/\tau)^{1/\alpha}c_2} + \mu \frac{N_t - t/\tau}{(t/\tau)^{1/\alpha}c_2},$$

so können wir zeigen, dass er in Wahrscheinlichkeit gegen 0 geht: Seien dazu  $\varepsilon > 0$  und  $\alpha' < 2$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{N_t - t/\tau}{(t/\tau)^{1/\alpha} c_2} \right| > \varepsilon \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{N_t - t/\tau}{(t/\tau)^{1/\alpha'}} \right| > \underbrace{\varepsilon |c_2| \left( \frac{t}{\tau} \right)^{1/\alpha - 1/\alpha'}}_{\rightarrow \infty} \right) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{N_t - t/\tau}{(t/\tau)^{1/\alpha'}} \right| > K \right) \quad \forall K > 0 \\ &\stackrel{(2.13)}{=} 1 - S_{\alpha', -1}(K) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen verläuft für  $\alpha' = 2$  völlig analog. Daher gilt, dass auch

$$\frac{X_t - (t/\tau)\mu}{(t/\tau)^{1/\alpha} c_2} - \frac{X_t - N_t \mu}{(t/\tau)^{1/\alpha} c_2} \xrightarrow{P} 0$$

geht. Nun können wir den Satz von Slutsky (Satz 36.12 in [A]) auf (2.20) anwenden und erhalten (2.15).

Sei  $\alpha' < \alpha \leq 2$ . Dieser Fall lässt sich analog behandeln. Wir benutzen nur eine andere Ausgangsgleichung, nämlich

$$\frac{X_t - (t/\tau)\mu}{\mu t^{1/\alpha'} c_2' \tau^{-(1+1/\alpha')}} = \frac{X_t - N_t \mu}{\mu t^{1/\alpha'} c_2' \tau^{-(1+1/\alpha')}} + \frac{N_t - t/\tau}{t^{1/\alpha'} c_2' \tau^{-(1+1/\alpha')}},$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite in Wahrscheinlichkeit gegen 0 geht. Um dies nachzuweisen, benutzt man (2.20) bzw. (2.21) und dass  $1/\alpha' > 1/\alpha$  gilt. Aussage (2.16) erhalten wir durch Anwendung des Satzes von Slutsky auf (2.13).

Sei  $\alpha = \alpha' = 2$ . Hier betrachten wir die Zufallsgrößen  $R_i - (\mu/\tau)T_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) anstelle von  $R_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ). Aus (2.2) wird in diesem Fall

$$\sum_{i=0}^{N_t} (R_i - (\mu/\tau)T_i) = X_t - \frac{\mu}{\tau} \sum_{i=0}^{N_t} T_i.$$

Da  $\mathbb{E}(R_1 - (\mu/\tau)T_1) = 0$  und  $\mathbb{E}(R_1 - (\mu/\tau)T_1)^2 < \infty$  sind, können wir (2.10) anwenden und erhalten

$$\mathbb{P} \left( \left( \frac{t}{\tau} \right)^{-1/2} c_3^{-1} \left( X_t - \frac{\mu}{\tau} \sum_{i=0}^{N_t} T_i \right) \leq r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathfrak{N}(0, 1)(r)$$

mit  $c_3^2 = \text{Var}(R_1 - (\mu/\tau)T_1)$ . Mit  $\tau(t) := \inf\{k \geq 1 : \sum_{i=1}^k > t\}$  und  $Y_t := \sum_{i=1}^{M_t} T_i - t$  gilt nach Satz 4.1.3 (b) in [A2] (mit  $p=2$  und  $q=1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| t^{-1/2} \left( t - \sum_{i=0}^{N_t} T_i \right) \right| &= \mathbb{E} t^{-1/2} |T_{\tau(t)} - Y_t| \\ &\leq t^{-1/2} \mathbb{E} T_{\tau(t)} + t^{-1/2} \mathbb{E} Y_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

d.h.  $t^{-1/2}(t - \sum_{i=0}^{N_t} T_i)$  konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen 0. Daher können wir erneut den Satz von Slutsky anwenden und in der vorherigen Konvergenzaussage  $\sum_{i=0}^{N_t} T_i$  durch  $t$  ersetzen:

$$\mathbb{P} \left( \frac{X_t - (t/\tau)\mu}{(t/\tau)^{1/2}c_3} \leq r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathfrak{N}(0, 1)(r).$$

Sei  $\alpha = \alpha' < 2$ . Auch hier betrachten wir die Zufallsgrößen  $R_i - (\mu/\tau)T_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) anstelle der  $R_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ). Es gilt zwar immer noch  $\mathbb{E}(R_1 - (\mu/\tau)T_1) = 0$ , aber wegen der Voraussetzung  $\alpha = \alpha' < 2$  ist  $\mathbb{E}(R_1 - (\mu/\tau)T_1)^2 = \infty$ . Daher können wir hier (2.11) anwenden und erhalten (2.18).

Betrachten wir nun den Fall  $0 < \alpha' < 1$ . Nach dem Satz von Etemadi (Satz 35.4 in [A]) gilt

$$(2.22) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t/\mu}{N_t} = 1 \text{ f.s.},$$

weil  $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit  $\mathbb{E}R_1 = \mu$  ist. Wenden wir die Aussage (2.22) in Gleichung (2.12) an, so erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Abschließend betrachten wir den Fall, dass  $\tau$  unendlich ist, d.h.  $\alpha' \in (0, 1)$  gilt, und  $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2]$  ist, wobei wir  $\mu = 0$  im Fall  $\alpha > 1$  annehmen.

### 2.3.4 Satz (vgl. [Ko], 3.3, 789).

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein ungekoppelter CTRW. Dann gilt für  $0 < \alpha < 2$

$$(2.23) \quad \mathbb{P} \left( \frac{X_t}{t^{\alpha'/\alpha} c_2 (c_2')^{-\alpha'/\alpha}} \leq r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty S_{\alpha, \beta} \left( r x^{-1/\alpha} \right) H_{\alpha'}(dx)$$

und für  $\alpha = 2$

$$(2.24) \quad \mathbb{P} \left( \frac{\sqrt{2}X_t}{t^{\alpha'/2} c_1 (c_2')^{-\alpha'/2}} \leq r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty S_{2, \beta} \left( r x^{-1/2} \right) H_{\alpha'}(dx)$$

mit  $\beta \in [-1, 1]$  und  $0 < \alpha' < 1$ . Dabei sind  $c_1^2 = \text{Var} R_1$ ,  $c_2 = (b/(\alpha C_\alpha))^{1/\alpha}$  und  $c_2' = (b'/(\alpha' C_{\alpha'}))^{1/\alpha'}$  wie zuvor definiert.

*Beweis.* Weil die  $X_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , unabhängig und identisch verteilt sind und zudem von den  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , unabhängig sind, sind die Voraussetzungen des Lemmas A.2.5, das eine viel allgemeinere Situation zu Grunde legt, offensichtlich erfüllt. Nun wissen wir aus (2.12), dass es eine Funktion  $h(t) := t^{\alpha'} (c_2')^{-\alpha'}$  ( $\alpha' \in (0, 1)$ ,  $h(t) \rightarrow \infty$ ) mit konstantem – also langsam variierendem – Anteil  $(c_2')^{-\alpha'} = \alpha' C_{\alpha'}/b'$  gibt, so dass

$$\mathbb{P} \left( \frac{N_t}{h(t)} < r \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} H_{\alpha'}(r)$$

gilt, und aus (2.7), (2.8) und (2.9) wissen wir, dass

$$\frac{\sum_{i=1}^n R_i}{c_2 n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d} S_{\alpha,\beta}$$

gilt, so dass uns das Lemma A.2.5

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_t}{t^{\alpha'/\alpha} c_2 (c_2')^{-\alpha'/\alpha}} \leq r\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty S_{\alpha,\beta}(rx^{-1/\alpha}) H_{\alpha'}(dx)$$

liefert.

Für  $\alpha = 2$  gilt mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes:

$$\sqrt{2} \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{c_1 n^{1/2}} \xrightarrow{d} \mathfrak{N}(0, 2) = S_{2,0},$$

so dass wir in diesem Fall aus Lemma A.2.5

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{2} X_t}{t^{\alpha'/2} c_1 (c_1')^{-\alpha'/2}} \leq r\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty S_{2,0}(rx^{-1/2}) H_{\alpha'}(dx)$$

erhalten. □

Für einen gekoppelten CTRW lassen sich leider keine allgemein gültigen Aussagen machen. Daher geben wir zum Abschluss nur ein Beispiel an, bei dem tatsächlich verschiedene Grenzverteilungen im ungekoppelten bzw. gekoppelten Fall auftreten.

### 2.3.5 Beispiele (vgl. [Ko], 3.3, 790).

Es seien  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein CTRW und  $0 < \alpha < 1$ .

(a) Ist  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein ungekoppelter CTRW mit  $R_i \stackrel{d}{=} T_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , so gilt:

$$(2.25) \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_t}{t} \leq r\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty S_{\alpha,1}(rx) S_{\alpha,1}(dx).$$

(b) Ist  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein gekoppelter CTRW mit  $R_i = T_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , so gilt:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_t}{t} \leq r\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \text{Arcsin}(1 - \alpha)(r).$$

$\text{Arcsin}(\vartheta)$  ist die sogenannte Arkussinus-Verteilung, die auf das Intervall  $(0, 1)$  konzentriert und durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$q_\vartheta(x) = \frac{\sin \pi \vartheta}{\pi} x^{-\vartheta} (1 - x)^{\vartheta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

für  $0 < \vartheta < 1$  bestimmt ist.

