Diplomarbeit

Das Limesverhalten des rechtesten Teilchens in der inhomogenen verzweigenden Brownschen Bewegung

Sebastian Dartmann

Juli 2007

Fachbereich Mathematik
der Westfälischen
Wilhelms-Universität
Münster

Betreuer: Prof. Dr. Gerold Alsmeyer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In ihrem Artikel „Traveling Waves in Inhomogeneous Branching Brownian Motions. I“ (vgl. [Lal]) beschäftigen sich S. Lalley und T. Sellke mit der folgenden Problemstellung. Sie betrachten ein System von Teilchen, welches sich zum Beispiel auf die folgende Weise ergibt: Ein Ursprungsteilchen startet zur Zeit 0 im Punkt 0 und führt eine Brownsche Bewegung aus. Dieses Teilchen teilt sich nach einer - durch eine Reproduktionsregel festgelegten - Zeit in zwei Teilchen. Beide Teilchen führen nun unabhängig voneinander eine Brownsche Bewegung aus und teilen sich wieder nach der durch die Reproduktionsregel bestimmten Reproduktionszeit in jeweils zwei Teilchen. Dieser Vorgang wird nun von allen entstehenden Teilchen immer weiter wiederholt und so entstehen unendlich viele Teilchen, die alle unabhängig voneinander eine Brownsche Bewegung ausführen.

Der so definierte Prozess heißt *verzweigende Brownsche Bewegung.* S. Lalley und T. Sellke befassen sich in ihrem Artikel speziell mit der sogenannten *inhomogenen verzweigenden Brownschen Bewegung,* die durch eine bestimmte Reproduktionsregel definiert wird. Dabei widmen sie sich vor allem der Frage, wie sich die Position des zum Zeitpunkt t rechtesten Teilchens - bezeichnet mit R_t - für $t \to \infty$ verhält.

In dieser Arbeit wollen wir nun Antworten auf diese Frage finden. Dazu führen wir im ersten Kapitel den Begriff der *Brownschen Bewegung* ein und zeigen einige Eigenschaften dieses Prozesses. Zum Beispiel beweisen wir, dass eine Brownsche Bewegung ein homogener Markov-Prozess ist. Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns dann mit der Theorie der Punktprozesse und betrachten verschiedene Sichtweisen von Punktprozessen. Nachdem wir gezeigt haben, dass diese unterschiedlichen Sichtweisen äquivalent sind, betrachten wir danach speziell den Poissonschen Punktprozess und Punktprozesse auf $\mathbb{R}^d$. Im letzten Kapitel gehen wir dann auf die eigentliche Frage ein und werden diese auch zufriedenstellend beantworten können, indem wir Hilfsprozesse – sogenannte *Poissonsche Flutwellen* – definieren. Mit deren Hilfe lässt sich das Verhalten von R_t für $t \to \infty$ bestimmen und es ergibt sich, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}\, t + x\right) \;=\; E\exp\{-W\gamma e^{-\sqrt{2\lambda_0}\; x}\}$$

für geeignete positive Konstanten λ_0, γ und eine Zufallsgröße Z gilt.

Für die Betreuung während der Entstehungsphase möchte ich Herrn Prof. Dr. G. Alsmeyer danken. Außerdem gilt mein Dank Frau Mareike Assink, die mir beim Korrekturlesen meiner Arbeit behilflich war.

Münster, 31. Juli 07

Kapitel 1

Stochastische Grundlagen und die Brownsche Bewegung

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir an einige Grundbegriffe aus der Prozesstheorie erinnern. Im zweiten Abschnitt werden wir dann die Brownsche Bewegung einführen und uns dabei vornehmlich an [Bor],[Fah] und [Par] halten. Im Folgenden seien stets ein W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine Menge $T \subset \mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Stochastische Grundlagen

Wir erinnern zuerst daran, dass eine *Filtration von* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ eine aufsteigende Folge $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$ von Unter-σ-Algebren von $\mathfrak{A}$ ist. Weiter nennt man – gegeben einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in T}$ – die Folge $\mathfrak{F}_t^X$, definiert durch

$$\mathfrak{F}_t^X \;:=\; \sigma(X_s, s \in T, s \leq t).$$

die *kanonische Filtration von* $(X_t)_{t\in T}$. Außerdem sagt man, dass $(X_t)_{t\in T}$ *bzgl. einer Filtration* $(\mathfrak{G}_t)_{t\in T}$ *adaptiert* ist, wenn für alle $t \in T$

$$\mathfrak{F}_t^X \subset \mathfrak{G}_t$$

gilt.

Nun wollen wir noch an den Begriff eines Martingals erinnern:

Definition 1.1.1.
Sei $X = (X_t)_{t\in T}$ ein bzgl. einer Filtration $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_t)_{t\in T}$ adaptierter stochastischer Prozess mit $E|X_t| < \infty$ für alle $t \in T$. Dann heißt X

(i) *Submartingal* bzgl. $\mathfrak{G}$, falls $E(X_t|\mathfrak{G}_s) \geq X_s$ fast sicher für alle $s, t \in T$ mit $s \leq t$ gilt,

(ii) *Supermartingal* bzgl. $\mathfrak{G}$, falls $E(X_t|\mathfrak{G}_s) \leq X_s$ fast sicher für alle $s, t \in T$ mit $s \leq t$ gilt,

(iii) *Martingal* bzgl. $\mathfrak{G}$, falls X sowohl Submartingal als auch Supermartingal bzgl. $\mathfrak{G}$ ist.

Falls $\mathfrak{G}$ die kanonische Filtration von X ist, so wird auf den Zusatz bzgl. $\mathfrak{G}$ verzichtet.

Zum Schluss dieses Abschnitts geben wir die Doobsche Maximalungleichung an, die wir benötigen werden, um das starke Gesetz der großen Zahlen für Brownsche Bewegungen zu beweisen.

Lemma 1.1.2. (vgl. [Kar], Theorem 3.8 in Chapter 1)
Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsseitig stetiges Submartingal. Weiter seien $[\sigma, \tau]$ ein Teilintervall von $[0, \infty)$ und $p > 1$. Dann gilt

$$E\left(\sup_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left(X_\tau^p\right).$$

1.2 Die Brownsche Bewegung

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Definition und einige Eigenschaften der Brownschen Bewegung (die in der Literatur häufig auch als Wiener Prozess bezeichnet wird) angeben. Wir beginnen mit der Definition:

Definition 1.2.1.
Seien $k, x \in \mathbb{R}$. Ein stochastischer Prozess $(B_t)_{t\geq k}$ mit Zustandsraum $\mathbb{R}$ heißt in *x startende Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Startzeit k,* wenn folgende Eigenschaften gelten:

(i) $B_k = x$ fast sicher

(ii) Die Abbildung $[k, \infty) \ni s \mapsto B_s \in \mathbb{R}$ ist fast sicher stetig.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ sind $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_1} - B_{t_0}$ unabhängige und normalverteilte Zuwächse mit

$$\begin{aligned} E\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) &= 0 \\ &\text{und} \\ Var\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) &= t_i - t_{i-1}\ (1 \leq i \leq n). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Man erhält leicht folgendes Ergebnis:

Korollar 1.2.2. (vgl. [Bor], Chapter IV,2)
Seien $(B_t)_{t\geq k}$ eine in 0 startende Brownsche Bewegung mit Startzeit k und $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $(B_t + x)_{t\geq k}$ eine in x startende Brownsche Bewegung mit Startzeit k.

Wir betrachten im Folgenden in 0 startende Brownsche Bewegungen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Startzeit 0 und bezeichnen diese einfach als *(standard) Brownsche Bewegungen.* Die Ergebnisse, die wir für diese erhalten, lassen sich dann leicht verallgemeinern.

Zuerst erinnern wir daran, dass ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ *Prozess mit stationären Zuwächsen* heißt, wenn für alle $h > 0$ und für alle $s, t \in T$ mit $s < t$

$$P^{X_{t+h} - X_{s+h}} \ = \ P^{X_t - X_s}$$

gilt.

Wir erhalten dann:

Lemma 1.2.3. *hphantoma*
Eine Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t \geq 0}$ ist ein Prozess mit stationären Zuwächsen.

Beweis.
Die Behauptung folgt direkt aus der Tatsache, dass $P^{B_{t+h} - B_{s+h}}$ für alle $h > 0$ und $0 \leq s < t < \infty$ eine $\mathfrak{N}(0, t - s)$-Verteilung ist. □

Es gilt weiter

Lemma 1.2.4.
Sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann ist B ein Martingal.

Beweis.
Seien $0 \leq s < t < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ und $0 < s_1 < \ldots < s_n = s$ beliebig gewählt. Da $B_0, B_{s_1} - B_0, \ldots, B_{s_n} - B_{s_{n-1}}$ nach Definition stochastisch unabhängig sind, ist die σ-Algebra

$$\sigma\left(B_0, B_{s_1}, \ldots, B_{s_n}\right) \ = \ \sigma\left(B_0, B_{s_1} - B_0, \ldots, B_{s_n} - B_{s_{n-1}}\right)$$

unabhängig von $B_t - B_s$. Die Vereinigung aller σ-Algebren dieser Art (bei festen $0 \leq s < t < \infty$) bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{E}$ ist $\cap$-stabil und es gilt außerdem $\sigma\left(\mathfrak{E}\right) = \mathfrak{F}_s^B$. Weiter bezeichne $\mathfrak{D}$ die Menge aller Elemente von $\mathfrak{F}_s^B$, die unabhängig von $B_t - B_s$ sind. Dann ist $\mathfrak{D}$ ein Dynkin-System, welches $\mathfrak{E}$ enthält. Also folgt mit dem Dynkin-System-Argument $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}_s^B$. Insgesamt erhalten wir nun für alle $0 \leq s \leq t < \infty$

$$E\left(B_t - B_s | \mathfrak{F}_s^B\right) \ = \ E\left(B_t - B_s\right) \ = \ 0.$$

□

Aus diesem Lemma folgt nun das starke Gesetz der großen Zahlen für die Brownsche Bewegung.

Satz 1.2.5. (vgl. [Kar], Problem 9.3 in Chapter 2)
Sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad \textit{fast sicher} \tag{1.2.2}$$

Beweis.
Wir erhalten unter Benutzung der Doobschen Maximalungleichung (Lemma 1.1.2) und Korollar 19.4(a) aus [Als2], dass für alle $0 < \sigma < \tau < \infty$

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{\sigma\leq t\leq\tau}\left(\frac{B_t}{t}\right)^2\right) &\leq \frac{1}{\sigma^2}E\left(\sup_{\sigma\leq t\leq\tau} B_t^2\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}E\left(\sup_{\sigma\leq t\leq\tau} |B_t|^2\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}E\left(\left(\sup_{\sigma\leq t\leq\tau} |B_t|\right)^2\right) \\ &\leq \frac{4}{\sigma^2}E\left(|B_\tau|^2\right) \\ &= \frac{4}{\sigma^2}E\left(B_\tau^2\right) = \frac{4\tau}{\sigma^2} \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

gilt. Wählt man nun $\tau = 2^{n+1} = 2\sigma$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ für alle $\epsilon > 0$, so ergibt sich mit der Ungleichung von Markov mit $g(t) = t^2$

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{2^n\leq t\leq 2^{n+1}} \frac{|B_t|}{t} > \epsilon\right) &\leq P\left(\sup_{2^n\leq t\leq 2^{n+1}} \frac{|B_t|}{t} \geq \epsilon\right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_{\left\{\sup\limits_{2^n\leq t\leq 2^{n+1}} \frac{|B_t|}{t} > \epsilon\right\}} \left(\sup_{2^n\leq t\leq 2^{n+1}} \frac{|B_t|}{t}\right)^2 dP \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2}E\left(\sup_{2^n\leq t\leq 2^{n+1}}\left(\frac{B_t}{t}\right)^2\right) \leq \frac{8}{2^n\epsilon^2}\,. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Daher folgt mit dem Lemma von Borel-Cantelli die Behauptung. □

Als nächstes wollen wir den Begriff des Markov-Prozesses einführen und zeigen, dass jede Brownsche Bewegung ein Markov-Prozess ist.