*Begründung.* Zu (a): Sei  $X_t$  ein ungekoppelter CTRW mit  $R_i \stackrel{d}{=} T_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Dann muss  $\alpha = \alpha'$  und  $\beta = 1$  gelten und aus Formel (2.23) wird

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_t}{t} \leq r\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty S_{\alpha,1}(rx^{-1/\alpha}) H_\alpha(dx),$$

was äquivalent zur behaupteten Gleichung (2.25) ist: Es seien  $X, Y$  stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsgrößen mit  $Y \sim S_{\alpha,1}$ . Aus Kapitel 1 wissen wir, dass dann  $Y^{-\alpha} \sim H_\alpha$  gilt. Sei  $r > 0$ , dann gilt einerseits

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leq r\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leq r \mid Y\right)\right) \\ &= \int \mathbb{P}\left(\frac{X}{y} \leq r\right) \mathbb{P}^Y(dy) \\ &= \int S_{\alpha,1}(ry) S_{\alpha,1}(dy) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leq r\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leq r \mid Y^{-\alpha}\right)\right) = \int S_{\alpha,1}(ry^{-1/\alpha}) H_\alpha(dy).$$

Zu (b): Sei  $X_t$  ein gekoppelter CTRW mit  $R_i = T_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Aus der Grundvoraussetzung wissen wir, dass  $1-G(x) \sim x^{-\alpha'} b'/\alpha'$  ist. Daher können wir Satz A.2.7 anwenden und dieser liefert eine Zufallsgröße  $Y_t := t - X_t$ , für die

$$\frac{Y_t}{t} \xrightarrow{d} \text{Arcsin}(\alpha) \quad (t \rightarrow \infty)$$

gilt, was uns direkt die Behauptung liefert:

$$\frac{X_t}{t} = 1 - \frac{Y_t}{t} \xrightarrow{d} \text{Arcsin}(1 - \alpha) \quad (t \rightarrow \infty).$$

□



## Kapitel 3

# Eine Anwendung in der Theoretischen Chemie

In diesem Abschnitt geht es darum, ein Beispiel für einen CTRW anzugeben. Dabei soll kein Beispiel angegeben werden, das in einem mathematischen Fachbuch steht, sondern ein Beispiel aus der Chemie. Dazu haben Mareike Assink, die ihre Diplomarbeit mit dem Titel „Grenzwertsätze für mehrdimensionale Random Walks in stetiger Zeit“ ebenfalls bei Herrn Alsmeyer geschrieben hat, und ich in Partnerarbeit ein Projekt im Bereich Theoretische Chemie durchgeführt. Herr Prof. Dr. Heuer hat uns in seinem Arbeitskreis einen Arbeitsplatz zur Verfügung und seine Assistentin, Frau Dr. Aimorn Saksangwijit, als Betreuerin bei der Durchführung des Projekts zur Seite gestellt. Dabei haben wir mit Hilfe bereits geschriebener Computerprogramme ein Glas simuliert und die Bewegung der einzelnen Atome bei einer bestimmten Temperatur über einen gewissen Zeitraum beobachtet. Durch eine geeignete Diskretisierung konnten wir nachweisen, dass es sich bei der Bewegung um einen CTRW handelt.

Weil der Bereich Theoretische Chemie nicht sehr bekannt ist, werde ich kurz die historische Namensgebung erläutern und grob beschreiben, womit sich dieser Teilbereich der Chemie beschäftigt. Anschließend folgt ein Abschnitt über „Glas“. Was genau versteht man unter Glas? Wie verhält sich Glas?

### 3.1 Theoretische Chemie<sup>1</sup>

Ursprünglich fasste man mit dem Begriff „Theoretische Chemie“ den Lehrstoff zusammen, der nicht zur experimentellen Chemie gehörte. Später wurde dann das heute „Physikalische Chemie“ genannte Teilgebiet der Chemie so bezeichnet. Die Theoretische Chemie versteht sich heute vereinzelt

---

<sup>1</sup>Vgl. [R], Theoretische Chemie.

als Teilgebiet der Physikalischen Chemie, häufiger jedoch als selbständiges Wissensgebiet. Im universitären Bereich ist es nahezu ebenbürtig mit den Teilgebieten Anorganische, Organische, Physikalische Chemie und Biochemie.

Als ersten Grundpfeiler der Theoretischen Chemie kann man die Thermodynamik und die statistische Mechanik betrachten und als den zweiten Grundpfeiler die Quantenmechanik, die im Allgemeinen als der wichtigere angesehen wird. Die moderne Theoretische Chemie entwickelte sich aber nicht ausschließlich aus diesen Theorien, sie wurde auch stark durch empirische Befunde aus der chemischen Forschung beeinflusst.

Das Teilgebiet der Theoretischen Chemie, das sich mit der Anwendung der Quantenmechanik auf Fragen der Chemie beschäftigt, wird Quantenchemie genannt. Neben der theoretischen Untersuchung der Eigenschaften und Wechselwirkungen von Atomen und Molekülen behandelt die Quantenchemie auch ihre Dynamik. Häufig wird hierbei auch die klassische Mechanik verwendet, z.B. in Form der Newtonschen Bewegungsgleichungen. Durch Verknüpfung der Resultate quantenchemischer Berechnungen (Potentialhyperflächen und Energiezustände) mit Methoden der statistischen Mechanik lassen sich kinetische Größen berechnen, insbesondere Reaktionsgeschwindigkeitskonstanten in Abhängigkeit von Energie und Drehimpuls.

Viele Fortschritte der Theoretischen Chemie wurden aber erst durch die Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung ermöglicht.

## 3.2 Glas<sup>2</sup>

Unter Glas versteht man Stoffe, die sich im sogenannten glasartigen Zustand befinden, d.h., in denen nur kleinste Bereiche kristallin geordnet sind. Der Glaszustand läßt sich als eingefrorene, unterkühlte Flüssigkeit bzw. Schmelze auffassen, wobei man mit Schmelze einen im geschmolzenen Zustand befindlichen Stoff bezeichnet, der unter Normalbedingungen fest ist. Bei hinreichend großer Abkühlgeschwindigkeit einer Schmelze oder bei der Kondensation von Molekülen aus der Dampfphase auf extrem gekühlte Substrate läßt sich praktisch jeder Stoff in den Glaszustand überführen. Die Temperatur des Einfriervorgangs wird dabei zur Charakterisierung der Gläser herangezogen. Sie wird *Glastemperatur* oder *Transformationstemperatur* genannt und mit  $T_g$  bezeichnet. Bei der Transformationstemperatur  $T_g$  haben die Gläser eine Viskosität von ca.  $10^{12}$  Pas und sind damit als „fest“ anzusehen. Unterhalb der Temperatur  $T_g$  verhalten sich Gläser wie spröd-elastische Körper; oberhalb der Temperatur  $T_g$  erweicht Glas mit zunehmender Temperatur je nach Zusammensetzung mehr oder weniger stark und nimmt erst bei hohen Temperaturen Flüssigkeitsverhalten mit niedrigen Viskositäten ( $< 10^2$  Pas) an.

---

<sup>2</sup>Vgl. [R], Glas.



Hauptrohstoffe für die Herstellung von Glas sind Quarz(sand), Soda (Soda ist der historische Name für Natriumcarbonat ( $\text{Na}_2\text{CO}_3$ )) und Kalkstein, Marmor oder Kalkmergel. Die Korngröße soll dabei möglichst einheitlich sein und im Größenbereich von  $0,5 - 0,05$  mm liegen, um ein möglichst homogenes Gemenge zu erreichen. Einen weiteren wichtigen Rohstoff bildet Altglas. Weil Glas nahezu unbegrenzt wiederverwendet werden kann, wird schon immer der bei der Produktion anfallende Glasabfall in den Herstellungsprozess zurückgeführt. Man fand sogar heraus, dass der Zusatz bestimmter Mengen gemahlener Scherben zum Rohstoffgemenge das Schmelzverhalten optimiert.

### 3.3 Simulationen

Die Grundlage für unsere Arbeit ist ein Programm, das uns vom AK Heuer zur Verfügung gestellt wurde. Genauer gesagt, wurde es ursprünglich von Dr. Jens Reinisch geschrieben und von Dr. Aimorn Saksaengwijit überarbeitet und erweitert.

Dieses Programm simuliert die Bewegung der Atome eines Glases. Dazu betrachtet man einen virtuellen Würfel der Kantenlänge  $l$ , in den so viele Teilchen, wie man betrachten möchte, zufällig platziert werden, wobei die Bedingung besteht, dass jedem Platz höchstens ein Teilchen zugeordnet werden darf. In unserem Fall hat sich herausgestellt, dass 65 Teilchen ausreichen, um das Glas hinreichend gut zu simulieren. Bei einer geringeren Teilchenanzahl wiesen charakteristische Graphen eine starke Abweichung gegenüber den Graphen auf, bei denen mit 65, 195 oder 1000 Teilchen simuliert wurde.  $x_i(t) \in [-l/2, l/2]^3$ ,  $i \in \{1, \dots, 65\}$ , bezeichne nun den Ort, an dem sich das  $i$ -te Teilchen zum Zeitpunkt  $t$  befindet. Den Ort, an dem sich dieses Teilchen zur Zeit  $t + \Delta t$  aufhält,

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + y,$$

erhält man aus der vorherigen Lage  $x_i(t)$  und einer Verschiebung  $y$ , die mit Hilfe des Potentials berechnet wird. Für unsere Arbeit wurde dafür das sogenannte *Soft-Spheres-Potential*

$$(3.1) \quad V_{i,j}(t) = \left( \frac{1}{x_{i,j}(t)} \right)^n$$

mit

$$x_{i,j}(t) := \sqrt{(x_i(t) - x_j(t))^2}, \quad i, j \in \{1, \dots, 65\}, \quad i \neq j,$$

verwendet, das die potentielle Energie zwischen den Teilchen  $i$  und  $j$  zum Zeitpunkt  $t$  bestimmt.

Es ist natürlich leicht möglich, dass sich ein Teilchen aus dem Würfel herausbewegt. Damit trotzdem die Anzahl der Teilchen im Würfel immer gleich bleibt, wurden periodische Randbedingungen eingeführt: Bewegt sich

zum Beispiel ein Teilchen im rechten Winkel durch eine Wand des Würfels, so lässt man ein neues Teilchen im rechten Winkel durch die gegenüberliegende Wand wieder in den Würfel eintreten. Die periodischen Randbedingungen sind die Erweiterung dieser Eigenschaft auf alle Punkte der Oberfläche des Würfels und alle möglichen Austrittswinkel.

Von der Betrachtung der einzelnen Teilchen kann man dazu übergehen, das Gesamtsystem zu betrachten. Die Energie des Gesamtsystems zum Zeitpunkt  $t$  lässt sich wie folgt berechnen:

$$(3.2) \quad V_{\text{ges}}(x(t)) = \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, 65\}, \\ i < j}} V_{i,j}(t) \quad \text{mit } x(t) = (x_1(t), \dots, x_{65}(t)) \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]^{3 \cdot 65}.$$

Man kennt nun zu einem Zeitpunkt  $t$  sowohl die Position  $x(t)$  als auch die Energie  $V_{\text{ges}}(x(t))$  des Gesamtsystems. Diese Daten kann man gegeneinander auftragen. Der entstehende Graph wird *potentielle Energielandschaft* genannt. Wie ein solcher Graph aussehen kann, sieht man anhand einer beispielhaften Auftragung in Abbildung 3.1:

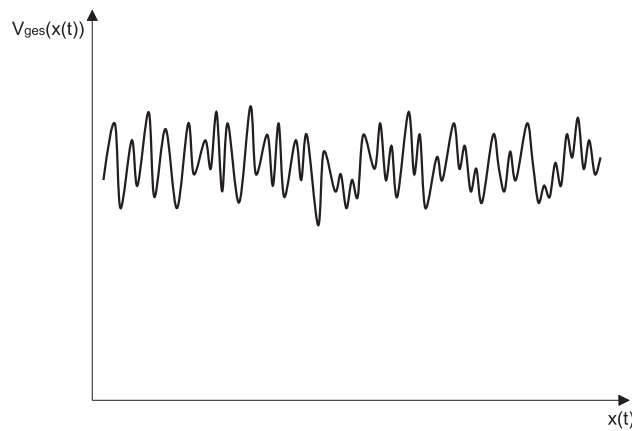


Abbildung 3.1: Auftragung von  $V_{\text{ges}}(x(t))$  gegen  $x(t)$ : beispielhaftes Aussehen einer potentiellen Energielandschaft

Um besser zu verstehen, wie sich das Gesamtsystem verhält, kann man sich einen dreidimensionalen Raum vorstellen. Die Punkte der  $x$ - $y$ -Ebene stellen alle Positionen dar, die das Gesamtsystem annehmen könnte. Auf der  $z$ -Achse werden dann die zugehörigen potentiellen Energien aufgetragen, die mit Hilfe der Gleichungen (3.1) und (3.2) berechnet wurden. Dadurch

entsteht in dem Raum eine „Hügellandschaft“. Einen Ausschnitt aus einer solchen beispielhaften Landschaft zeigt Abbildung 3.2:

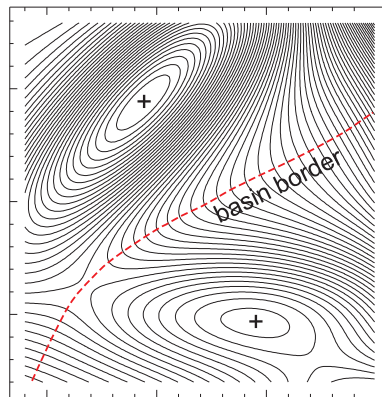


Abbildung 3.2: Ausschnitt aus einer beispielhaften „Hügellandschaft“ (Sicht „von oben“ mit Höhenlinien; Kreuze kennzeichnen Minima)

Der Weg, den das Gesamtsystem durch diese Landschaft zurücklegt, könnte dann wie in der folgenden Abbildung 3.3 aussehen:

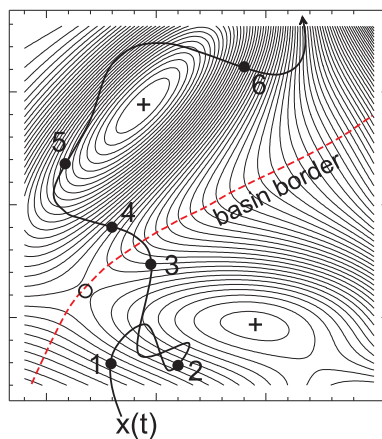


Abbildung 3.3: Beispielhafter Weg des Gesamtsystems durch eine „Hügellandschaft“

Es hat sich gezeigt, dass sich das Gesamtsystem überwiegend in der Nähe der Minima aufhält und nur kurz hohe Energiewerte annimmt. Aufgrund dieser Erkenntnis ist man dazu übergegangen, die Bewegung des Gesamtsystems vereinfacht zu betrachten. Dazu diskretisiert man die Hügellandschaft, indem man nach einem bestimmten Verfahren Linien zwischen den Minima festlegt, wie in Abbildung 3.2 beispielhaft zu sehen ist. Das Gesamtsystem

nimmt nun nicht mehr alle Energiewerte an, sondern ihm wird innerhalb eines Gebietes der Energiewert des zugehörigen Minimums zugeordnet. Überschreitet es eine der Linien, ordnet man ihm die nächste Minimumenergie zu.

Trägt man nach dieser Vereinfachung die Gesamtenergie gegen die Zeit auf, erhält man ein Bild wie in Abbildung 3.4:

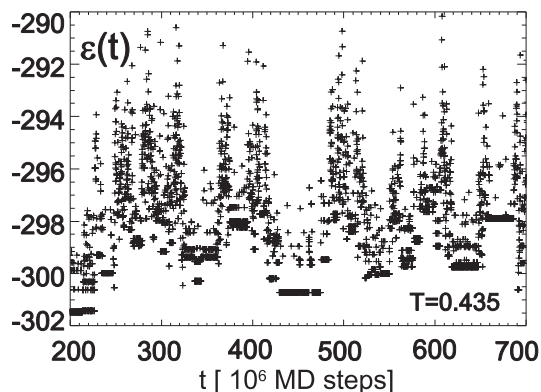


Abbildung 3.4: Auftragung der Minimaenergien gegen die Zeit

Man sieht dort sehr schön, dass es trotz der Vereinfachung noch zu starken Fluktuationen kommt, so dass es schwierig ist, irgendwelche Aussagen über die Bewegung zu treffen. Deshalb ist man dazu übergegangen, Minimumgebiete nach einem bestimmten Prinzip zu sogenannten *Metabassins* zusammenzufassen. Dies geschieht folgendermaßen: Nummeriert man die Minimumgebiete durch, legt das Gesamtsystem beispielsweise folgende Strecke zurück:

$$1 - 2 - 3 - 2 - 3 - 4 - 6 - 3 - 5 - 2 - 1.$$

Nach der Theorie der Metabassins hätte sich das Gesamtsystem während dieses Zeitabschnitts ausschließlich im Metabassin 1 aufgehalten. Betrachten wir ein weiteres Beispiel:

$$1 - 3 - 2 - 4 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 3 - 2 - 4 - 5 - 6 - 4 - 6 - 7 - 4.$$

Hier hätte sich das Gesamtsystem zunächst im Metabassin 1 aufgehalten, dann wäre es ins Metabassin 2 und danach ins Metabassin 4 gewechselt, wo es bis zum Ende bleibt. Bei der Anwendung der Metabassin-Theorie hält man also das erste Minimumgebiet (bezeichnen wir es mit A), in dem sich das Gesamtsystem aufhält, fest und schaut, ob das System noch ein oder mehrere Male hierher zurückkehrt. Unter Metabassin A werden nun all die Minimumgebiete zusammengefasst, in denen sich das Gesamtsystem in der

Zeit der ersten Begegnung mit dem Minimumgebiet A bis zur letzten Begegnung mit dem Minimumgebiet A aufgehalten hat. Danach hält man das nächste Minimumgebiet fest und schaut, ob das Gesamtsystem noch einmal dorthin zurückkehrt, usw. Führt man dieses Verfahren an der kompletten Beobachtungsreihe durch, erhält man eine völlig andere Art der Bewegung. Das Gesamtsystem hält sich eine bestimmte Zeit in einem Metabassin auf und „springt“ dann ins nächste Metabassin, usw.

An dieser Stelle kommt der CTRW ins Spiel. Allerdings haben wir es hier nicht mit einem eindimensionalen CTRW zu tun, wie wir ihn in Kapitel 2 eingeführt haben, sondern mit einem mehrdimensionalen CTRW. Daher geben wir zunächst die Definition eines *d-dimensionalen CTRW* an:

### 3.3.1 Definition.

Es seien  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  Folgen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in  $\mathbb{R}_0^+$  bzw.  $\mathbb{R}^d$ . Weiter werde angenommen, dass  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  und  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  voneinander unabhängig seien und  $T_0 = Y_0 = 0$  gelte. Dann wird der stochastische Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$ , der definiert ist durch

$$(3.3) \quad X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

wobei  $N_t$  wie in (2.1) definiert ist, *d*-dimensionaler Random Walk in stetiger Zeit, kurz *d*-dimensionaler CTRW, genannt.