Definition 1.2.6.
Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in T}$ mit Zustandsraum $\mathbb{R}$ heißt *Markov-Prozess*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, $s_0, \ldots, s_n, s, t \in T$ mit $s_0 < \ldots < s_n < s < t$ und alle $x_0, \ldots, x_n, x, y \in \mathbb{R}$

$$P\left(X_t \leq y | X_s = x, X_{s_n} = x_n, \ldots, X_{s_0} = x_0\right) = P\left(X_t \leq y | X_s = x\right) \tag{1.2.5}$$

gilt. Die bedingte Verteilungsfunktion $F(s,x,t,y)$ mit

$$F(s,x,t,y) \ := \ F_{X_t}(y|X_s = x) \ = \ P\left(X_t \leq y|X_s = x\right) \tag{1.2.6}$$

nennt man *Übergangsfunktion.* Falls sie eine Dichte $f(s,x,t,y)$ besitzt, so bezeichnet man diese als *Übergangsdichte.* X heißt *homogen*, wenn für alle $u \geq 0, s,t \in T$ mit $s < t, s+u, t+u \in T$ und alle $x,y \in \mathbb{R}$

$$F(s+u,x,t+u,y) \ = \ F(s,x,t,y) \tag{1.2.7}$$

gilt. F ist in diesem Fall eine Funktion, die nur von x,y und der Differenz $t-s$ abhängt. Wir schreiben deshalb $F(t,x,y)$ für $F(u,x,t+u,y)$.

Satz 1.2.7. (vgl. [Fah], Satz 2.4 in Kapitel 6)
Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann ist B ein homogener Markov-Prozess mit der Übergangsdichte

$$f(t,x,y) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}. \tag{1.2.8}$$

Beweis.
Seien nun $n \in \mathbb{N}, s_0, \ldots, s_n, s, t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq s_0 < \ldots < s_n < s < t$ und $x_0, \ldots, x_n, x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} &P\left(B_t \leq y|B_s = x, B_{s_n} = x_n, \ldots, B_{s_0} = x_0\right) \\ &= \ P\left(B_t - B_s \leq y - x|B_s - B_{s_n} = x - x_n, \ldots, B_{s_1} - B_{s_0} = x_1 - x_0\right) \\ &= \ P\left(B_t - B_s \leq y - x\right) = P\left(B_t \leq y|B_s = x\right). \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Damit haben wir gezeigt, dass B ein Markov-Prozess ist. Dass dieser sogar homogen ist, folgt aus

$$\begin{aligned} P\left(B_{t+u} \leq y|B_{s+u} = x\right) \ &= \ P\left(B_{t+u} - B_{s+u} \leq y - x\right) \\ &= \ P\left(B_t - B_s \leq y - x\right) \\ &= \ P\left(B_t \leq y|B_s = x\right) \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

für allle $s,t,t+u,s+u \geq 0$ mit $s \geq t$ und alle $x,y \in \mathbb{R}$. Dabei ergibt sich der zweite Schritt in der obigen Gleichung aus Lemma 1.2.3. Nun schauen wir uns noch die Gestalt der Übergangsfunktion an: Wegen

$$\begin{aligned} F(t,x,y) \ &= \ P\left(B_{t+s} \leq y|B_s = x\right) \\ &= \ P\left(B_{t+s} - B_s \leq y - x\right) \\ &= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{y-x} e^{-\frac{u^2}{2t}}\, du \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

für alle $t \geq 0$ und $x,y \in \mathbb{R}$ gilt Gleichung (1.2.8). □

Kapitel 2

Punktprozesse

In diesem Kapitel geben wir eine kurze Einführung in die Theorie der Punktprozesse. Wir halten uns dabei vor allem an die Vorgehensweise in [Koe] und entnehmen diesem Buch auch fast alle Sätze und Definitionen. An einigen Stellen ergänzen wir diese allerdings durch Aussagen aus [Rei]. Da es hier vor allem darum geht die für das dritte Kapitel benötigte Theorie kurz vorzustellen, verzichten wir weitgehend auf Beweise. Der interessierte Leser kann diese in den beiden angegeben Quellen nachschlagen. Für Punktprozesse gibt es nicht nur eine, sondern verschiedene Darstellungsmöglichkeiten. Drei dieser Darstellungsmöglichkeiten eines Punktprozesses auf $\mathbb{R}$ führen wir im ersten Abschnitt kurz ein, und zwar die Darstellungen als zufällige Punktfolge, zufälligen Zählprozess bzw. zufälliges Zählmaß. Diese drei Darstellungsmöglichkeiten werden wir dann im zweiten Abschnitt formal definieren und miteinander in Verbindung bringen. Im dritten Abschnitt setzen wir uns mit dem Poissonschen Punktprozess auseinandersetzen, der für die spätere Theorie wichtig ist. Im letzen Abschnitt dieses Kapitels werden wir schließlich den Begriff des Punktprozesses auf den $\mathbb{R}^d$ erweitern.

2.1 Darstellung von Punktprozessen

Die einfachste Vorstellung, die man sich von einem (zufälligen) Punktprozess auf $\mathbb{R}$ machen kann, ist die einer Folge zufällig im Raum $\mathbb{R}$ verteilter Punkte. In diesem Sinn ist also ein zufälliger Punktprozess nichts anderes als eine Folge $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von reellwertigen Zufallsvariablen (d.h. messbaren Abbildungen) $X_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, wobei die X_n derart gewählt werden, dass für jede Realisierung $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, der Folge X die Werte $X_n(\omega)$

(i) der Größe nach numeriert sind und das kleinste nichtnegative Folgenglied den Index Eins erhält, man also

$$\ldots \leq X_{-1}(\omega) \leq X_0(\omega) < 0 \leq X_1(\omega) \leq \ldots \tag{2.1.1}$$

hat,

(ii) sich nirgendwo im Endlichen häufen, für jedes $c > 0$ also ein $n_{w,c} \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|X_n(\omega)| > c$ für $|n| > n_{\omega,c}$ gilt.

Ein Punktprozess heißt *einfach,* wenn sogar

$$\ldots < X_{-1}(\omega) < X_0(\omega) < 0 \leq X_1(\omega) < \ldots \tag{2.1.2}$$

für P-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt, das heißt wenn für P-fast alle $\omega \in \Omega$ sämtliche Punkte der Folge $X(\omega)$ voneinander verschieden sind.

Seien die X_n nun alle als nichtnegativ vorausgesetzt. Oft interessiert man sich nicht für die Positionen X_n der einzelnen zufälligen Punkte eines Punktprozesses, sondern für die zufällige Anzahl von Punkten des Punktprozesses X in gegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, zum Beispiel in Intervallen. In diesem Fall ist es besser, einen Punktprozess nicht als Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von zufälligen Punkten, sondern als zufälligen Zählprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ aufzufassen. N_t zählt dann die zufällige Anzahl der Punkte X_n, die in $[0,t)$ liegen, wobei man im allgemeinen $N_0 = 0$ setzt. $X_1, X_2, \ldots$ sind offensichtlich die zufälligen Sprungpunkte der Höhe 1, wobei Mehrfachpunkte auftreten können, wenn der Prozess nicht einfach ist. Wegen der vorausgesetzten Nichtnegativität der X_n ist ein bijektiver Zusammenhang zwischen der Folge X und dem Zählprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ gegeben, denn: Aus jeder Realisierung $X(\omega)$ der Folge X lässt sich der Pfad $(N_t(\omega))_{t\geq 0}$ des Prozesses $(N_t)_{t\geq 0}$ bestimmen und umgekehrt. Dabei sind die $X_n(\omega)$ gerade die Unstetigkeitsstellen von $(N_t(\omega))_{t\geq 0}$.

Da man oft auch die Anzahl von Punkten X_n in allgemeineren Borel-Mengen B kennen möchte, ist es naheliegend, einen zufälligen Punktprozess als eine zufällige Mengenfunktion Φ aufzufassen, die jeder Menge B aus einer bestimmten Familie $\mathbb{J}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$ die zufällige Anzahl $\Phi(B)$ von Punkten der Folge X, die in der Menge B liegen, zuordnet. Es gilt dann $\Phi([0,t)) = N_t$. Aus diesem Ansatz wird im nächsten Abschnitt die Definition eines Punktprozesses gewonnen.

2.2 Definition und Charakterisierung von Punktprozessen

Bevor wir Punktprozesse nun auf formaler Ebene einführen, wollen wir zunächst an den Begriff des *Zählmaßes* erinnern, bei dem es sich um ein Maß auf einem beliebigem Wahrscheinlichkeitsraum mit Werten in $\overline{\mathbb{N}}$ handelt. Ein Zählmaß ϕ auf $\mathbb{B}$ heißt *lokalendlich*, wenn es jeder beschränkten Borelmenge B aus $\mathbb{B}$ einen endlichen Wert $\phi(B)$ zuordnet. Die Menge aller lokalendlichen Zählmaße auf $\mathbb{B}$ bezeichnen wir mit N. Sei nun ϕ ein (nicht notwendig lokalendliches) Zählmaß auf $\mathbb{B}$. Diejenigen Punkte $t \in \mathbb{R}$, für die $\phi(\{t\}) > 0$ gilt, werden *Atome* von ϕ genannt, ihre Gesamtheit

$$S_\phi \; = \; \{t \in \mathbb{R} : \phi(\{t\}) > 0\}$$

bezeichnet man als *Träger* von ϕ. Für jedes Atom t von ϕ nennt man außerdem $\phi(\{t\})$ die *Vielfachheit* von t. ϕ heißt genau dann *einfach*, wenn $\phi(\{t\}) = 1$ für alle Atome t von ϕ gilt.

Als nächstes folgt ein Satz, der für ein Zählmaße $\phi \in N$ die Standarddarstellung von $\phi(B)$ für alle $B \in \mathbb{B}$ angibt.

Satz 2.2.1.
Für jedes Zählmaß $\phi \in N$ ist der Träger S_ϕ abzählbar unendlich, und es gilt für jedes $B \in \mathbb{B}$

$$\phi(B) \ = \ \sum_{t \in S_\phi} \phi(\{t\})\delta_t(B), \tag{2.2.1}$$

wobei δ_t das Dirac-Maß in t mit $\delta_t(B) = \mathbb{1}_B(t)$ bezeichnet.

Im Folgenden soll eine σ-Algebra $\mathfrak{N}$ auf dem Raum N der lokalendlichen Zählmaße eingeführt werden, die $(N, \mathfrak{N})$ zu einem meßbaren Raum macht:

Definition 2.2.2.
Für

$$\mathfrak{N}_e \ := \ \{\{\phi \in N : \phi([a,b)) = j\} \ ; \ -\infty < a \leq b < \infty, j \in \mathbb{N}\}$$

sei $\mathfrak{N} = \sigma(\mathfrak{N}_e)$.

$\mathfrak{R}_0$ sei der δ-Ring der beschränkten Borel-Mengen in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

Satz 2.2.3.
Die σ-Algebra $\mathfrak{N}$ umfasst alle Teilmengen von N der Gestalt

$$\{\phi \in N : \phi(B) = j\}$$

für $j \in \mathbb{N}_0$ und $B \in \mathfrak{R}_0$.

Wir kommen jetzt zur Definition eines Punktprozesses.

Definition 2.2.4.
Ein *(zufälliger) Punktprozess* Φ auf $\mathbb{R}$ ist eine meßbare Abbildung $\Phi : \Omega \to N$ eines W-Raums $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ in den meßbaren Raum $(N, \mathfrak{N})$, das heißt Φ ist eine Zufallsvariable mit Werten in N. Man nennt Φ deshalb auch *zufälliges Zählmaß.* Mit P bezeichnen wir die Verteilung der Zufallsvariablen Φ auf $\mathfrak{N}$, die durch

$$P(A) \ = \ \mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in A\right), \ A \in \mathfrak{N},$$

definiert wird.

Im Folgenden soll für einen Punktprozess Φ auf $\mathbb{R}$ und ein $B \in \mathbb{B}$ eine Zufallsgröße definiert werden, die jedem $\omega \in \Omega$ die Anzahl der Atome des Zählmaßes $\Phi(\omega)$ zuordnet, wobei Atome mit Vielfachheit k k-mal gezählt werden:

Definition 2.2.5.
Sei Φ ein Punktprozess auf $\mathbb{R}$. Für alle $B \in \mathbb{B}$ wird die Zufallsgröße $\Phi(B) : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ definiert durch

$$\Phi(B)(\omega) \ := \ \Phi(\omega)(B). \tag{2.2.2}$$

Mit $\pi_B : N \to \overline{\mathbb{N}}$ bezeichnen wir die durch

$$\pi_B(\phi) \ := \ \phi(B) \tag{2.2.3}$$

definierte Abbildung. Es gilt offensichtlich

$$\Phi(B) \ = \ \pi_B \circ \Phi. \tag{2.2.4}$$

Definition 2.2.6.
Sei Φ ein Punktprozess auf $\mathbb{R}$. Die Funktion $\nu : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\nu(B) \ = \ \mathbb{E}\Phi(B) \text{ für alle } B \in \mathbb{B} \tag{2.2.5}$$

heißt *Intensitätsmaß* von Φ.