Wir haben uns die Position des Gesamtsystems im Minimum jedes Metabassins und die Aufenthaltslänge des Gesamtsystems in jedem Metabassin ausgeben lassen und als Realisierungen der obigen Zufallsvariablen  $Y_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M\}$  ( $M$  sei hierbei die Anzahl der Metabassins), bzw.  $T_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M\}$ , aus der obigen Definition 3.3.1 interpretiert. Damit der aus diesen Zufallsvariablen nach obiger Gleichung (3.3) entstehende stochastische Prozess ein  $(3 \cdot 65)$ -dimensionaler CTRW ist, sind die geforderten Unabhängigkeitsbedingungen zu prüfen. Bei unseren Studien haben wir uns auf den stochastischen Prozess  $(\hat{X}_t)_{t \geq 0}$ , der durch

$$\hat{X}_t = \sum_{i=1}^{N_t} D_i$$

mit  $N_t$  wie in (2.1) und einer Folge reellwertiger Zufallsgrößen  $D_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M\}$  gegeben ist, beschränkt und für diesen eindimensionalen CTRW die geforderten Unabhängigkeiten geprüft.  $D_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M\}$ , bezeichnet dabei die effektive Strecke, die das Gesamtsystem vom  $(i-1)$ -ten Metabassin zum  $i$ -ten Metabassin zurückgelegt hat, wobei wir  $D_1$  erhalten haben, indem wir die Strecke von einem fiktiven Nullpunkt zum ersten Metabassin berechnet haben. Mittels selbstgeschriebener Computerprogramme haben wir die Korrelation zwischen den Zufallsgrößen betrachtet: Zuerst haben

wir uns die Korrelation zwischen den Zufallsvektoren  $D = (D_1, \dots, D_M)$  und  $T = (T_1, \dots, T_M)$  angesehen, indem wir den Korrelationskoeffizienten

$$\rho(D, T) = \frac{\text{Kov}(D, T)}{(\text{Var } D)^{1/2}(\text{Var } T)^{1/2}}$$

berechnet haben. Unser Programm errechnete  $\rho(D, T) = 0,0424259$ . Um die Korrelation der  $D_i, i \in \{1, \dots, M\}$ , bzw.  $T_i, i \in \{1, \dots, M\}$ , betrachten zu können, haben wir mit einer leichten Variation dieser Formel gearbeitet:

$$\rho_m(\log D) = \frac{(M - m)^{-1} \sum_{i=1}^{M-m} ((\log D_{i+m} - \mathbb{E} \log D)(\log D_i - \mathbb{E} \log D))}{\mathbb{E}(\log D - \mathbb{E} \log D)^2},$$

wobei  $m \in \mathbb{N}$  beliebig wählbar ist und  $\log D := (\log D_1, \dots, \log D_M)$ . In Abbildung 3.5 ist  $\rho_m(\log D)$  gegen  $m$  aufgetragen:

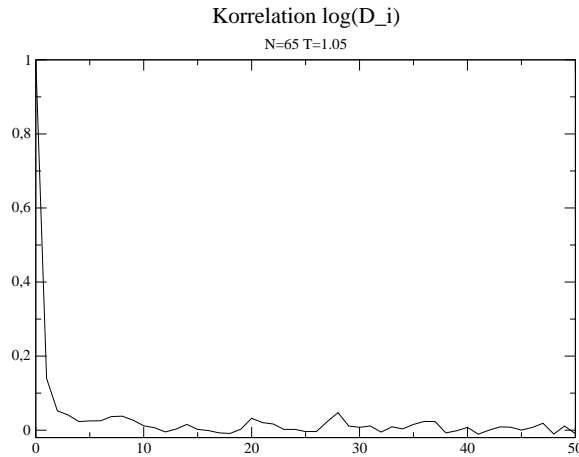


Abbildung 3.5: Korrelationsabbildung der Folge  $\log D_i, i \in \{1, \dots, M\}$ , für  $1 \leq m \leq 50$

Hier erkennt man, dass der Graph für  $m = 3$  kleiner als 0,1 ist und für  $m = 2$  erst knapp den Wert 0,1 überschritten hat. Dies spricht dafür, dass die Folge  $D_i, i \in \{1, \dots, M\}$ , unkorreliert ist. Für die Folge  $T_i, i \in \{1, \dots, M\}$ , haben wir durch analoges Vorgehen einen sehr ähnlichen Graphen erhalten, so dass wir zu dem Schluss kommen können, dass es sich bei dem stochastischen Prozess  $(\hat{X}_t)_{t \geq 0}$  um einen eindimensionalen CTRW handelt. Dies ist ein Indiz dafür, dass  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein  $(3 \cdot 65)$ -dimensionaler CTRW ist.

Genauere Informationen über die Durchführung der Simulationen und über die Theorie der Metabassins finden sich in dem Werk „The Dynamics of a Small Model Glass Former as Viewed from Its Potential Energy Landscape“ von B. Doliwa ([Do]). Zum Abschluss möchte ich den Artikel „The

potential energy landscape of glass-forming systems - What do we learn about the dynamics?“ von Prof. Dr. Heuer erwähnen, der in Kürze in der Zeitschrift *Journal of Physics: Condensed Matter (topical review)* erscheinen wird. Ein Teil dieses Artikels beschäftigt sich mit dem Soft-Spheres-System und enthält die Ergebnisse unserer Simulationen, die aus chemischer Sicht sehr interessant sind, aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.





# Anhang A

## Hilfsergebnisse

Hier sind die Sätze, Lemmata und Definitionen aufgeführt, die in den Kapiteln 1 und 2 benutzt wurden, aber nicht sinnvoll integriert werden konnten. Wir werden allerdings nicht all diese Sätze und Lemmata beweisen. Analytische Hilfsmittel und bekannte Ergebnisse, deren Beweise innerhalb der Vorlesungen vorgetragen wurden, werden ohne Beweis angegeben. Ebenso wie Aussagen, deren Beweise sich auf zahlreiche Ergebnisse anderer Theorien beziehen. Es wäre zu umfangreich und daher nicht sinnvoll, solche Beweise im Anhang einer Diplomarbeit zu präsentieren.

Dieses Kapitel ist eine Ansammlung verschiedenster Aussagen, die nur in einigen, wenigen Fällen einen direkten Zusammenhang haben. Der Übersichtlichkeit halber sind deshalb die Ergebnisse danach sortiert, ob sie im ersten oder zweiten Kapitel benutzt werden und zu welcher Theorie sie gehören.

### A.1 Ergebnisse für Kapitel 1

#### A.1.1 Lemma (vgl. [Fe1], V.5, Lemma 2).

*Wenn die Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig sind und symmetrische Verteilungen besitzen, dann hat auch  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  eine symmetrische Verteilung und es gilt*

$$\mathbb{P}(|S_n| > t) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| > t \right).$$

*Beweis.* Seien  $\tau := \inf\{k \in \{1, \dots, n\} : |X_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|\}$  und  $M := X_\tau$  sowie  $T := S_n - M$ . Das Paar  $(M, T)$  ist in dem Sinne symmetrisch verteilt, dass die vier Kombinationen  $(\pm M, \pm T)$  dieselbe Verteilung besitzen, was sich leicht aus der Unabhängigkeit und der symmetrischen Verteilung der  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ergibt. Es gilt:

$$\mathbb{P}(M > t) \leq \mathbb{P}(M > t, T \geq 0) + \mathbb{P}(M > t, T \leq 0).$$

Da die beiden Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite gleich sind, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n| > t) &\geq \mathbb{P}(S_n > t) = \mathbb{P}(M + T > t) \\ &\geq \mathbb{P}(M > t, T \geq 0) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}(M > t), \end{aligned}$$

womit wir die Behauptung bewiesen haben.  $\square$

**A.1.2 Lemma (vgl. [Fe2], V.5, Lemma 1).**

Wenn  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig und identisch verteilt sind, gilt für  $t > 0$

$$(A.1) \quad \mathbb{P}(|X_1 - X_2| > t) \leq 2 \mathbb{P}(|X_1| > t/2).$$

Wenn  $a \geq 0$  so gewählt ist, dass  $\mathbb{P}(X_i \geq a) \leq 1 - p$  und  $\mathbb{P}(X_i \leq -a) \leq 1 - p$  gilt, ist

$$(A.2) \quad \mathbb{P}(|X_1 - X_2| \geq t) \geq p \mathbb{P}(|X_1| > t + a).$$

*Beweis.* Zu (A.1):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_1 - X_2| > t) &\leq \mathbb{P}(|X_1| > t/2 \text{ oder } |X_2| > t/2) \\ &\leq \mathbb{P}(|X_1| > t/2) + \mathbb{P}(|X_2| > t/2) = 2 \mathbb{P}(|X_1| > t/2). \end{aligned}$$

Zu (A.2): Sei  $a \geq 0$  so gewählt, dass  $\mathbb{P}(X_i \geq a) \leq 1 - p$  und  $\mathbb{P}(X_i \leq -a) \leq 1 - p$  gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_1 - X_2| \geq t) &\geq \mathbb{P}(X_1 \geq t + a, X_2 < a) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 \leq -(t + a), X_2 > -a) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \geq t + a) \mathbb{P}(X_2 < a) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 \leq -(t + a)) \mathbb{P}(X_2 > -a) \\ &\geq p (\mathbb{P}(X_1 \geq t + a) + \mathbb{P}(X_1 \leq -(t + a))) \\ &= p \mathbb{P}(|X_1| \geq t + a). \end{aligned}$$

$\square$

**A.1.3 Satz (vgl. [Br], 9.5, Theorem 9.17).**

$X$  hat eine unendlich teilbare Verteilung, wenn Konstanten  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 \geq 0$  und ein endliches Maß  $\nu$  auf  $\mathbb{R}^*$  existieren, so dass seine charakteristische Funktion  $\phi$  von der Gestalt

$$(A.3) \quad \log \phi(t) = i\beta t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx)$$

ist. Umgekehrt ist eine charakteristische Funktion einer solchen Gestalt die charakteristische Funktion einer unendlich teilbaren Verteilung.

**A.1.4 Satz.**

Die Parameter  $\beta, \sigma^2$  und  $\nu$  der obigen Darstellung (A.3) einer unendlich teilbaren Verteilung sind eindeutig bestimmt.

Der folgende Beweis verläuft analog zum Beweis der Eindeutigkeit der Parameter der Lévy-Khintchine-Darstellung aus Satz 48.9 in [A].

*Beweis.* Es sei vorausgesetzt, dass der Logarithmus der charakteristischen Funktion  $\phi$  einer unendlich teilbaren Verteilung  $R$  von der Gestalt (A.3) sei. Nehmen wir nun an, dass außerdem

$$\log \phi(t) = i\xi t - \frac{\tau^2 t^2}{2} + \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \mu(dx)$$

mit  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\tau^2 \geq 0$  und einem endlichen Maß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^*$  gilt. Dann erhalten wir folgende Gleichung

$$(A.4) \quad i(\beta - \xi)t - \frac{(\sigma^2 - \tau^2)t^2}{2} + \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} (\nu - \mu)(dx) = 0$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Betrachten wir zunächst nur den Realteil, so erhalten wir für  $t \neq 0$ :

$$2 \int (\cos tx - 1) \frac{1+x^2}{t^2 x^2} (\nu - \mu)(dx) = \sigma^2 - \tau^2.$$

Weil

$$\left| \int (\cos tx - 1) \frac{1+x^2}{t^2 x^2} (\nu - \mu)(dx) \right| \leq \frac{1}{t^2} \int |1 - \cos tx| \left| \frac{1+x^2}{x^2} \right| (\nu + \mu)(dx)$$

ist und wir (1.15) und (1.16) bereits bewiesen haben, können wir den Satz von der majorisierten Konvergenz (vgl. [E], IV.5.2) anwenden und erhalten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2 \int (\cos(tx) - 1) \frac{1+x^2}{t^2 x^2} (\nu - \mu)(dx) = 0.$$

Daher muss  $\sigma^2 = \tau^2$  gelten.

Als nächstes wollen wir mit Hilfe des Satzes von Fubini zeigen, dass die

beiden Maße  $\nu$  und  $\mu$  übereinstimmen:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \int_{u-1}^{u+1} \underbrace{\left( i(\beta - \xi)t + \int \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} (\nu - \mu)(dx) \right)}_{=0 \text{ nach (A.4)}} dt \\
&\quad - \underbrace{\left( i(\beta - \xi)u + \int \left( e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} (\nu - \mu)(dx) \right)}_{=0 \text{ nach (A.4)}} \\
&= \frac{1}{2} \int \int_{u-1}^{u+1} \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dt (\nu - \mu)(dx) \\
&\quad - \int \left( e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} (\nu - \mu)(dx) \\
&= \int \left( e^{iux} \frac{1}{2ix} (e^{ix} - e^{-ix}) - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} (\nu - \mu)(dx) \\
&\quad - \int \left( e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} (\nu - \mu)(dx) \\
&= \int \left( e^{iux} \frac{\sin x}{x} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} (\nu - \mu)(dx) \\
&\quad - \int \left( e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} (\nu - \mu)(dx) \\
&= \int e^{iux} \left( \frac{\sin x}{x} - 1 \right) \frac{1+x^2}{x^2} (\nu - \mu)(dx).
\end{aligned}$$

Da die Maße  $\tilde{\nu}(dx) := \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \frac{1+x^2}{x^2} \nu(dx)$  und  $\tilde{\mu}(dx) := \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \frac{1+x^2}{x^2} \mu(dx)$  endlich sind, was wir gleich zeigen werden, folgt nach dem Eindeutigkeitsatz für Fourier-Transformierte ihre Gleichheit. Und da  $1 - \frac{\sin x}{x}$  auf ganz  $\mathbb{R}^*$  positiv ist, folgt:

$$\frac{d\nu}{d\tilde{\nu}}(x) = \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x) = \frac{d\mu}{d\tilde{\mu}}(x),$$

d.h.  $\nu = \mu$ .

Zeigen wir nun, dass die Maße  $\tilde{\nu}$  und  $\tilde{\mu}$  endlich sind: Wir wissen, dass  $\nu$  und  $\mu$  endliche Maße mit  $\nu(\{0\}) = 0 = \mu(\{0\})$  sind. Außerdem gelten:

$$0 \leq 1 - \frac{\sin x}{x} \leq 2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^* \text{ und } \frac{1+x^2}{x^2} \leq 2 \text{ für alle } |x| \geq 1.$$

Demnach ist die Funktion  $x \mapsto \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \frac{1+x^2}{x^2}$  für alle  $|x| \geq 1$  beschränkt.

Sei  $|x| \leq 1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \left| \left( 1 - \frac{\sin x}{x} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \right| &\leq 2 \left| \frac{1}{x^2} \right| \left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| \\
 &= 2 \left| \frac{1}{x^2} \right| \left| 1 - \frac{1}{x} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \\
 &= 2 \left| \frac{1}{x^2} \right| \left| \frac{1}{x} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \\
 &\leq 2 \sum_{k \geq 0} \frac{|x|^{2k}}{(2k+3)!} \\
 &\leq 2e^{|x|} \leq 2e.
 \end{aligned}$$

Setzt man in (A.4)  $\sigma^2 = \tau^2$  und  $\nu = \mu$ , so erhält man auch die Gleichheit von  $\beta$  und  $\xi$ .  $\square$

**A.1.5 Lemma (vgl. [Br], 10.2, Riemann-Lebesgue Lemma).**

Ist  $f(x)$   $\mathfrak{B}_1$ -messbar und ist  $\int |f(x)| dx$  endlich, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int e^{itx} f(x) dx = 0.$$

**A.1.6 Lemma (vgl. [Fe2], VIII.2, Lemma 1).**

$F$  und  $G$  seien nichtdegenerierte Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Wenn für eine Folge  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Konstanten  $a_n > 0$ ,  $\alpha_n > 0$  und  $b_n, \beta_n \in \mathbb{R}$

$$(A.5) \quad F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x), \quad F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(x)$$

für alle  $x \in \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$  gilt, gibt es Konstanten  $A > 0$  und  $B \in \mathbb{R}$ , so dass

$$(A.6) \quad G(x) = F(Ax + B)$$

und

$$(A.7) \quad \frac{\alpha_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A, \quad \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B.$$

Gilt umgekehrt (A.7), so implizieren sich die beiden Aussagen in (A.5) gegenseitig und auch (A.6) ist gültig.

*Beweis.* Es gelte (A.7). Seien  $x > 0$ ,  $y := Ax + B$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann ist

$$a_n(y - \varepsilon) + b_n = a_n Ax + a_n B + b_n - a_n \varepsilon.$$

Aus (A.7) folgt, dass ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \geq n_0$

- (i)  $a_n A < \alpha_n + a_n \varepsilon / (2x)$  und  $a_n A > \alpha_n - a_n \varepsilon / (2x)$ ,  
(ii)  $a_n B + b_n < \beta_n + a_n \varepsilon / 2$  und  $a_n B + b_n > \beta_n - a_n \varepsilon / 2$

gelten. Damit ist

$$\begin{aligned}
a_n A x + a_n B + b_n - a_n \varepsilon &< \alpha_n x + a_n \varepsilon / 2 + \beta_n + a_n \varepsilon / 2 - a_n \varepsilon \\
&= \alpha_n x + \beta_n \\
&< (a_n A + a_n \varepsilon / (2x)) x + (a_n B + b_n + a_n \varepsilon / 2) \\
&= a_n A x + a_n \varepsilon + a_n B + b_n \\
&= a_n (y + \varepsilon) + b_n
\end{aligned}$$

und daher gilt für alle  $n \geq n_0$ :

$$F_n(a_n(y - \varepsilon) + b_n) \leq F_n(\alpha_n x + \beta_n) \leq F_n(a_n(y + \varepsilon) + b_n).$$

Aus dieser Ungleichung wollen wir nun folgern, dass sich die Aussagen aus (A.5) gegenseitig implizieren. Gehen wir also davon aus, dass die erste der beiden Aussagen gilt. Dann können wir  $F_n(\alpha_n x + \beta_n) \rightarrow F(y)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) folgern, falls  $y = Ax + B \in \mathcal{C}(F)$  gilt. Definieren wir  $G(x) := F(Ax + B)$ , so haben wir die Gültigkeit der zweiten Aussage und zudem auch gleich (A.6) für  $x > 0$  gezeigt. Für  $x \leq 0$  kann man analog vorgehen. Ebenso lässt sich die erste Aussage der Gleichung (A.5) völlig analog aus der zweiten folgern.

Es gelte nun (A.5). Seien  $x' < x'' \in \mathcal{C}(G)$  so gewählt, dass  $0 < G(x') \leq G(x'') < 1$  gilt. Dann existieren  $y', y'' \in \mathcal{C}(F)$  mit  $F(y') < G(x') \leq G(x'') < F(y'')$  und wir können für alle  $n \geq n_0$  mit geeignetem  $n_0 \in \mathbb{N}$  aus (A.5) schließen, dass

$$a_n y' + b_n \leq \alpha_n x' + \beta_n \leq \alpha_n x'' + \beta_n \leq a_n y'' + b_n$$

gilt, und daraus für  $n \geq n_0$  weiter folgern:

$$\frac{\alpha_n}{a_n} \leq \frac{y'' - y'}{x'' - x'}, \quad \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \in \left[ y' - \frac{\alpha_n}{a_n} x', y'' - \frac{\alpha_n}{a_n} x'' \right].$$

Aus Symmetriegründen bleibt auch die Folge  $(a_n / \alpha_n)_{n \geq 0}$  beschränkt. Daher existiert nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß eine Folge  $(n_k)_{k \geq 1}$  mit

$$\frac{\alpha_{n_k}}{a_{n_k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A, \quad \frac{\beta_{n_k} - b_{n_k}}{a_{n_k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} B$$

für ein  $A > 0$  und ein  $B \in \mathbb{R}$ . Die Umkehraussage des Lemmas haben wir bereits im ersten Teil dieses Beweises gezeigt und können deshalb folgern, dass (A.6) gilt, worin  $A$  und  $B$  eindeutig bestimmt sind. Dies impliziert, dass für jede Folge  $(n_j)_{j \geq 1}$  eine Teilfolge  $(n'_j)_{j \geq 1}$  existiert, für die (A.7) für  $j \rightarrow \infty$  gilt. Dies wiederum zeigt, dass (A.7) auch für  $n \rightarrow \infty$  gültig ist.  $\square$

**A.1.7 Satz (vgl. [Sam], 1.2, Proposition 1.2.11).**

Seien  $0 < \alpha < 1$ ,  $\delta > 0$ ,  $N_\delta$  eine Zufallsvariable mit  $N_\delta \sim \text{Poi}(\delta^{-\alpha})$  und  $Y_{\delta,k}$ ,  $k \geq 1$ , unabhängige, identisch verteilte und positive Zufallsvariablen, die von  $N_\delta$  unabhängig sind, mit

$$\mathbb{P}(Y_{\delta,k} > \lambda) = \begin{cases} \delta^\alpha \lambda^{-\alpha} & \text{für } \lambda > \delta, \\ 1 & \text{für } \lambda \leq \delta. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$X_\delta := \sum_{k=1}^{N_\delta} Y_{\delta,k} \xrightarrow{d} X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0) \quad (\delta \rightarrow 0)$$

mit

$$\sigma^\alpha = \Gamma(1 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2).$$

Ferner ist die Laplace-Transformierte  $\varphi$  von  $X$  gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{-tX} = e^{-a^\alpha t^\alpha}, \quad t \geq 0,$$

mit  $a > 0$  und  $a^\alpha = \Gamma(1 - \alpha) = \sigma^\alpha / \cos(\pi\alpha/2)$ .