$\nu(B)$ gibt also die erwartete Anzahl von Atomen in B an und es gilt für alle $B \in \mathbb{B}$

$$\begin{aligned}\nu(B) \ &= \ \mathbb{E}\Phi(B) \ = \ \int_\Omega \Phi(B)(\omega)\ \mathbb{P}(d\omega) \overset{(2.2.4)}{=} \int_\Omega \pi_B(\Phi(\omega))\ \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \ \int_N \pi_B(\phi)\ \mathbb{P}^\Phi(d\phi) \ = \ \int_N \phi(B)\ P(d\phi).\end{aligned}$$

Lemma 2.2.7.
Das Intensitätsmaß ν eines Punktprozesses Φ ist ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.

Beweis.
Da $\Phi(B) \geq 0$ für alle $B \in \mathbb{B}$ gilt, folgt direkt $\nu(B) \geq 0$ für alle $B \in \mathbb{B}$. Außerdem liefert $\Phi(\emptyset) \equiv 0$ sofort $\nu(\emptyset) = 0$. Seien im Folgenden paarweise disjunkte Mengen $B_i \in \mathbb{B}, i \in \mathbb{N}$, gegeben. Für alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$\Phi\left(\sum_{i\geq 0} B_i\right)(\omega) \ = \ \sum_{i \geq 0} \Phi(B_i)(\omega),$$

daher folgt mit dem Satz von Fubini

$$\nu\left(\sum_{i\geq 0} B_i\right) \ = \ \mathbb{E}\left[\Phi\left(\sum_{i\geq 0} B_i\right)\right] \ = \ \sum_{i\geq 0} \mathbb{E}\Phi(B_i) \ = \ \sum_{i\geq 0} \nu(B_i),$$

also die σ-Additivität von ν. $\square$

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Intensitätsmaße ν der betrachteten Prozesse Φ lokalendlich sind, dass also $\nu(B)$ für alle beschränkten Mengen $B \in \mathbb{B}$ endlich ist.

Nun wollen wir die ursprüngliche Auffassung von Punktprozessen auf $\mathbb{R}$ als Folge zufällig im Raum $\mathbb{R}$ verteilter Punkte formalisieren und mit Definition 2.2.4 in Verbindung bringen. Dafür zeigen wir im Folgenden, dass die Atome der Zählmaße $\phi \in N$, geeignet numeriert, als die Realisierungen einer Folge von reellwertigen Zufallsvariablen über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ aufgefasst werden können. Solche Zufallsvariable werden wir jetzt definieren.

Definition 2.2.8.
Für alle $n \in \mathbb{Z}$ wird durch

$$X_n^*(\phi) \;=\; \begin{cases} \min\{t \geq 0 : \phi(\{t\}) > 0\} & \text{für } n = 1, \\ \min\left\{t > X_{n-1}^*(\phi) : \phi(\{t\}) > 0\right\} & \text{für } n > 1, \\ \max\left\{t < X_{n+1}^*(\phi) : \phi(\{t\}) > 0\right\} & \text{für } n < 1, \end{cases} \tag{2.2.6}$$

eine Abbildung $X_n^* : N \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert. Wir setzen dabei außerdem $X_n^*(\phi) = \infty$ für $n \geq 1$, falls ϕ im Intervall $[0, \infty)$ weniger als n Atome hat, und entsprechend $X_n^*(\phi) = -\infty$ für $n \leq 0$, falls ϕ im Intervall $(-\infty, 0)$ höchstens $-n$ Atome hat. Eine Realisierung $(X_n^*(\phi))_{n\in\mathbb{Z}}$ der Folge $X^* = (X_n^*)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist also die Folge der der Größe nach geordneten Atome von ϕ. Das kleinste nichtnegative Atom erhält dabei den Index 1.

Als nächstes definieren wir die Funktion Φ^*, die jedem Zählmaß $\phi \in N$ das ihm entsprechende Zählmaß zuordnet, falls die Vielfachheiten aller Atome gleich Eins wären:

Definition 2.2.9.
Die Funktion $\Phi^* : N \to N$ ordnet einem $\phi \in N$ mit

$$\phi(B) \;=\; \sum_{t\in S_\phi} \phi(\{t\})\delta_t(B),\;\; B \in \mathfrak{R}_0,$$

das Zählmaß

$$\phi^*(B) \;=\; \sum_{t\in S_\phi} \delta_t(B),\;\; B \in \mathfrak{R}_0,$$

zu.

Man erhält nun zwei Hilfsaussagen:

Lemma 2.2.10.
Die Abbildung Φ^* ist meßbar.

Lemma 2.2.11.
Die Menge $N^* = \{\phi \in N : \phi(\{t\}) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$ aller einfachen Zählmaße gehört zu $\mathfrak{N}$.

Diese beiden Lemmata lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Lemma 2.2.12.
Die Abbildung Φ^* ist eine meßbare Abbildung von $(N, \mathfrak{N})$ nach $(N^*, \mathfrak{N}^*)$, wobei $\mathfrak{N}^*$ die durch $\mathfrak{N}^* = \{A \cap N^* : A \in \mathfrak{N}\}$ gegebene σ-Algebra von Teilmengen von N^* ist.

Mittels dieses Lemmas kann man nun folgenden Satz beweisen:

Satz 2.2.13.
Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist X_n^* eine meßbare Abbildung von $(N, \mathfrak{N})$ nach $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$.

Die Abbildungen X_n^* sind also für jedes $n \in \mathbb{Z}$ Zufallsgrößen auf $(N, \mathfrak{N}, P)$. Die Folge $(X_n^*)_{n\in\mathbb{Z}}$ nennt man auch *zufällige Punktfolge.* Als nächstes wollen wir den Begriff eines einfachen Punktprozesses klären:

Definition 2.2.14.
Ein Punktprozess Φ heißt *einfach* , wenn $P(N^*) = 1$ gilt, das heißt wenn mit Wahrscheinlichkeit 1 als Realisierungen von Φ nur einfache Zählmaße auftreten.

J^* sei die Menge derjenigen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ aus dem Folgenraum $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}}$, für die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es gilt $\ldots < a_{-1} < a_0 < 0 \leq a_1 < \ldots$.

(ii) Für jedes $c > 0$ gibt es eine natürliche Zahl j, mit $|a_n| > c$ für alle $|n| > j$.

Lemma 2.2.15.
Die Folge $X^* = (X_n^*)_{n\in\mathbb{Z}}$ von Zufallsgrößen vermittelt eine bijektive Abbildung von N^* nach J^*.

Beweis.
Die Bijektivität ergibt sich daraus, dass $X^* : N^* \to J^*$ eine Umkehrabbildung besitzt. Diese wird folgendermaßen definiert: Für $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in J^*$ setzt man

$$(X^*)^{-1}((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \;:=\; \phi_{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}},$$

wobei

$$\phi_{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}}(B) \ := \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{a_n}(B) \ \text{ für alle } \ B \in \mathfrak{R}_0.$$

Nach Definition ist $\phi_{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}}$ ein Element von N^* und für alle $\phi \in N^*$ erhält man $\phi = \phi_{(X_n^*(\phi))_{n\in\mathbb{Z}}}$. □

Leider vermittelt X^* keine Bijektion zwischen N und einer geeigneten Teilmenge des Folgenraumes $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}}$, da die Vielfachheiten der Atome der Zählmaße in N von den Abbildungen X_n^* nicht berücksichtigt werden. Die Abbildungen X_n^* lassen sich aber so modifizieren, dass sie eine Bijektion zwischen N und einer geeigneten Teilmenge des Folgenraumes $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}}$ liefern. Dies wird im Anschluss geschehen:

Definition 2.2.16.
Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ wird durch

$$X_n(\phi) \ = \ \begin{cases} t \geq 0, & \text{falls } \phi([0,t)) < n \leq \phi([0,t]) \text{ und } \phi([0,\infty)) \geq n \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ \infty, & \text{falls } \phi([0,\infty)) < n \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ t < 0, & \text{falls } \phi((t,0)) \leq -n < \phi([t,0)) \text{ und } \phi((-\infty,0)) \geq -n \\ & \text{für } n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \leq 0, \\ -\infty, & \text{falls } \phi((-\infty,0)) \leq -n \text{ für } n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \leq 0. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

eine Abbildung $X_n : N \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert. Eine Realisierung $X(\phi) = (X_n(\phi))_{n\in\mathbb{Z}}$ der Folge $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist also die Folge der der Größe nach geordneten Atome von ϕ, wobei Atome mit Vielfachheit k k-mal nacheinander auftreten.

Den Zusammenhang zwischen X und X^* für einfache Zählmaße liefert das folgende Lemma:

Lemma 2.2.17. *Es gilt*

$$X_n(\phi) \ = \ X_n^*(\phi) \tag{2.2.8}$$

für alle $\phi \in N^*$ *und* $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis.
Die Atome einfacher Zählmaße besitzen alle die Vielfachheit 1. Daher folgt die Behauptung. □

J sei nun die Menge derjenigen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ aus dem Folgenraum $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}}$, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es gilt $\ldots \leq a_{-1} \leq a_0 < 0 \leq a_1 \leq \ldots$.

(ii) Für jedes $c > 0$ gibt es eine natürliche Zahl j mit $|a_n| > c$ für alle $|n| > j$.

Dann erhalten wir entsprechend zu Satz 2.2.13 und Lemma 2.2.15:

Satz 2.2.18.
Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist X_n eine meßbare Abbildung von $(N, \mathfrak{N})$ nach $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$, und die Folge $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von Zufallsgrößen vermittelt eine bijektive Abbildung von N nach J.

Beweis.
Wir wollen hier nur die Bijektivität der Abbildung $X : N \to J$ zeigen. Dies funktioniert auf die gleiche Weise wie im Beweis von Lemma 2.2.15. Die Umkehrabbildung von X erhält man also, indem man für $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in J$

$$X^{-1}((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \ := \ \phi_{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}} \tag{2.2.9}$$

mit

$$\phi_{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}}(B) \ := \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{a_n}(B) \ \text{ für jedes } \ B \in \mathfrak{N}_0, \tag{2.2.10}$$

setzt. $\phi_{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}}$ ist nach Definition ein Element von N und für alle $\phi \in N$ gilt

$$\phi \ = \ \phi_{(X_n(\phi))_{n\in\mathbb{Z}}}. \tag{2.2.11}$$

□

Falls Φ einfach ist, so stimmen also wegen (2.2.8) fast alle Realisierungen von X und X^* überein.

Sei nun noch die folgende Definition gegeben, die es uns schließlich ermöglicht, einen Punktprozess formal als Folge zufällig im Raum $\mathbb{R}$ verteilter Punkte zu beschreiben:

Definition 2.2.19.
Gegeben einen Punktprozess Φ, sei für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Funktion $Y_n^\Phi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$

$$Y_n^\Phi(\omega) \ := \ X_n(\Phi(\omega)) \tag{2.2.12}$$

gegeben. $Y^\Phi = (Y_n^\Phi)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist dann eine Funktion von Ω nach J.

Aus Satz 2.2.18 und speziell den Gleichungen (2.2.9) bis (2.2.11) folgt dann, dass Y^Φ eine äquivalente Darstellungsmöglichkeit des Punktprozesses Φ ist, da man Φ aus Y^Φ gewinnen kann und andersherum.

Kommen wir jetzt noch zu der schon im ersten Abschnitt angesprochenen Darstellung eines Punktprozesses auf $\mathbb{R}$ als Zählprozess. Dafür geben wir zuerst die folgenden Definitionen an:

Definition 2.2.20.
Ein *Zählprozess auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ist ein Prozess $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ derart, dass $N_t : \Omega \to \mathbb{Z}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Definition 2.2.21.
$\widetilde{J}$ sei die Menge derjenigen linksseitig stetigen, stückweise konstanten, nichtfallenden Funktionen f auf $\mathbb{R}$, die ganzzahlige Werte haben, und für die $f(0) = 0$ gilt. Außerdem bezeichnen wir mit $J(f)$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f für $f \in \widetilde{J}$, das heißt:

$$J(f) \;=\; \left\{t \in \mathbb{R} : f(t^+) - f(t) > 0\right\}.$$

Dabei ist $f(t^+) := \lim\limits_{s \downarrow t} f(s)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Definition 2.2.22.
Wir definieren nun für ein festes $\phi \in N$ die stückweise konstante,linksseitig stetige, nichtfallende Funktion $N(\phi) : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ durch

$$(N(\phi))\,(t) \;=\; N_t(\phi) \;=\; \begin{cases} \phi([0,t)) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t = 0, \\ -\phi([t,0)) & \text{für } t < 0. \end{cases} \tag{2.2.13}$$

Für festes $t \in \mathbb{R}$ ist $N_t : \phi \mapsto N_t(\phi)$ dann eine Abbildung von N auf $\mathbb{Z}$.

Wir erhalten nun folgenden Satz:

Satz 2.2.23.
Die durch (2.2.13) *gegebene Familie* $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *ist ein Prozess auf* $(N, \mathfrak{N}, P)$ *mit Zustandsraum* $\mathbb{Z}$ *und vermittelt eine bijektive Abbildung von* N *nach* $\widetilde{J}$.

Beweis.
Wir wollen auch dieses Mal nur die Bijektivität der Abbildung zeigen. Diese beweisen wir wieder durch Angabe der Umkehrfunktion von $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$: Für $f \in \widetilde{J}$ sei

$$(N_t)^{-1}_{t\in\mathbb{R}}(f) \;:=\; \phi_f, \tag{2.2.14}$$

wobei

$$\phi_f(B) \;=\; \sum_{a \in J(f)} \delta_a(B)(f(a^+) - f(a)). \tag{2.2.15}$$

ϕ_f ist nach Definition ein Element von N und es gilt für alle $\phi \in N$

$$\phi_{(N_t)_{t\in\mathbb{R}}(\phi)} \;=\; \phi. \tag{2.2.16}$$

Damit ist die Bijektivität gezeigt. $\square$

Nun geben wir folgende Definition an, die es uns schließlich ermöglicht, einen Punktprozess formal als Zählprozess aufzufassen:

Definition 2.2.24.
Für einen Punktprozess Φ und ein $t \in \mathbb{R}$ definiert man die Abbildung $M_t^\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$M_t^\Phi(\omega) \ := \ N_t(\Phi(\omega)). \tag{2.2.17}$$

$M^\Phi = (M_t^\Phi)_{t\in\mathbb{R}}$ ist dann eine Funktion von Ω nach $\widetilde{J}$.

Aus Satz 2.2.23 und den Gleichungen (2.2.14) bis (2.2.15) folgt, dass auch M^Φ eine äquivalente Darstellungsmöglichkeit des Punktprozesses Φ ist.

Definition 2.2.25.
Die Verteilungen $P_{B_1,\dots,B_k}$ der Zufallsvektoren $(\Phi(B_1),\dots,\Phi(B_k))$, wobei $k \in \mathbb{N}$ beliebig ist und $B_1,\dots,B_k \in \mathbb{B}$ gilt, heißen die *endlichdimensionalen Verteilungen von* Φ. Es gilt also für jedes k-Tupel $(j_1,\dots,j_k) \in \mathbb{N}_0^k$

$$\begin{aligned} P_{B_1,\dots,B_k}\left((j_1,\dots,j_k)\right) &= P\left(\phi \in N : \phi(B_1) = j_1,\dots,\phi(B_k) = j_k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\Phi(B_1) = j_1,\dots,\Phi(B_n) = j_n\right). \end{aligned}$$

Am Ende dieses Abschnittes wollen wir nun noch eine Eindeutigkeitsaussage für Punktprozesse angeben:

Satz 2.2.26. (vgl. [Rei], Satz 2.1.3)
Seien $\Phi_i : \Omega \to N, i = 0,1,$ zwei Punktprozesse. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\Phi_0 \stackrel{d}{=} \Phi_1$.

(ii) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und alle $B_1,\dots,B_m \in \mathfrak{R}_\circ$ gilt

$$(\Phi_0(B_1),\dots,\Phi_0(B_m)) \ \stackrel{d}{=} \ (\Phi_1(B_1),\dots,\Phi_1(B_m)).$$

Dieser Satz sagt also aus, dass zwei Punktprozesse genau dann gleich verteilt sind, wenn ihre endlichdimensionalen Randverteilungen bzgl. beschränkter Borel-Mengen übereinstimmen.

2.3 Der Poissonsche Punktprozess

In diesem Abschnitt wollen wir nun den Begriff des Poissonschen Punktprozesses einführen, der in der späteren Theorie benötigt wird. Wir beginnen mit seiner Definition:

Definition 2.3.1.
Sei ν ein σ-endliches Maß auf $\mathbb{B}$. Ein Punktprozess $\Phi : \Omega \to N$ heißt *Poissonscher*

Punktprozess mit Intensitätsmaß ν, wenn er die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Phi(B) = k) \ &= \ \frac{\nu(B)^k}{k!} e^{-\nu(B)}, \\ &\text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } B \in \mathbb{B} \text{ mit } \nu(B) < \infty\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

und

$$\begin{aligned}&\Phi(B_1), \ldots, \Phi(B_m) \text{ sind unabhängig für alle } m \text{ und alle} \\ &\text{paarweise disjunkten Mengen } B_1, \ldots, B_m \in \mathbb{B} \\ &\text{mit } \nu(B_j) < \infty \text{ für } j = 1, \ldots, m.\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Es gilt die folgende Existenzaussage:

Satz 2.3.2.
Für jedes σ-endliche Maß ν auf $\mathbb{B}$ existiert ein Punktprozess Φ, der die Bedingungen (2.3.1) *und* (2.3.2) *erfüllt und somit ein Poissonscher Punktprozess mit Intensitätsmaß ν ist.*

2.4 Punktprozesse auf $\mathbb{R}^d$

In diesem Abschnitt wollen wir nun Punktprozesse auf $\mathbb{R}^d$ einführen. Wir wählen dafür – entsprechend zu dem Fall $d = 1$ – wieder den Ansatz der zufälligen Zählmaße und beginnen mit der folgenden Definition:

Definition 2.4.1.
Die Menge aller lokalendlichen Zählmaße auf $\mathbb{B}^d$ bezeichnen wir mit N^d. Weiter sei $\mathfrak{N}^d = \sigma(\mathfrak{N}_e^d)$ die σ-Algebra von Teilmengen von N^d, die durch die Mengenfamilie

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_e^d \ = \ \Bigg\{ &\left\{ \phi \in N^d : \phi \left(\mathop{\times}_{k=1}^{d} [a_k, b_k) \right) = j \right\} - \infty < a_k < b_k < \infty \\ &\text{für alle } 1 \leq k \leq d \ ; \ j \in \mathbb{N}_0 \Bigg\}\end{aligned}$$

erzeugt wird.

Als Analogon zu Satz 2.2.3 erhalten wir nun das folgende Ergebnis:

Satz 2.4.2.
$\mathfrak{N}^d$ enthält alle Teilmengen von N^d der Gestalt $\left\{ \phi \in N^d : \phi(B) = j \right\}$ für $j \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathbb{B}^d$.

Im Folgenden sollen nur lokalendliche Zählmaße auf $\mathbb{B}^d$ betrachtet werden.

Definition 2.4.3.
Ein *(zufälliger) Punktprozess auf* $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung $\Phi : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (N^d, \mathfrak{N}^d)$ eines W-Raums $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ in den meßbaren Raum $(N^d, \mathfrak{N}^d)$. Die Verteilung von Φ wird wieder mit P bezeichnet, das heißt für alle $A \in \mathfrak{N}^d$ ist

$$P(A) \ := \ \mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in A\right).$$

Ebenso wie im Fall $d = 1$ kann man einen einfachen Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ als zufällige Punktfolge darstellen. Um dies zu veranschaulichen, werden wir im Folgenden eine Folge von Abbildungen $X_n^* : N^d \to \overline{\mathbb{R}}^d$ einführen. Dazu definieren wir auf $\mathbb{R}^d$ zunächst eine lineare Ordnung:

Definition 2.4.4.
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $(B_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung von $\mathbb{R}^d$ in paarweise disjunkte Mengen $B_{k_j} \in \mathbb{B}^d$, deren Durchmesser den Wert $\frac{1}{k}$ nicht übersteigt, und weiter sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{N}$ durch

$$f_k(x) \ = \ j \text{ falls } x \in B_{k_j}$$

definiert. Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ schreiben wir $x_1 < x_2$ genau dann, wenn die Folge $(f_k(x_1))_{k \geq 1}$ in $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, bezogen auf die lexikographische Ordnung in $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, kleiner ist als die Folge $(f_k(x_2))_{k \geq 1}$.

Im Folgenden seien alle auftretenden Zählmaße einfach.

Lemma 2.4.5.
Seien $\phi \in N^d$ und S_ϕ der Träger von ϕ. Zu jedem $x \in S_\phi$ gibt es nur endlich viele Elemente $x_i \in S_\phi$ mit $x_i < x$.

Beweis.
Für beliebig gewähltes $x \in S_\phi$ liegen die $x_i \in S_\phi$ mit $x_i < x$ in der beschränkten Menge $\bigcup_{j=0}^{f_1(x)} B_{1_j}$. Da ϕ aber lokalendlich ist, können dies nur endlich viele sein. □

Aufgrund dieses Lemmas können wir nun die Atome eines Zählmaßes ϕ durchnumerieren, indem wir für jedes $n \geq 1$

$$X_n^*(\phi) := \begin{cases} x, & \text{falls es genau } n-1 \text{ Atome von } \phi \text{ gibt,} \\ & \text{die kleiner als } x \in S_\phi \text{ sind, und } \phi(\mathbb{R}^d) \geq n \text{ ist,} \\ \infty, & \text{falls } \phi(\mathbb{R}^d) < n \text{ ist,} \end{cases}$$

setzen. Man kann nun zeigen, dass die X_n^* meßbar sind, und dann folgende Definition treffen:

Definition 2.4.6.
Sei Φ ein einfacher Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$. Für jedes $n \geq 1$ wird die Abbildung $Y_n^\Phi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$ durch

$$Y_n^\Phi(\omega) := X_n^*(\Phi(\omega))$$

definiert.

Die Folge $Y = (Y_n^\Phi)_{n\geq 1}$ ist eine äquivalente Darstellungsmöglichkeit des Punktprozesses Φ, womit gezeigt ist, dass man einen einfachen Punktprozess tatsächlich auch als zufällige Punktfolge auffassen kann.

Sowohl das Intensitätsmaß eines Punktprozesses Φ auf $\mathbb{R}^d$ als auch ein Poissonscher Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ werden auf die gleiche Weise definiert wie im Fall $d = 1$:

Definition 2.4.7.
Sei Φ ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$. Für jedes $B \in \mathbb{B}^d$ wird durch

$$\Phi(B)(\omega) := \Phi(\omega)(B)$$

die Zufallsgröße $\Phi(B) : \Omega \to \mathbb{N}$ definiert.

Für festes $B \in \mathbb{B}^d$ ordnet $\Phi(B)$ jedem $\omega \in \Omega$ die Anzahl der Atome (entsprechend Vielfachheit) des Zählmaßes $\Phi(\omega)$ in B zu.

Definition 2.4.8.
Für einen Punktprozess Φ auf $\mathbb{R}^d$ heißt die Funktion $\nu : \mathbb{B}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\nu(B) = E\Phi(B) \text{ für alle } B \in \mathbb{B}^d \tag{2.4.1}$$

Intensitätsmaß von Φ.

Definition 2.4.9.
Sei ν ein σ-endliches Maß auf $\mathbb{B}^d$. Ein Punktprozess $\Phi : \Omega \to N^d$ heißt *Poissonscher Punktprozess mit Intensitätsmaß* ν, wenn er die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{gathered} P\left(\Phi(B) = k\right) = \frac{\nu(B)^k}{k!} e^{-\nu(B)}, \\ \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } B \in \mathbb{B}^d \text{ mit } \nu(B) < \infty \end{gathered} \tag{2.4.2}$$

und

$$\begin{aligned} &\Phi(B_1), \ldots, \Phi(B_m) \text{ sind unabhängig für alle } m \in \mathbb{N} \\ &\text{und paarweise disjunkten Mengen } B_1, \ldots, B_m \in \mathbb{B}^d \\ &\text{mit } \nu(B_j) < \infty \text{ für } j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Am Ende dieses Kapitels geben wir noch zwei wichtige Ergebnisse für Punktprozesse an.