*Beweis.* Für die erzeugende Funktion  $f_\delta$  von  $N_\delta$  gilt für  $|r| \leq 1$ :

$$\begin{aligned} f_\delta(r) &= \mathbb{E} r^{N_\delta} = \sum_{k \geq 0} r^k \mathbb{P}(N_\delta = k) = \sum_{k \geq 0} r^k \frac{(\delta^{-\alpha})^k}{k!} e^{-\delta^{-\alpha}} \\ &= e^{-\delta^{-\alpha}} e^{r\delta^{-\alpha}} = e^{(r-1)\delta^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

Für die Fourier-Transformierte  $\phi_\delta$  von  $X_\delta$  folgt mit (52.4) aus [A]:

$$\begin{aligned} \phi_\delta(t) &= \mathbb{E} e^{itX_\delta} = \mathbb{E} (\mathbb{E} (e^{itX_\delta} | N_\delta)) \\ &= \mathbb{E} \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{N_\delta=k\}} \mathbb{E} (e^{itX_\delta} | N_\delta = k) \\ &= \mathbb{E} \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{N_\delta=k\}} \mathbb{P}(N_\delta = k)^{-1} \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{\{N_\delta=k\}} e^{it \sum_{j=1}^k Y_{\delta,j}} \right) \\ &= \mathbb{E} \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{N_\delta=k\}} \mathbb{P}(N_\delta = k)^{-1} \mathbb{P}(N_\delta = k) (\mathbb{E} e^{itY_{\delta,1}})^k \\ &= \mathbb{E} \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{N_\delta=k\}} (\mathbb{E} e^{itY_{\delta,1}})^k \\ &= \mathbb{E} (\mathbb{E} e^{itY_{\delta,1}})^{N_\delta} = f_\delta(\mathbb{E} e^{itY_{\delta,1}}). \end{aligned}$$

Aus der vorherigen Rechnung wissen wir, dass

$$\begin{aligned} f_\delta(\mathbb{E} e^{itY_{\delta,1}}) &= \exp(\delta^{-\alpha} (\mathbb{E} (e^{itY_{\delta,1}} - 1))) \\ &= \exp\left(\delta^{-\alpha} \int_\delta^\infty (e^{itx} - 1) \delta^\alpha \alpha x^{-(\alpha+1)} dx\right) \\ &= \exp\left(\int_\delta^\infty (e^{itx} - 1) \alpha x^{-(\alpha+1)} dx\right) \end{aligned}$$

ist, und der Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0$  liefert:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} e^{itX_\delta} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left( \int_0^\infty (e^{itx} - 1) \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right) \\ &= \exp \left( \int_0^\infty (e^{itx} - 1) \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right), \end{aligned}$$

wobei hier der Satz von der majorisierten Konvergenz verwendet wurde. Wir müssen also  $\int_0^\infty (e^{itx} - 1) \alpha x^{-(\alpha+1)} dx$  genauer bestimmen. Durch die Substitution  $x \mapsto t^{-1}x$  ( $t > 0$ ) und mit Hilfe partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (e^{itx} - 1) \alpha x^{-(\alpha+1)} dx &= \int_0^\infty (e^{ix} - 1) \alpha t^{\alpha+1} x^{-(\alpha+1)} \frac{1}{t} dx \\ &= \alpha t^\alpha \int_0^\infty (e^{ix} - 1) x^{-(\alpha+1)} dx \\ &\stackrel{\text{A.1.11}}{=} -t^\alpha e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha} \Gamma(1 - \alpha). \end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir mit Hilfe von Satz 1.2.4 die Fourier-Transformierte  $\phi_X$  von  $X$  für  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \exp \left( -\sigma^\alpha t^\alpha \left( 1 - i \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \\ &= \exp \left( -\Gamma(1 - \alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} t^\alpha \left( 1 - i \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \\ &= \exp \left( -t^\alpha e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha} \Gamma(1 - \alpha) \right). \end{aligned}$$

Die Laplace-Transformierte erhalten wir durch eine analoge Rechnung mit  $-t$  anstelle von  $it$ ,  $t \geq 0$ .  $\square$

**A.1.8 Satz (vgl. [Sam], 1.2, Proposition 1.2.12).**

Die Laplace-Transformierte  $\varphi$  von  $X$  mit  $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ ,  $0 < \alpha \leq 2$  und  $\sigma > 0$ , ist von der Gestalt

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \mathbb{E} e^{-tX} = \exp \left( -\frac{\sigma^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} t^\alpha \right) \text{ für } \alpha \neq 1, \\ \varphi(t) &= \mathbb{E} e^{-tX} = \exp \left( \sigma \frac{2}{\pi} t \log t \right) \text{ für } \alpha = 1. \end{aligned}$$

*Beweis.* Nach Satz A.1.7 gilt für  $0 < \alpha < 1$  und  $t \geq 0$

$$\varphi(t) = \exp(-t^\alpha \Gamma(1 - \alpha)) = \exp \left( -t^\alpha \frac{\sigma^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \right).$$

Da der Fall  $\alpha \geq 1$  um einiges schwieriger zu beweisen ist und in dieser Arbeit nicht benötigt wird, bleibt er ohne Beweis.  $\square$



**A.1.9 Satz (vgl. [Sam], 1.3, Proposition 1.3.1).**

Gegeben seien  $X \sim S_{\alpha'}(\sigma, 0, 0)$  mit  $0 < \alpha' \leq 2$  und  $0 < \alpha < \alpha'$ . Weiter sei  $Y \sim S_{\alpha/\alpha'}\left(\left(\cos \frac{\pi\alpha}{2\alpha'}\right)^{\alpha'/\alpha}, 1, 0\right)$  stochastisch unabhängig von  $X$ . Dann gilt:

$$Z := Y^{1/\alpha'} X \sim S_{\alpha}(\sigma, 0, 0).$$

*Beweis.*  $X$  hat die Fourier-Transformierte  $\phi(t) = \mathbb{E} e^{itX} = \exp(-\sigma^{\alpha'} |t|^{\alpha'})$  und  $Y$  hat die Laplace-Transformierte

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{-tY} \stackrel{\text{A.1.8}}{=} \exp\left(-\frac{\left(\left(\cos \frac{\pi\alpha}{2\alpha'}\right)^{\alpha'/\alpha}\right)^{\alpha/\alpha'}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2\alpha'}} t^{\alpha/\alpha'}\right) = \exp(-t^{\alpha/\alpha'}).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{itZ} &= \mathbb{E} \left( \exp\left(itY^{1/\alpha'} X\right) \right) = \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \exp\left(itY^{1/\alpha'} X\right) \middle| Y \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \phi\left(tY^{1/\alpha'}\right) = \mathbb{E} \exp\left(-\sigma^{\alpha'} |tY^{1/\alpha'}|^{\alpha'}\right) \\ &= \mathbb{E} \exp\left(-\sigma^{\alpha'} |t|^{\alpha'} Y\right) = \varphi\left(\sigma^{\alpha'} |t|^{\alpha'}\right) \\ &= \exp\left(-\sigma^{\alpha} |t|^{\alpha}\right), \end{aligned}$$

wobei  $Y \geq 0$  f.s. ausgenutzt wurde.  $\square$

**A.1.10 Satz (vgl. [Bi], 1.7, Theorem 1.7.1).**

$U$  sei eine monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion auf  $\mathbb{R}$  mit  $U(x) = 0$  für alle  $x < 0$ . Wenn  $l$  eine langsam variierende Funktion ist und  $c \geq 0$ ,  $\rho \geq 0$  gelten, sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$(A.8) \quad U(x) \sim cx^{\rho} l(x) / \Gamma(1 + \rho) \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$(A.9) \quad \tilde{U}(s) \sim cs^{-\rho} l(1/s) \quad (s \downarrow 0)$$

mit  $\tilde{U}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} U(dx)$ .

**A.1.11 Satz.**

Für  $0 < \alpha < 1$  ist

$$\int_0^{\infty} (e^{ix} - 1) \frac{1}{x^{1+\alpha}} dx = e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha} L(\alpha),$$

wobei  $L(\alpha) := \int_0^{\infty} (e^{-x} - 1)x^{-(1+\alpha)} dx = -\frac{1}{\alpha} \Gamma(1 - \alpha) < 0$  ist.