Satz 2.4.10. (vgl. [Rei], Theorem 1.2.1)
Seien ν ein endliches Maß auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d\right)$, $d \geq 1$, mit $\nu\left(\mathbb{R}^d\right) > 0$ und

$$\Phi := \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{X_i}$$

ein Punktprozess derart, dass $\tau, X_1, X_2, \ldots$ unabhängig sind und die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

(i) $\tau \stackrel{d}{=} \mathfrak{P}\left(\nu\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$,

(ii) $X_i \stackrel{d}{=} \frac{\nu}{\nu\left(\mathbb{R}^d\right)}$, $i \in \mathbb{N}$.

Dann ist Φ ein Poissonscher Punktprozess mit Intensitätsmaß ν.

Sei nun $g : \left(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d\right) \to \left(\mathbb{R}^{d'}, \mathbb{B}^{d'}\right)$ eine meßbare Funktion. Die Abbildung $g^* : N^d \to N^{d'}$ wird durch die Gleichung

$$g^*(\rho) := \rho^{g^*}, \rho \in N^d,$$

definiert und es gilt:

Lemma 2.4.11. (vgl. [Rei], Lemma 1.1.3)
Ist Φ ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß ν, so ist ν^g das Intensitätsmaß des Punktprozesses $g^*(\Phi)$ auf $\mathbb{R}^{d'}$.

Kapitel 3

Die verzweigende Brownsche Bewegung

In diesem Kapitel wollen wir uns nun mit der verzweigenden Brownschen Bewegung (VBB) auseinandersetzen. Wir halten uns dabei vor allem an [Lal]. Besondere Beachtung schenken wir der inhomogenen verzweigenden Brownschen Bewegung (IVBB), mit deren Modellbildung wir uns im ersten Abschnitt beschäftigen werden. Im zweiten Abschnitt stellen wir kurz ein interessantes Ergebnis für die homogene verzweigende Brownschen Bewegung (HVBB) vor. Im letzten und größten Abschnitt werden wir uns dann genauer mit der IVBB auseinandersetzen und mittels mehrerer Hilfsprozesse auch hier ein interessantes Ergebnis erhalten.

3.1 Modellbildung

In diesem Paragraphen wollen wir das Modell für die VBB angeben. Wir werden feststellen, dass man das Modell der VBB sogar auf zwei unterschiedliche Arten beschreiben kann. Dafür sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ gegeben, auf dem die im Folgenden eingeführten Zufallsgrößen definiert sind.

3.1.1 Modellbeschreibung 1

Wir betrachten im Folgenden den binären Baum

$$\mathbb{T} \;=\; \varnothing \cup \bigcup_{n\geq 1} \{1,2\}^n$$

und schreiben die Elemente von $\mathbb{T}\backslash \{\varnothing\}$ in der Form $v = v_1 \ldots v_n$, $v_i \in \{1,2\}$ für $1 \leq i \leq n$. Das Element $\emptyset$ bildet die Wurzel des Baums. Es besitzt die Nachfolger 1 und 2, welche ihrerseits die Nachfolger 11,12 bzw. 21,22 haben, usw. Jedes

Element $v \in \mathbb{T}$ entspricht nun einem Teilchen, welches unabhängig von allen anderen Teilchen eine standard Brownsche Bewegung (SBB) durchführt. Dabei startet das Urmutterteilchen $\varnothing$ zum Zeitpunkt 0, während alle anderen Teilchen v ihre Bewegung zu einem zufälligen Zeitpunkt beginnen, dessen Verteilung von der Bewegung des Mutterteilchens abhängen kann. Außerdem startet jedes Tochterteilchen seine Bewegung im Sterbeort des Mutterteilchens. Uns interessiert nun vor allem das Verhalten des zur Zeit t am weitesten rechts befindlichen Teilchens, dessen Position wir mit R_t bezeichnen.

Diese Modellbeschreibung wollen wir nun noch etwas präzisieren: Für jedes $v \in \mathbb{T}$ sei $X^v = (X_t^v)_{t\geq 0}$ eine SBB, welche die Bewegung des Teilchens v relativ zur Anfangsposition seiner Bewegung (dem Sterbeort der Mutter) beschreibt. Weiter sei $\tau(v)$ eine nichtnegative Zufallsgröße, die die zufällige Zeit angibt, zu der sich das Teilchen v (bezogen auf seine Startzeit) in die zwei neuen Teilchen $v1$ und $v2$ teilt. Dann nennt man $\tau(v)$ auch die *Lebensdauer* von v. Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Paare

$$(X^v, \tau(v)), v \in \mathbb{T},$$

stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind, und dass

$$\mathbb{P}\left(\tau(v) > t | X^v\right) = \exp\left\{-\int_0^t \beta \circ X_s^v \, ds\right\}, t > 0,$$

für eine nichtnegative, stetige und beschränkte Funktion β gilt. Wir nennen ein solches Modell dann *verzweigende Brownsche Bewegung (VBB)*. Falls die Funktion $\beta : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ konstant ist, also $\beta(\cdot) \equiv \alpha$ für ein positives α gilt, die $\tau(v)$ also jeweils Exp(α)-verteilt sind, nennen wir die VBB *homogen (HVBB)*, und ansonsten *inhomogen (IVBB)*. Die Funktion $\beta : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ nennt man Verzweigungsfunktion der VBB.

Nun definieren wir T($\varnothing$):=0 und für $v = v_1 \dots v_n \in \mathbb{T} \setminus \{\varnothing\}$

$$T(v) := \tau(\varnothing) + \ldots + \tau(v_1 \ldots v_{n-1}).$$

$T(v)$ gibt also den Geburtszeitpunkt des Teilchens v an.

Im Folgenden wollen wir noch die Positionen der Teilchen im Zeitablauf beschreiben. Dafür definieren wir den Punktprozess $(Z_t)_{t\geq 0}$ durch

$$Z_t := \sum_{\substack{v\in\mathbb{T} \\ v=v_1\ldots v_n}} \sum_{j=1}^{2} \mathbb{1}_{\{T(v)+\tau(v)\leq t<T(v)+\tau(v)+\tau(vj)\}} \delta_{X^{vj}_{t-(T(v)+\tau(v))}+X^v_{\tau(v)}+\ldots+X^{\emptyset}_{\tau(\emptyset)}} \tag{3.1.1}$$

für alle $t \geq 0$. Für jedes $t \geq 0$ ist also Z_t das Punktmaß der Positionen aller zum Zeitpunkt t lebenden Teilchen. Für die Position des zum Zeitpunkt t am weitesten rechts befindlichen Teilchens ergibt sich dann

$$\begin{aligned} R_t := \max\Big\{ & X^{vj}_{t-(T(v)+\tau(v))} + X^v_{\tau(v)} + \ldots + X^{\emptyset}_{\tau(\emptyset)} : \\ & v \in \mathbb{T}, v = v_1, \ldots, v_n, j \in \{1, 2\}, T(v) + \tau(v) \leq t < T(v) + \tau(v) + \tau(vj)\Big\}. \end{aligned}$$

3.1.2 Modellbeschreibung 2

Geht man nun statt von der obigen Anschauung davon aus, dass ein Teilchen zum Splittingzeitpunkt nicht stirbt, sondern lediglich ein weiteres Teilchen erzeugt und gleichzeitig seine eigene Bewegung fortsetzt, so ändert diese Auffassung nichts am Modell, denn die Tatsache, dass die Bewegungen der Teilchen unabhängig sind und stationäre und unabhängige Zuwächse besitzen, sichert, dass die Zusammensetzung der Bewegung eines Mutterteilchen bis zum Splittingzeitpunkt mit der anschließenden Bewegung eines Tochterteilchens eine Brownsche Bewegung bleibt. Also spielt es keine Rolle, ob man davon ausgeht, dass sich jedes Teilchen nach einer zufälligen Zeit in zwei neue Teilchen derselben Art teilt und bis zu diesem Zeitpunkt eine Brownsche Bewegung ausführt, oder ob jedes Teilchen ad infinitum gemäß einer SBB wandert und in unabhängig identisch verteilten Abständen Tochterteilchen gebärt, die sich in derselben Weise verhalten. Nimmt man den zweiten Standpunkt ein, so kann man die Teilchen auch mit $1, 2, \dots$ in der Folge ihrer Geburtszeiten, die wir mit $T_0(i)$ bezeichnen, durchnummerieren und jedem Teilchen i eine SBB $X^i = (X^i_t)_{t \geq 0}$, die – entsprechend zur ersten Modellbeschreibung – die Bewegung des Teilchens relativ zum Geburtsort beschreibt, zuordnen. Außerdem kann man jedem Teilchen i eine Folge $(T_n(i) - T_0(i))_{n \geq 1}$ von Splittingzeiten zuweisen, so dass die $((X^i, T_n(i) - T_0(i))_{n \geq 1})_{i \geq 1}$ unabhängig identisch verteilt sind und

$$P\left(T_n(i) - T_{n-1}(i) > t | X^i, T_1(i), \dots, T_{n-1}(i)\right) \;=\; \exp\left\{ - \int_0^t \beta \circ X^i_s ds \right\}$$

für alle $n \geq 1$, alle $i \geq 1$ und alle $t > 0$ gilt. Bezeichnen nun $T_1, T_2, \dots$ die geordnete, aufsteigende Folge aller Geburtszeiten (also $T_1 = T_0(0) = 0$) und S^i_t die Position des i-ten Teilchens zum Zeitpunkt t, so hat Z_t die Form

$$Z_t \;=\; \sum_{i=1}^{N_t} \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}} \delta_{S^i_t}, \quad t \geq 0,$$

wobei

$$N_t \;:=\; \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}} \;=\; \sum_{i \geq 1} \delta_{T_i}([0, t])$$

den Teilchenzählprozess $(N_t)_{t \geq 0}$ definiert. Das zur Zeit t am weitesten rechts befindliche Teilchen hat dann die Position

$$R_t \;=\; \max\left\{ S^1_t, \dots, S^{N_t}_t \right\}.$$

Im Anschluss wird der Begriff der wandernden Welle eingeführt.

Definition 3.1.1.
Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto u(t, x)$ eine beliebige Funktion. Man sagt, dass u für

$t \to \infty$ eine *wandernde Welle mit Geschwindigkeit* k ist, wenn es eine Funktion $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \omega(x)$ und für alle t ein m_t gibt, so dass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

[WW1] Es gibt ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $u(t, m_t) = \frac{1}{2}$ für alle $t \geq t_0$.

[WW2] Es gilt $\frac{m_t}{t} \xrightarrow[t \to \infty]{} k$.

[WW3] Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $t_1(x)$ mit $u(t, m_t + x) = \omega(x)$ für alle $t \geq t_1(x)$.

In diesem Fall nennt man m_t für alle $t \geq t_0$ den *Median* von $v(t, \cdot)$. Wir sagen *u approximiert für* $t \to \infty$ *eine wandernde Welle mit Geschwindigkeitk*, wenn es eine wandernde Welle v mit Geschwindigkeit k und Mediane m_t von $v(t, \cdot)$ für hinreichend große t gibt, so dass [WW2] und die folgenden beiden Bedingungen gelten:

[WW4] Es gibt ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $u(t, m_t) \sim v(t, m_t) = \frac{1}{2}$ für alle $t \geq t_0$.

[WW5] Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $t_1(x)$ mit $u(t, m_t + x) \sim v(t, m_t + x)$ für alle $t \geq t_1(x)$.

Für alle $t \geq t_0$ nennt man m_t dann auch *Median* von $u(t, \cdot)$.

3.2 Die homogene verzweigende Brownsche Bewegung

Für die HVBB gilt das folgende Ergebnis:

Satz 3.2.1. *(vgl. [Lal])*
Gegeben sei eine homogene verzweigende Brownsche Bewegung X *und es sei weiter* $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to [0, 1]$ *definiert durch die Gleichung*

$$(t, x) \mapsto u(t, x) \ := \ P\left(R_t \leq x\right).$$

Dann besitzt $u(t, \cdot)$ *für alle* t *einen Median* m_t *und für* $t \to \infty$ *approximiert* u *eine wandernde Welle mit Geschwindigkeit* $\sqrt{2}$.

Wir wollen dieses Ergebnis hier nicht beweisen, sondern erwähnen nur, dass diese Aussage aus der Tatsache folgt, dass $u(t, x)$ die K-P-P/Fisher-Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} \ = \ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 - u$$

löst.

3.3 Die inhomogene verzweigende Brownsche Bewegung

In diesem Abschnitt schauen wir uns nun die IVBB genauer an. Wir werden hier ein interessantes Endergebnis erhalten:

Satz 3.3.1.
Es sei vorausgesetzt, dass sowohl

$$\lim_{|x|\to\infty} \beta(x) \;=\; 0 \tag{3.3.1}$$

als auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)\; dx \;<\; \infty \tag{3.3.2}$$

gelten. Dann existieren eine Zufallsvariable $W : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (0, \infty)$ *und Konstanten* $\lambda_0 > 0$, $\gamma > 0$, *so dass für alle* $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}\; t + x\right) \;=\; E\exp\left\{-W\gamma e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\} \tag{3.3.3}$$

gilt.

Dieses Ergebnis ist nicht für die HVBB anwendbar, da diese die Voraussetzung (3.3.1) nicht erfüllt. Um Satz 3.3.1 herzuleiten, betrachten wir im ersten Teil dieses Abschnittes Hilfsprozesse, und zwar sogenannte Poissonsche Flutwellen, für die wir einige interessante Ergebnisse beweisen werden. Mit Hilfe dieser Prozesse werden wir dann im zweiten Teil den Satz 3.3.1 für den Spezialfall einer IVBB, deren Verzweigungsfunktion einen kompakten Träger besitz, beweisen. Im letzten Teil skizzieren wir schließlich den Beweis dieses Satzes für den allgemeinen Fall.

3.3.1 Die Poissonsche Flutwelle

Um die *Poissonsche Flutwelle mit Parametern* C, λ, μ einzuführen, seien im Folgenden ein W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, Konstanten $C, \lambda > 0$ und ein W-Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ gegeben. Außerdem seien $(N_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ unabhängige Zufallsgrößen mit

$$N_n \;\stackrel{d}{=}\; \mathfrak{P}\left(\int_n^{n+1} Ce^{\lambda t}\right).$$

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gebe N_n die Anzahl der Punkte der Flutwelle an, die im Zeitintervall $[n, n+1)$ starten. Außerdem seien für jedes $n \in \mathbb{Z}$ $(T_{nk}, X_{nk})_{k\geq 1}$ unabhängige Zufallsvariable, die gemäß

$$(EN_n)^{-1}\, Ce^{\lambda t}\; \mathbb{1}_{[n,n+1)}(t)\; \lambda\!\!\!\lambda \otimes \mu(dt, dx)$$

verteilt sind. Weiter seien $(T_{nk}, X_{nk})_{n\in\mathbb{Z},k\geq 1}$ und $(N_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stochastisch unabhängig. Das Maß ν auf $\mathbb{B}^2$ sei definiert durch

$$\nu(dt, dx) \ := \ Ce^{\lambda t}\lambda\!\!\!\lambda \otimes \mu(dt, dx).$$

Da

$$\nu([n, n+1) \times \mathbb{R}) \ = \ \int_n^{n+1} Ce^{\lambda t} dt$$

und

$$\frac{\nu(\cdot \cap ([n, n+1) \times \mathbb{R}))}{\nu([n, n+1) \times \mathbb{R})} \ = \ (EN_n)^{-1}\, Ce^{\lambda t}\ \mathbb{1}_{[n,n+1)}(t)\ \lambda\!\!\!\lambda \otimes \mu(dt, dx)$$

gelten, definiert

$$\Phi_n \ := \ \sum_{k=1}^{N_n} \delta_{(T_{nk}, X_{nk})}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ nach Satz 2.4.10 einen Poissonschen Punktprozess mit Intensitätsmaß

$$\nu(\cdot \cap ([n, n+1) \times \mathbb{R}))$$

und seine Projektion

$$\Psi_n \ := \ \Phi(\mathbb{R} \times \cdot) \ = \ \sum_{k=1}^{N_n} \delta_{X_{nk}}$$

ist nach Lemma 2.4.11, wobei π_2 die meßbare Funktion ist, ein Poissonscher Punktprozess mit Intensitätsmaß μ. Dabei ist π_2 die Projektion auf die zweite Komponente. Man kann erkennen (vgl.[Rei], Beweis von Theorem 2.1.1), dass

$$\Phi \ := \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi_n$$

ein Poissonscher Punktprozess mit Intensitätsmaß

$$\nu \ = \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu(\cdot \cap ([n, n+1) \times \mathbb{R})).$$

Der Punktprozess Φ beschreibt für alle Teilchen der Flutwelle die Startzeiten und Startpunkte. Mit N_t^* bezeichnen wir die Anzahl der Teilchen bis zum Zeitpunkt t, das heißt

$$N_t^* \ := \ \Phi((-\infty, t) \times \mathbb{R}).$$

Um nun noch die Bewegung aller Teilchen zu modellieren, sei $\left(B_\cdot^{nk}\right)_{n\in\mathbb{Z},k\geq 1}$ eine von allen bisherigen Variablen unabhängige Familie unabhängiger SBB. Definieren wir für $t \in \mathbb{R}$

$$S_t^{nk} := X_{nk} + B_t^{nk},$$

so gibt für $t \geq T_{nk}$

$$S^{nk}_{t-T_{nk}} = X_{nk} + B^{nk}_{t-T_{nk}}$$

die Position des Teilchens nk zur Zeit t an. Für festes n sind die $\left(T_{nk}, X^{nk}_{t-T_{nk}}\right)$, $k \geq 1$ unabhängig und identisch verteilt. Außerdem definiert für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\Psi^t_n \ := \ \sum_{k=1}^{N_n} \delta_{\left(T_{nk}, S^{nk}_{t-T_{nk}}\right)} \mathbb{1}_{\{T_{nk} \leq t\}}$$

einen (ausgedünnten) Poissonschen Punktprozess mit Intensitätsmaß

$$\begin{aligned}
&\nu^t_n(A \times (-\infty, x]) \ = \ E\Psi^t_n(A \times (-\infty, x]) \\
&= \int_{A \cap [n,n+1)} Ce^{\lambda s} P\left(X_{nk} + B^{nk}_{t-s} \leq x\right) \ \lambda\!\!\lambda(ds) \\
&= \int_{A \cap [n,n+1)} Ce^{\lambda s} \int_{\mathbb{R}} P\left(B^{nk}_{t-s} \leq x - y\right) \ \mu(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{A \cap [n,n+1)} \int_{-\infty}^{x-y} Ce^{\lambda s} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(t-s)}\right\} dz \ \lambda\!\!\lambda(ds) \ \mu(dy) \\
&= \int_{A \cap [n,n+1)} \int_{-\infty}^{x} \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{(z-y)^2}{2(t-s)} + \lambda s\right\} \mu(dy) \ dz \ \lambda\!\!\lambda(ds)
\end{aligned}$$

für alle $A \in \mathbb{B}_{(-\infty,t]}$ und $x \in \mathbb{R}$. Definieren wir nun

$$\Psi^t \ := \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi^t_n,$$

so ist dies wieder ein Poissonscher Punktprozess und besitzt (vgl.[Rei], Beweis von Theorem 2.1.1) das Intensitätsmaß ν^t mit

$$\begin{aligned}
\nu^t(ds, dz) \ &:= \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu^t_n(ds, dz) \\
&= \ -\mathbb{1}_{(-\infty,t]}(s) \frac{C}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{z-y)^2}{2(t-s)} + \lambda s\right\} \mu(dy) \ \lambda\!\!\lambda^2(ds, dz).
\end{aligned}$$

Weiter definieren wir für alle $t \in \mathbb{R}$ den Poissonschen Punktprozess der Positionen der existierenden Teilchen zum Zeitpunkt t durch

$$\widetilde{\Psi}^t \ := \ \Psi^t((-\infty, t] \times \cdot).$$

Dieser besitzt das Intensitätsmaß $\widetilde{\nu}^t$, wobei $\widetilde{\nu}^t(dx) = i_t(x) \ dx$ und

$$i_t(x) \ := \ \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{2(t-s)}} Ce^{\lambda s}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \ \mu(dy) \ ds \tag{3.3.4}$$

gilt. Schließlich definieren wir für alle $t \in \mathbb{R}$ die Position des zur Zeit t rechtesten Teilchens durch

$$R_t^* \;:=\; \max\{S_{t-T_{nk}}^{nk} \;:\; T_{nk} \leq t, n \in \mathbb{Z}, k \geq 1\} \tag{3.3.5}$$

die Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ durch

$$(t,x) \mapsto v(t,x) \;:=\; P\left(R_t^* \leq x\right). \tag{3.3.6}$$

Es gilt zunächst:

Lemma 3.3.2.
Für die Funktion i_t gilt

$$\begin{aligned} i_t(x) \;:=&\; \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{2(t-s)}}Ce^{\lambda s}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\;\mu(dy)\;ds \\ =&\; \frac{Ce^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|}\;\mu(dy). \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Beweis.
Mit dem Satz von Fubini und einer Substitution folgt

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{2(t-s)}}Ce^{\lambda s}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\;\mu(dy)\;ds \\ =&\; \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{2(t-s)}}e^{\lambda s}}{\sqrt{t-s}}\;ds\;\mu(dy) \\ =&\; \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{2\alpha}}e^{\lambda(t-\alpha)}}{\sqrt{\alpha}}\;d\alpha\;\mu(dy) \\ =&\; \frac{Ce^{\lambda t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{2\alpha}-\lambda\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\;d\alpha\;\mu(dy). \end{aligned}$$

Also bleibt

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{2\alpha}-\lambda\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\;d\alpha \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\;e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|} \tag{3.3.8}$$

zu zeigen. Nach Gleichung 3471.9 auf Seite 384 in [Gra] gilt

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{2\alpha}-\lambda\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\;d\alpha \;=&\; 2\left(\frac{(x-y)^2}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right) \\ =&\; 2\frac{\sqrt{|x-y|}}{(2\lambda)^{\frac{1}{4}}}K_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right), \end{aligned}$$

wobei (vgl. [Gra], S.961)

$$K_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right) \;:=\; \frac{\pi i}{2}\, e^{\frac{\pi i}{4}}\; H^{(1)}_{\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right)$$

mit

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right) \;:=\; J_{\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right) + iN_{\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right).$$

Dabei sind J_ν und N_ν wie folgt definiert (vgl. [Gra], S.960) :

$$J_\nu(z) \;:=\; \frac{z^\nu}{2^\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}, \quad |arg(z)|<\pi,$$

$$N_\nu(z) \;:=\; \frac{1}{\sin(\nu\pi)}\left[\cos(\nu\pi)J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)\right], \quad |arg(z)|<\pi, \nu\notin\mathbb{Z}.$$

Also erhalten wir wegen $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$$\begin{aligned}
H^{(1)}_{\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right) \;&=\; \frac{\left(i\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(i\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right)^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\\
&+ i\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)J_{\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right)-J_{-\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right)\right]\right)\\
&= \left(\frac{i\,|x-y|\,\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-1)^k\left(\sqrt{2\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\\
&+\; i\left[-J_{-\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{2\lambda}\,|x-y|\right)\right]\\
&= \left(\frac{i\,|x-y|\,\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{\sqrt{2}^{2k}k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\\
&-\; i\left(\frac{i\,|x-y|\,\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{\sqrt{2}^{2k}k!\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \;=:\; K.
\end{aligned}$$

Weiter folgt wegen $\Gamma(n+\frac{1}{2}) \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!$(vgl. [Gra], S.947) dass

$$\begin{aligned}
K \ &= \ \left(\frac{i\,|x-y|\,\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} 2\frac{\left(\sqrt{\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{\sqrt{2}^{2k} k! \frac{\sqrt{\pi}}{2^k}(2k+1)!!} \\
&- \ i\left(\frac{\sqrt{2}}{i\,|x-y|\,\sqrt{\lambda}}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{\sqrt{2}^{2k} k! \frac{\sqrt{\pi}}{2^k}(2k-1)!!} \\
&= \ \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{2}}{|x-y|\,\sqrt{\lambda}}\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left[|x-y|\,\sqrt{2\lambda}\,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{k!(2k+1)!!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{k!(2k-1)!!}\right]}_{=:L}
\end{aligned}$$

gilt.
Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{2\alpha}-\lambda\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\,d\alpha \ &= \ 2\frac{\sqrt{|x-y|}}{(2\lambda)^{\frac{1}{4}}} K_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right) \\
&= \ 2\frac{\sqrt{|x-y|}}{(2\lambda)^{\frac{1}{4}}} \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} H^{(1)}_{\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{2(x-y)^2\lambda}\right) \\
&= \ 2\frac{\sqrt{|x-y|}}{(2\lambda)^{\frac{1}{4}}} \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{2}}{|x-y|\,\sqrt{\lambda}}\right)^{\frac{1}{2}} L \\
&= \ -\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} L.
\end{aligned}$$