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir betrachten für diesen Beweis den geschlossenen Integrationsweg  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4$  in  $\mathbb{C}$  mit

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto \varepsilon + t(R - \varepsilon), \\ \gamma_2 &: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto Re^{it}, \\ \gamma_3 &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto iR + t(i\varepsilon - iR), \\ \gamma_4 &: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto \varepsilon e^{it}.\end{aligned}$$

Da die Funktion  $f(z) = (e^{iz} - 1)z^{-(1+\alpha)}$ , wobei  $z^{-(1+\alpha)}$  den Hauptzweig der Potenz bezeichne, in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  holomorph ist, folgt mit dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Mit Hilfe der Standardabschätzung können wir folgern, dass

$$\left| \int_{\gamma_2} (e^{iz} - 1) \frac{1}{z^{1+\alpha}} dz \right| \leq \frac{\pi R}{2} 2 R^{-(1+\alpha)} = \pi R^{-\alpha} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

und

$$\left| \int_{\gamma_4} (e^{iz} - 1) \frac{1}{z^{1+\alpha}} dz \right| \leq \frac{\pi \varepsilon}{2} C \varepsilon \varepsilon^{-(1+\alpha)} = C \frac{\pi}{2} \varepsilon^{1-\alpha} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Da  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^{\infty} (e^{ix} - 1)x^{-(1+\alpha)} dx$  gilt, folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} (e^{ix} - 1)x^{-(1+\alpha)} dx &= - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\gamma_3} f(z) dz \\ &= \int_0^{i\infty} (e^{iy} - 1)y^{-(1+\alpha)} dy \\ &= \int_0^{\infty} i(e^{-y} - 1)(iy)^{-(1+\alpha)} dy \\ &= i^{-\alpha} \underbrace{\int_0^{\infty} (e^{-y} - 1)y^{-(1+\alpha)} dy}_{<0} \\ &= e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha} L(\alpha).\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration können wir  $L(\alpha)$  genau bestimmen:

$$L(\alpha) = \int_0^{\infty} (e^{-x} - 1)x^{-(1+\alpha)} dx = -\frac{1}{\alpha} \Gamma(1 - \alpha) \quad (0 < \alpha < 1).$$

□

## A.2 Ergebnisse für Kapitel 2

### A.2.1 Definition (vgl. [Bi], 1.2.1, Definition).

Sei  $l$  eine positive, messbare Funktion in einer Umgebung  $[X, \infty)$  von  $\infty$ , die die Bedingung

$$\frac{l(\lambda x)}{l(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \text{ für alle } \lambda > 0$$

erfüllt. Dann heißt  $l$  langsam variierend.

### A.2.2 Satz (vgl. [Bi], 1.5.6, Proposition 1.5.10).

Ist  $l$  langsam variierend und  $\alpha < -1$ , dann konvergiert  $\int^\infty t^\alpha l(t) dt$  und es gilt:

$$\frac{x^{\alpha+1}l(x)}{\int_x^\infty t^\alpha l(t) dt} \rightarrow -\alpha - 1 \quad (x \rightarrow \infty).$$

### A.2.3 Satz (vgl. [Bi], 1.7.6, Theorem 1.7.6).

Seien  $V \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $\rho > -1$ ,  $\tilde{V}(s) := s \int_0^\infty e^{-sx} V(x) dx < \infty$  für  $s > 0$  und  $l \in \mathfrak{R}_0$ . Ist die Aussage

$$V(x) \sim cx^\rho l(x) / \Gamma(1 + \rho) \quad (x \rightarrow \infty)$$

wahr, dann gilt auch

$$\tilde{V}(s) \sim cs^{-\rho} l(1/s) \quad (s \downarrow 0).$$

Die umgekehrte Implikation ist gültig, wenn zusätzlich

$$(A.10) \quad \lim_{\lambda \downarrow 1} \liminf_{x \rightarrow \infty} \inf_{t \in [1, \lambda]} \frac{U(tx) - U(x)}{x^\rho l(x)} \geq 0$$

gilt.

### A.2.4 Satz (vgl. [Wi], Theorem 5.2).

Es seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen und  $\tau_1, \tau_2, \dots$  eine Folge nichtnegativer, ganzzahliger Zufallsvariablen mit Median  $\mu_n$ . Wenn die folgenden drei Bedingungen

$$(i) \quad \tau_n \xrightarrow{P} \infty,$$

$$(ii) \quad \tau_n / \mu_n \xrightarrow{P} \xi, \text{ wobei } \xi \text{ eine positive Variable ist,}$$

$$(iii) \quad \text{für ein } c_n \text{ gilt } S_n / c_n \xrightarrow{d} Y \text{ für eine Zufallsgröße } Y \text{ mit stabiler Verteilung mit charakteristischem Exponenten } \alpha$$

erfüllt sind, gilt  $S_{\tau_n} / c_{\mu_n} \xrightarrow{d} \gamma^{1/\alpha} Y \stackrel{d}{=} \xi^{1/\alpha} Y$ , wobei  $\gamma$  unabhängig von  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ist und wie  $\xi$  verteilt ist.

**A.2.5 Lemma (vgl. [Ke], Lemma 1).**

Es seien  $Z_0, Z_1, \dots$  eine irreduzible, endliche Markov-Kette mit Zustandsraum  $\{1, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $F_1, \dots, F_n$  Verteilungsfunktionen und  $X_0, X_1, \dots$  eine Folge von Zufallsvariablen, die der Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 \leq x_0, X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k | Z_0 = j_0, Z_1 = j_1, Z_2 = j_2, \dots) \\ = \prod_{i=0}^k F_{j_i}(x_i) \end{aligned}$$

genügen. Weiter sei  $N(\lambda)$  eine nichtnegative, ganzzahlige Zufallsvariable, so dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(\lambda) \leq k | X_0, X_1, X_2, \dots, Z_0, Z_1, Z_2, \dots) \\ = \mathbb{P}(N(\lambda) \leq k | X_0, \dots, X_k, Z_0, \dots, Z_k) \end{aligned}$$

gilt. Wenn Funktionen  $f(k) = k^\alpha L_1(k)$  ( $\alpha > 0$ ) und  $h(\lambda) = \lambda^\beta L_2(\lambda)$  ( $\beta \geq 0, h(\lambda) \rightarrow \infty$  für  $\lambda \rightarrow \infty$ ), wobei  $L_1$  und  $L_2$  langsam variierende Funktionen sind, existieren, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{\sum_{i=0}^k X_i}{f(k)} \leq x, \frac{N(\lambda)}{h(\lambda)} \leq y \right) = F(x)G(y)$$

ist, gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{\sum_{i=0}^{N(\lambda)} X_i}{f(h(\lambda))} \leq x \right) = \int_0^\infty F(xy^{-\alpha}) G(dy).$$

**A.2.6 Lemma (vgl. [Fe2], XIV, Lemma).**

Sei  $F$  die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf  $(0, \infty)$  mit  $1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , für eine langsam variierende Funktion  $L : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ . Dann gilt

$$(A.11) \quad U(x) \sim \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)} \frac{x^\alpha}{L(x)} \quad (x \rightarrow \infty)$$

für  $U = \sum F^{*(n)}$  und

$$(A.12) \quad (1 - F(x))U(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha}.$$

*Beweis.* Setzen wir (A.11) als gegeben voraus, so können wir Gleichung (A.12) folgern, denn:

$$\begin{aligned} (1 - F(x))U(x) &= x^{-\alpha} L(x) U(x) \\ &\stackrel{(A.11)}{\sim} x^{-\alpha} L(x) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)} \frac{x^\alpha}{L(x)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\alpha\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \quad (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Es genügt also, (A.11) zu beweisen. Sei  $\varphi$  die Laplace-Transformierte von  $F$ . Dann gilt mit Hilfe des Satzes von Fubini für  $t > 0$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_{[0,\infty)} e^{-tx} F(dx) = \int_{[0,\infty)} t \int_x^\infty e^{-tu} du F(dx) \\ &= \int_0^\infty t \int_{[0,u]} F(dx) e^{-tu} du = \int_0^\infty t e^{-tu} F(u) du,\end{aligned}$$

woraus wir

$$(A.13) \quad \int_0^\infty e^{-tx} (1 - F(x)) dx = \frac{1 - \varphi(t)}{t}$$

folgern können. Wir wollen nun Satz A.2.3 anwenden und wählen dazu  $V(x) := 1 - F(x)$ ,  $x \geq 0$ . Dann gilt

$$V(x) = 1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x) = x^{-\alpha} L(x) \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)},$$

d.h. die Voraussetzungen des Satzes sind mit  $c := \Gamma(1 - \alpha)$ ,  $l(x) := L(x)$  und  $\rho := -\alpha$  erfüllt und wir erhalten

$$1 - \varphi(s) \stackrel{(A.13)}{=} s \int_0^\infty e^{-sx} V(x) dx =: \tilde{V}(s) \underset{A.2.3}{\sim} \Gamma(1 - \alpha) s^\alpha L(1/s) \quad (s \downarrow 0).$$

Setzen wir jetzt  $\varphi_U(t) := \int_{[0,\infty)} e^{-tx} U(dx)$ , so gilt für  $t > 0$

$$\varphi_U(t) = \sum_{n \geq 0} \int_{[0,\infty)} e^{-tx} F^{*(n)}(dx) = \sum_{n \geq 0} \underbrace{\varphi_{F^{*(n)}}(t)}_{=(\varphi(t))^n} = \frac{1}{1 - \varphi(t)}.$$

Aufgrund der vorherigen Gleichungskette können wir weiter folgern:

$$\varphi_U(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)} \sim \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha) t^\alpha L(1/t)} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} t^{-\alpha} \frac{1}{L(1/t)} \quad (t \downarrow 0).$$