Es bleibt daher zu zeigen, dass

$$L \ = \ -e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|}$$

gilt. Wegen

$$(2k)!! \ = \ 2^k k! \text{ und } (2k-1)!! \ = \ \frac{(2k)!}{2^k k!}$$

erhält man

$$
\begin{aligned}
L &= |x-y|\sqrt{2\lambda}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{k!\frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{k!\frac{(2k)!}{2^k k!}} \\
&= |x-y|\sqrt{2\lambda}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\left(\sqrt{2\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{\frac{(2k+2)!}{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2\lambda}\,|x-y|\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2\lambda}\,|x-y|\right)^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sinh\left(\sqrt{2\lambda}\,|x-y|\right) - \cosh\left(\sqrt{2\lambda}\,|x-y|\right) \\
&= -e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|},
\end{aligned}
$$

und damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Bei den nachfolgende Betrachtungen unterscheiden wir zwei Fälle:
1.Fall:
Nehmen wir zuerst an, dass der Träger des Maßes μ vollständig in $(-\infty, x_*]$ für ein $x_* < \infty$ enthalten ist. Dann erhalten wir folgendes Lemma, welches die Gestalt von $i_t(x)$ für alle $x \geq x_*$ und alle $t \in \mathbb{R}$ angibt:

Lemma 3.3.3.
Für alle $x \geq x_*$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$
i_t(x) \;=\; \frac{Ce^{-\sqrt{2\lambda}\left(x-\sqrt{\frac{\lambda}{2}}t\right)}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy)\ . \tag{3.3.9}
$$

Beweis.
Mit Hilfe von (3.3.7) erhalten wir für beliebiges $x \geq x_*$ und beliebiges $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
i_t(x) &= \frac{Ce^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x_*} e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|}\ \mu(dy) \;=\; \frac{Ce^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x_*} e^{-\sqrt{2\lambda}(x-y)}\ \mu(dy) \\
&= \frac{Ce^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}x}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy) \;=\; \frac{Ce^{-\sqrt{2\lambda}\left(x-\sqrt{\frac{\lambda}{2}}t\right)}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy).
\end{aligned}
$$

□

Als nächstes folgt:

Lemma 3.3.4.
Für $t \to \infty$ ist $i_t(x)$ in der Region $x \geq x_*$ eine wandernde Welle mit Geschwin-

digkeit $\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$*, das heißt es existieren eine Funktion* $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und für alle* t *ein* m_t*, so dass für alle* $x \geq x_*$ *die folgenden Aussagen gelten:*

(i) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{m_t}{t} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$.

(ii) Es gibt ein $t_0 \in \mathbb{R}$*, so dass* $i_t(m_t) = \frac{1}{2}$ *für alle* $t \geq t_0$ *gilt.*

(iii) Es gibt ein $t_1(x) \in \mathbb{R}$*, so dass für alle* $t \geq t_1(x)$ $i_t(m_t + x) = \omega(x)$.

Beweis.
Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$m_t \;:=\; \frac{\lambda t}{\sqrt{2\lambda}} - \frac{\log k'}{\sqrt{2\lambda}} \;=\; t\sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \frac{\log k'}{\sqrt{2\lambda}}, \tag{3.3.10}$$

wobei

$$k' \;:=\; \frac{\sqrt{2\lambda}}{2C\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy)} \;>\; 0.$$

Es folgt direkt

$$\frac{m_t}{t} \;\xrightarrow[t\to\infty]{}\; \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,.$$

Weiter ergibt sich wegen Lemma 3.3.3, dass für hinreichend großes t

$$\begin{aligned}
i_t(m_t) &= \frac{Ce^{-\sqrt{2\lambda}\left(m_t - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}t\right)}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \\
&= \frac{Ce^{-\sqrt{2\lambda}\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{2\lambda}} - \frac{\log k'}{\sqrt{2\lambda}} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}t\right)}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \\
&= \frac{Ce^{\log k'}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \\
&= \frac{C\frac{\sqrt{2\lambda}}{2C\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy)}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \;=\; \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

gilt. Außerdem folgt für beliebiges $x \geq x_*$ und hinreichend großes t

$$\begin{aligned}
i_t(m_t + x) &= \frac{C}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}t - \frac{\log k'}{\sqrt{2\lambda}} + x - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}t\right)} \int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \\
&= \frac{Ce^{-\sqrt{2\lambda}x + \log k'}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \\
&= \frac{e^{-\sqrt{2\lambda}x}}{2} \;=:\; w(x).
\end{aligned}$$

□

Als nächstes geben wir ein Lemma zur Gestalt von $v(t,x)$ aus (3.3.6) für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \geq x_*$ an:

Lemma 3.3.5.
Für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \geq x_*$ gilt

$$v(t,x) \;=\; \exp\left\{-\widetilde{K}e^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}x}\right\}, \tag{3.3.11}$$

wobei

$$\widetilde{K} \;:=\; \frac{C}{2\lambda}\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}z}\;\mu(dz). \tag{3.3.12}$$

Beweis.
Wegen (3.3.9) erhalten wir für alle $x \geq x_*$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
v(t,x) &= P\left(\widetilde{\Psi}^t((x,\infty)) = 0\right)\\
&= \frac{(\widetilde{\nu}^t((x,\infty)))^0}{0!}\;e^{-\widetilde{\nu}_t((x,\infty))}\\
&= \exp\left\{-\int_x^\infty i_t(y)\;dy\right\}\\
&= \exp\left\{-\frac{Ce^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}}\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}z}\int_x^\infty e^{-\sqrt{2\lambda}y}\;dy\;\mu(dz)\right\}\\
&= \exp\left\{-\frac{Ce^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}x}}{2\lambda}\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}z}\;\mu(dz)\right\}\\
&= \exp\left\{-\widetilde{K}e^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}x}\right\}
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

mit $\widetilde{K}$ aus Gleichung (3.3.12). Es folgt die Behauptung. □

Die genaue Gestalt von $v(t,x)$ kann man nun nutzen, um das folgende Ergebnis zu beweisen:

Lemma 3.3.6.
Die Funktion $v(t,x)$ ist für $t \to \infty$ eine wandernde Welle mit Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$.

Beweis.
Wir definieren zuerst für alle $t \in \mathbb{R}$

$$m_t \;:=\; -\frac{\log k^*}{\sqrt{2\lambda}} + t\sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \tag{3.3.14}$$

wobei

$$k^* \;:=\; -\frac{2\lambda\log\frac{1}{2}}{C\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy)}\;(>0)\;.$$

Es ergibt sich

$$\frac{m_t}{t} = \frac{-\log k^*}{\sqrt{2\lambda}t} + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \xrightarrow[t\to\infty]{} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\ .$$

Außerdem erhält man wegen Lemma 3.3.5 für hinreichend großes t

$$\begin{aligned} v(t,m_t) &= \exp\left\{-\frac{Ce^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}m_t}}{2\lambda}\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{Ce^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}\left(-\frac{\log k^*}{\sqrt{2\lambda}}+t\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)}}{2\lambda}\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{Ck^*}{2\lambda}\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy)\right\} = \frac{1}{2}\ . \end{aligned}$$

Schließlich sieht man, dass für belibiges $x \in \mathbb{R}$ ein $t_1(x)$ existiert, so dass für alle $t \geq t_1(x)$

$$\begin{aligned} v(t,m_t+x) &= \exp\left\{-\frac{Ce^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}(m_t+x)}}{2\lambda}\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{Ce^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}\left(-\frac{\log k^*}{\sqrt{2\lambda}}+t\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+x\right)}}{2\lambda}\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{Ce^{-\sqrt{2\lambda}x+\log k^*}}{2\lambda}\int_{-\infty}^{x_*} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy)\right\} \ =:\ \omega(x) \end{aligned}$$

gilt. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Zusätzlich erhalten wir ein Lemma zum Grenzverhalten von $\frac{R_t^*}{t}$.

Lemma 3.3.7.
Es gilt

$$\frac{R_t^*}{t} \xrightarrow{P} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}.$$

Beweis.

Wegen (3.3.11) gilt für jedes $\epsilon > 0$ und $t > 0$

$$\begin{aligned}
&P\left(\left|\frac{R_t^*}{t} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right| > \epsilon\right) \\
&= P\left(\frac{R_t^*}{t} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} > \epsilon\right) + P\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \frac{R_t^*}{t} > \epsilon\right) \\
&= P\left(R_t^* > \left(\epsilon + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) t\right) + P\left(R_t^* < t\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \epsilon\right)\right) \\
&= 1 - P\left(R_t^* \leq t\left(\epsilon + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)\right) + P\left(R_t^* \leq t\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \epsilon\right)\right) \\
&= 1 - \exp\left\{-Ke^{\lambda t - \sqrt{2\lambda} t\left(\epsilon + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)}\right\} + \exp\left\{-Ke^{\lambda t - \sqrt{2\lambda} t\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \epsilon\right)}\right\} \\
&= 1 - \exp\left\{-Ke^{-\sqrt{2\lambda}\epsilon t}\right\} + \exp\left\{-Ke^{\sqrt{2\lambda}\epsilon t}\right\}
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Wegen

$$\exp\left\{-Ke^{-\sqrt{2\lambda}\epsilon t}\right\} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

und

$$\exp\left\{-Ke^{\sqrt{2\lambda}\epsilon t}\right\} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

folgt die Behauptung. □

2.Fall:

Gehen wir nun davon aus, dass es kein x_* gibt, so dass der Träger des Maßes μ vollständig in $(-\infty, x_*]$ enthalten ist. Dann folgt durch Aufteilung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|}\ \mu(dy)$$

an der Stelle x aus (3.3.7), dass

$$i_t(x) = \frac{Ce^{\lambda t - \sqrt{2\lambda}x}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy) + \frac{Ce^{\lambda t + \sqrt{2\lambda}x}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{x}^{\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy) \tag{3.3.16}$$

gilt. Daher erhalten wir:

Lemma 3.3.8.
Falls $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy) < \infty$ gilt, so folgt

$$i_t(x) \sim \frac{Ce^{\lambda t - \sqrt{2\lambda}x}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\ \mu(dy)\ \ (x \to \infty) \tag{3.3.17}$$

gleichmäßig in t.

Beweis.
Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{\frac{Ce^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}} \left(e^{-\sqrt{2\lambda}x} \int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy) + e^{\sqrt{2\lambda}x} \int_{x}^{\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy) \right)}{\frac{Ce^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy)} - 1 \right|$$
$$= \left| \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy)} + \frac{e^{\sqrt{2\lambda}x} \int_{x}^{\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy)}{e^{-\sqrt{2\lambda}x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy)} - 1 \right|$$
$$= \left| \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy)} + \frac{e^{2\sqrt{2\lambda}x} \int_{x}^{\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy)} - 1 \right|.$$

Da nach Voraussetzung $0 < \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy) < \infty$ ist, erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy)} \;=\; 1.$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass

$$\lim_{x\to\infty} e^{2\sqrt{2\lambda}x} \int_{x}^{\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy) \;=\; 0$$

gilt. Dies folgt aber aufgrund der folgenden Überlegung:

$$e^{2\sqrt{2\lambda}x} \int_{x}^{\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy) \;=\; \int_{x}^{\infty} e^{(2x-y)\sqrt{2\lambda}} \; \mu(dy) \;\leq\; \int_{x}^{\infty} e^{(2y-y)\sqrt{2\lambda}} \; \mu(dy)$$
$$= \int_{x}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y} \; \mu(dy) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0,$$

wobei der letzte Schritt wegen $0 < \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y} \mu(dy) < \infty$ folgt. □

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man schließlich das folgende Pendant zu Lemma 3.3.4 beweisen:

Lemma 3.3.9.
Falls $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y} \mu(dy) < \infty$ gilt, so approximiert $i_t(x)$ für $t \to \infty$ eine wandernde Welle mit Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$.