Wir können nun die umgekehrte Implikation aus Satz A.2.3 benutzen, denn  $\tilde{V}$  besitzt die geforderte asymptotische Gestalt, wenn wir  $V := U$  wählen, und (A.10) ist trivialerweise erfüllt. Dann gilt für das entsprechende  $\tilde{V}$ :

$$\begin{aligned}\tilde{V}(s) &= s \int_0^\infty e^{-sx} U(x) dx = s \int_0^\infty e^{-sx} \int_{[0,x]} U(dy) dx \\ &= \int_{[0,\infty)} \int_{[y,\infty)} s e^{-sx} dx U(dy) = \int_{[0,\infty)} e^{-sy} U(dy) \\ &= \varphi_U(s) \sim \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} s^{-\alpha} \frac{1}{L(1/s)} \quad (s \downarrow 0),\end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, dass mit  $L$  auch  $1/L$  langsam variierend ist. Aus Satz A.2.3 mit  $c := 1/\Gamma(1 - \alpha)$ ,  $\rho := \alpha$  und  $l(x) := 1/L(x)$  erhalten wir nun (A.11):

$$U(x) \sim \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} x^\alpha \frac{1}{L(x)} \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (x \rightarrow \infty).$$

□

**A.2.7 Satz (vgl. [Fe2], XIV.3, Theorem).**

$(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sei eine Folge positiver, unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen mit  $X_1 \sim F$  und  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  sei die  $n$ -te Partialsumme. Für festes  $t > 0$  sei  $N_t = \max\{k \geq 0 : S_k \leq t\}$ . Gilt

$$(A.14) \quad 1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x),$$

$0 < \alpha < 1$ , mit einer langsam variierenden Funktion  $L$ , so gilt für die normierte Zufallsvariable  $Y_t/t$  mit  $Y_t := t - S_{N_t}$ :

$$Y_t \xrightarrow{d} \text{Arcsin}(\alpha).$$

Die Arkussinus-Verteilung wurde bereits in Beispiel 2.3.5 auf Seite 57 definiert.

*Beweis.* Seien  $0 < x_1 < x_2 < 1$ . Dann gilt für  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} \{tx_1 < Y_t < tx_2\} &= \{tx_1 < t - S_{N_t} < tx_2\} \\ &= \{t(1 - x_2) < S_{N_t} < t(1 - x_1)\} \\ &= \{\exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \exists y \in (1 - x_2, 1 - x_1) : \\ &\quad S_n = ty, X_{n+1} > t(1 - y)\}. \end{aligned}$$

Setzen wir  $U = \sum_{n=0}^{\infty} P^{S_n}$ , so folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_1 < t^{-1}Y_t < x_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(t^{-1}S_n \in (1 - x_2, 1 - x_1), X_{n+1} > t - S_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left( \mathbb{P} \left( t^{-1}S_n \in (1 - x_2, 1 - x_1), X_{n+1} > t - S_n \mid S_n \right) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(1-x_2, 1-x_1)} \mathbb{P}(X_{n+1} > t - ty) \mathbb{P}^{t^{-1}S_n}(dy) \\ &= \int_{(1-x_2, 1-x_1)} \mathbb{P}(X_1 > t - ty) U(tdy) \\ &= \int_{(1-x_2, 1-x_1)} (1 - F(t(1 - y))) U(tdy) \\ &= (1 - F(t))U(t) \int_{(1-x_2, 1-x_1)} \frac{1 - F(t(1 - y))}{1 - F(t)} \frac{U(tdy)}{U(t)}. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen von Lemma A.2.6 sind hier erfüllt. Daher sind in diesem Beweis die beiden Aussagen (A.11) und (A.12) gültig und wir können für  $t \rightarrow \infty$  schließen:

$$\mathbb{P}(x_1 < t^{-1}Y_t < x_2) \sim \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \int_{(1-x_2, 1-x_1)} \frac{1 - F(t(1-y))}{1 - F(t)} \frac{U(tdy)}{U(t)}.$$

Hier haben wir unser Ziel schon fast erreicht. Schauen wir uns aber das Maß und den Integranden etwas genauer an. Beginnen wir dabei mit dem Maß. Unter Benutzung von (A.11) erhalten wir für  $y \geq 0$ :

$$\frac{U(t[0, y])}{U(t)} = \frac{U([0, ty])}{U(t)} = \frac{U(ty)}{U(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y^\alpha = \int_0^y \alpha y^{\alpha-1} dy.$$

Mit Satz 43.7 in [A] können wir daraus folgern, dass

$$\frac{U(tdy)}{U(t)} \xrightarrow{v} \alpha y^{\alpha-1} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(y) \mathbb{K}(dy)$$

für  $t \rightarrow \infty$  gilt. Definieren wir ein endliches Maß  $\mu_t$  durch

$$\mu_t(B) := \frac{U(tB \cap (1-x_2, 1-x_1))}{U(t)}, B \in \mathfrak{B},$$

so gilt nach Satz 43.6 b) in [A] für  $t \rightarrow \infty$ :

$$\mu_t \xrightarrow{w} \alpha y^{\alpha-1} \mathbb{1}_{(1-x_2, 1-x_1)}(y) \mathbb{K}(dy).$$

Da die Funktion  $y \mapsto (1-y)^{-\alpha}$  auf  $(1-x_2, 1-x_1)$  stetig und beschränkt ist, können wir weiter folgern:

$$\begin{aligned} \int_{(1-x_2, 1-x_1)} (1-y)^{-\alpha} \frac{U(tdy)}{U(t)} &= \int (1-y)^{-\alpha} \mu_t(dy) \\ \text{(A.15)} \quad &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_{(1-x_2, 1-x_1)} (1-y)^{-\alpha} \alpha y^{\alpha-1} \mathbb{K}(dy) \\ &= \int_{1-x_2}^{1-x_1} \alpha y^{\alpha-1} (1-y)^{-\alpha} dy. \end{aligned}$$

Kommen wir nun zum Integranden:

$$\begin{aligned} \frac{1 - F(t(1-y))}{1 - F(t)} &= \frac{(t(1-y))^{-\alpha} L(t(1-y))}{t^{-\alpha} L(t)} \\ &= (1-y)^{-\alpha} \frac{L(t(1-y))}{L(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (1-y)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Weil  $\frac{1-F(t(1-y))}{1-F(t)}$  in  $y$  monoton wachsend ist, ist die obige Konvergenz im abgeschlossenen Intervall  $[1-x_2, 1-x_1]$  gleichmäßig, d.h. für gegebenes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $t_0$ , so dass

$$\left| \frac{1 - F(t(1-y))}{1 - F(t)} - (1-y)^{-\alpha} \right| < \varepsilon$$

für alle  $t \geq t_0$  und  $y \in [1 - x_2, 1 - x_1]$  gilt. Mit diesen neuen Informationen können wir für alle  $t \geq t_0$  schließen:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(1-x_2, 1-x_1)} \frac{1 - F(t(1-y))}{1 - F(t)} \frac{U(tdy)}{U(t)} - \int_{1-x_2}^{1-x_1} \alpha y^{\alpha-1} (1-y)^{-\alpha} dy \right| \\ & \leq \left| \int_{(1-x_2, 1-x_1)} \frac{1 - F(t(1-y))}{1 - F(t)} - (1-y)^{-\alpha} \frac{U(tdy)}{U(t)} \right| \\ & + \left| \int_{(1-x_2, 1-x_1)} (1-y)^{-\alpha} \frac{U(tdy)}{U(t)} - \int_{(1-x_2, 1-x_1)} \alpha y^{\alpha-1} (1-y)^{-\alpha} dy \right|. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (A.15) wissen wir, dass der zweite Summand gegen 0 konvergiert. Mit Hilfe der Standardabschätzung und weil

$$\frac{U(t(1-x_2, 1-x_1))}{U(t)} \leq \frac{U(t)}{U(t)} = 1$$

gilt, können wir den ersten Summanden gegen  $\varepsilon$  abschätzen. □



# Literaturverzeichnis

- [A] Alsmeyer, G., *Wahrscheinlichkeitstheorie (2. Auflage)*. Skripten zur mathematischen Statistik Nr. 30, Universität Münster (2000).
- [A1] Alsmeyer, G., *Stochastische Prozesse, Teil 1 (2. erweiterte Auflage)*. Skripten zur mathematischen Statistik Nr. 33, Universität Münster (2002).
- [A2] Alsmeyer, G., *Erneuerungstheorie*. Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik, B.G. Teubner Stuttgart (1991).
- [Bi] Bingham, N.H., Goldie, C.M., und Teugels, J.L., *Regular variation*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications (1987).
- [Br] Breiman, L., *Probability*. Addison-Wesley Series in Statistics (1968).
- [Do] Doliwa, B., *The Dynamics of a Small Model Glass Former as Viewed from Its Potential Energy Landscape*. Berichte aus der Physik, Shaker Verlag (2003).
- [E] Elstrodt, J., *Maß- und Integrationstheorie (3., erweiterte Auflage)*. Springer-Verlag.
- [Fe1] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Volume II, Second Edition)*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics (1971).
- [Fe2] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Volume II)*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics (1966).
- [Fi] Fischer, W., Lieb, I., *Funktionentheorie*. Vieweg Studium. Aufbaukurs Mathematik (1980).
- [Ke] Kesten, H., Occupation Times For Markov And Semi-Markov Chains. *Trans. Am. Math. Soc.*, **103**: 82-112 (1962).
- [Ko] Kotulski, M., Asymptotic Distributions of Continuous-Time Random Walks: A Probabilistic Approach. *J. Statist. Phys.*, **81**: 777-792 (1995).

- [R] CD Römpp Chemie Lexikon (9. Auflage). Georg Thieme Verlag (1995).
- [Sam] Samorodnitsky, G., Taqqu, M.S., *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman & Hall (1994).
- [Sat] Sato, K., *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press (1999)
- [Wi] Wittenberg, H., Limiting Distributions of Random Sums of Independent Random Variables. *Zeitschrift für Wahrschein. und verw. Gebiete*, **3**: 7-18 (1964).

Hiermit versichere ich, dass ich die von mir vorgelegte Diplomarbeit selbständig angefertigt habe und alle benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe.

Münster, 13. September 2007

Jasmin Grages