Beweis.
Zuerst definieren wir für $t \in \mathbb{R}$

$$m_t \;:=\; \frac{\lambda t - \widetilde{k}}{\sqrt{2\lambda}}$$

mit

$$\widetilde{k} \;:=\; \log \frac{\sqrt{2\lambda}}{2C\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy)}\;.$$

Dann erhalten wir

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m_t}{t} \;=\; \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\;.$$

Außerdem gilt wegen Lemma 3.3.8 für hinreichend großes t

$$\begin{aligned} i_t(m_t) \;&\sim\; \frac{Ce^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}m_t}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \\ &=\; \frac{Ce^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}\frac{\lambda t-\widetilde{k}}{\sqrt{2\lambda}}}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \\ &=\; \frac{Ce^{\widetilde{k}}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \;=\; \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und hinreichend großes t

$$\begin{aligned} i_t(m_t+x) \;&\sim\; \frac{Ce^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}(m_t+x)}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \\ &=\; \frac{Ce^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}\left(\frac{\lambda t-\widetilde{k}}{\sqrt{2\lambda}}+x\right)}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \\ &=\; \frac{Ce^{\sqrt{2\lambda}x+\widetilde{k}}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy) \;=:\; \omega(x). \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Also folgt die Behauptung mit

$$W(t,x) := \frac{Ce^{\lambda t-\sqrt{2\lambda}x}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\;\mu(dy)$$

als wandernder Welle. □

Weiter ergibt sich:

Lemma 3.3.10.
Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$v(t,x) \;=\; \exp\left\{-\int_x^{\infty} i_t(y)\;dy\right\}. \tag{3.3.19}$$

Beweis.
Genau wie in Lemma 3.3.5 ergibt sich

$$\begin{aligned} v(t,x) &= P\left(\widetilde{\Psi}^t((x,\infty)) = 0\right) \\ &= e^{-\widetilde{\nu}^t((x,\infty))} \\ &= \exp\left\{-\int_x^\infty i_t(y)\,dy\right\} \end{aligned}$$

□

Die nächsten drei Lemmata geben wir ohne Beweis an:

Lemma 3.3.11.
Falls $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\,\mu(dy) < \infty$ *gilt, so folgt*

$$\log v(t,x) \;\sim\; -K' e^{\lambda t - \sqrt{2\lambda}x} \;(x \to \infty) \tag{3.3.20}$$

gleichmäßig in t*, wobei*

$$K' := \frac{C}{2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\,\mu(dy).$$

Lemma 3.3.12.
Falls $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda}y}\,\mu(dy) < \infty$ *gilt, so approximiert* $v(t,x)$ *für* $t \to \infty$ *eine wandernde Welle mit Geschwindigkeit* $\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$.

Lemma 3.3.13.
Für alle $s < \infty$ *gilt*

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} P(\text{ rechtestes Teilchen zur Zeit } t \text{ ist vor der Zeit } s \text{ geboren }) \\ &= \;0. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

3.3.2 Ein Spezialfall – Die Verzweigungsfunktion mit kompaktem Träger

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur solche IVBB, deren Verzweigungsfunktionen β kompakten Träger besitzen. Zuerst geben wir zwei Definitionen an:

Definition 3.3.14.
Seien $J \subset \mathbb{R}$ und $t \geq 0$. Mit $N_t(J)$ bezeichnen wir die *Anzahl der IVBB-Teilchen in* J *zur Zeit* t, das heißt

$$N_t(J) \;:=\; \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{S_t^i}(J). \tag{3.3.22}$$

Definition 3.3.15.
Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ wird die Zufallsgröße W_t auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ durch

$$W_t(\omega) \ := \ e^{-\lambda_0 t} \int_{\mathbb{R}} \phi_0(x) \ N_t(\omega, dx), \ \omega \in \Omega, \tag{3.3.23}$$

definiert, wobei λ_0 bzw. ϕ_0 Eigenwert bzw. Eigenfunktion des Differentialoperators

$$g \mapsto \frac{1}{2}\ddot{g} + \beta g$$

sind. Weiter seien die Zufallsgröße W auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definiert durch

$$W(\omega) \ := \ \lim_{t \to \infty} \ W_t(\omega), \ \omega \in \Omega, \tag{3.3.24}$$

und das Maß ν auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ durch die Gleichung

$$\nu(J) \ := \ \int_J \phi_0(x) \ dx \ , \ J \in \mathbb{B}, \tag{3.3.25}$$

gegeben.

Wir erinnern hier noch an ein Ergebnis von Watanabe:

Satz 3.3.16.
Für jedes beschränkte Intervall $J \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_t(J)}{e^{\lambda_0 t}} \ = \ W\nu(J) \textit{ fast sicher.} \tag{3.3.26}$$

Weiter hat man für jede nichtnegative, stetige Funktion f auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\int f(x) \ N_t(dx)}{e^{\lambda_0 t}} \ = \ W \int f \ d\nu. \tag{3.3.27}$$

Nun wollen wir ein starkes Gesetz der großen Zahlen aus [Lal] zitieren, welches zum Beweis des nachfolgenden Satzes benötigt wird.

Lemma 3.3.17.
Es sei $(N_t)_{t \geq 0}$ der zu einem Punktprozess auf $(0, \infty)$ gehörende Zählprozess. Ferner seien $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration, bzgl. der $(N_t)_{t \geq 0}$ adaptiert ist, und λ_t für jedes $t \geq 0$ eine $\mathfrak{F}_t$-messbare Intensität des Punktprozesses. Gibt es dann eine stetige Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ derart, dass für eine positive Zufallsvariable Y sowohl

$$\int_0^\infty f(t) \ dt \ = \ \infty$$

als auch

$$\frac{\lambda_t}{f(t)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} Y \quad \textit{fast sicher}$$

gelten, so folgt

$$\frac{N_t}{\int_0^t f(s)\ ds} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} Y \quad \textit{fast sicher.}$$

Satz 3.3.18.
Sei eine IVBB mit Verzweigungsfunktion mit kompaktem Träger gegeben. Weiter seien $0 < C_0 < C_1 < \infty$ beliebige Konstanten und $3\delta := C_1 - C_0$. Dann gibt es auf einem geeigneten W-Raum $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{P})$ eine Kopie der IVBB und Poissonsche Flutwellen W_0, W_1 mit Geburtsintensitätsmaßen $C_i e^{\lambda_0 t}\beta(x)\nu(dx)dt$, i=0,1, derart, dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Bezeichnen R_t, R_t^0, R_t^1 die Positionen des zum Zeitpunkt t rechtesten Teilchens in der IVBB bzw. in den Poissonschen Flutwellen W_0, W_1, so gibt es auf dem Ereignis $\{C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\}$ ein $N \subset \widetilde{\Omega}$ und ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \geq t_0$ und $\widetilde{\omega} \notin N$

$$\widetilde{P}(N) = 0 \quad \textit{und} \quad R_t^0(\widetilde{\omega}) - \delta \leq R_t(\widetilde{\omega}) \leq R_t^1(\widetilde{\omega}) + \delta \tag{3.3.28}$$

gelten.

(ii) Für alle t sind die σ-Algebren $\mathfrak{F}_t, \mathfrak{F}_t^{W_i}, i = 0, 1$, stochastisch unabhängig von den σ-Algebren $\mathfrak{G}_t^{W_i}(m_p, l_p)$, $i = 0, 1$, $p, l_p \in \mathbb{N}$, $m_p \in \mathbb{Z}$, wobei

$$\mathfrak{F}_t := \sigma\left(S_r^i\, \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}}, \{T_i \leq t\} \ :\ i \in \mathbb{N}, r \leq t\right), \tag{3.3.29}$$

$$\mathfrak{F}_t^{W_i} := \sigma\left(S_r^{nk^i}\ \mathbb{1}_{T_{nk}^i \leq t} \left\{T_{nk}^i \leq t\right\} \ :\ r \leq t,\ n \in \mathbb{Z},\ k \geq 1\right) \tag{3.3.30}$$

und

$$\mathfrak{G}_t^{W_i}(m_p, l_p) := \sigma\left(\left(S_r^{m_p l_p}\right)_{r \geq T_{m_p l_p}}\right) \tag{3.3.31}$$

mit

$$T_{m_1 l_1} := \inf\{T_{nk} \geq t \ :\ (n,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\},$$
$$T_{m_{p+1} l_{p+1}} := \inf\{T_{nk} \geq t \ :\ (n,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \backslash \{(m_1, l_1), \ldots, (m_p, l_p)\}\}.$$

Beweis.
Seien eine Kopie der IVBB auf $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{P})$ und zwei unabhängige Poissonsche Punktprozesse $\Phi_i, i = 0, 1$, auf $\mathbb{R}^2$ mit Intensitätsmaß ν_i gegeben, wobei

$$\nu_i(dt, dx) := C_i e^{\lambda_0 t}\beta(x)\ \nu(dx)\ dt.$$

Wir betrachten von nun an nur noch die Kopie der IVBB und bezeichnen diese wieder als IVBB. Diese Poissonschen Punktprozesse sollen als Geburtsprozesse der Flutwellen W_0 bzw. W_1 dienen. Ein Teilchen in einer Flutwelle W_i ($i \in \{0,1\}$) führt dannn ausgehend von seinem Geburtsort unabhängig von der IVBB, den Geburtsprozessen der Flutwellen und den Bewegungen aller anderen Teilchen aus den Flutwellen eine standard Brownsche Bewegung aus, bis es sich mit einem IVBB-Teilchen paart. Von da an folgt es dem IVBB-Teilchen, das heißt es folgt dem Pfad, der den Abstand zwischen sich und dem IVBB-Teilchen konstant lässt.

Wir wollen nun die Paarungsregeln für die W_i-Teilchen beschreiben. Dafür sei J ein Intervall, welches den Träger von β enthält. Dies bedeutet, dass keine Teilchen außerhalb von $\mathbb{R} \times J$ geboren werden. Sei $\epsilon > 0$ so gewählt, dass $\epsilon < \frac{\delta}{2}$ gilt. Weiter seien disjunkte Intervalle $J_1, \ldots, J_h$ ($h \in \mathbb{N}$) mit

$$J = \bigcup_{j=1}^{h} J_j$$

derart gegeben, dass für alle $j = 1, \ldots, h$ die Länge von J_j höchstens gleich ϵ ist. $\alpha > 0$ werden wir später noch genauer festlegen. Zuerst werden wir die Paarungsregel für W_1-Teilchen angeben:

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \ldots, h\}$ beliebig. Jedes IVBB-Teilchen, das in J_j während $[n\alpha, (n+1)\alpha)$ geboren wird, wird direkt bei seiner Geburt mit dem ältesten ungepaarten W_1-Teilchen gepaart, das während $[(n-1)\alpha, n\alpha)$ in J_j geboren wurde und sich bis zur Geburtszeit des IVBB-Teilchens nicht weiter als $\frac{\delta}{2}$ von seinem Geburtsort entfernt hat. Falls kein solches W_1-Teilchen existiert, so wird das IVBB-Teilchen gepaart, sobald es mit einem ungepaarten W_1-Teilchen zusammentrifft, das älter als 2α ist. Die beiden Teilchen paaren sich dann sofort miteinander.

Die Paarungsregeln für die W_0-Teilchen sind ähnlich, nur dass die Rollen vertauscht sind: Es seien $n \in \mathbb{Z}$ und $j \in \{1, \ldots, h\}$ beliebig. Jedes W_0-Teilchen, welches in J_j während $[n\alpha, (n+1)\alpha)$ geboren wird, wird sofort mit dem ältesten ungepaarten IVBB-Teilchen gepaart, das während $[(n-1)\alpha, n\alpha)$ in J_j geboren wurde und sich bis zur Geburtszeit des W_0-Teilchens nicht weiter als $\frac{\delta}{2}$ von seinem Geburtsort entfernt hat. Falls kein solches IVBB-Teilchen existiert, so wird das W_0-Teilchen gepaart, sobald es mit einem ungepaarten IVBB-Teilchen zusammentrifft, das älter als 2α ist. Die beiden Teilchen paaren sich dann sofort miteinander.

Diese beiden Paarungsregeln sind dabei unabhängig voneinander zu betrachten, das heißt insbesondere, dass für ein W_0-Teilchen ein IVBB-Teilchen als ungepaart gilt, wenn es bisher mit keinem anderen W_0-Teilchen gepaart ist. Ob ein IVBB-Teilchen mit einem W_1-Teilchen gepaart ist, spielt dabei also keine Rolle. Aus der Definition der Paarungsregeln ergibt sich, dass jedes IVBB-Teilchen mit genau einem W_1-Teilchen und höchstens einem W_0-Teilchen gepaart wird.

Die Paarungszeiten sind außerdem Stoppzeiten, denn sie werden nur durch Ereignisse der Vergangenheit festgelegt. Daher sind die Bewegungen der einzelnen W_i-Teilchen Brownsche Bewegungen, denn nach Satz 1.2.7 ist eine Brownsche

Bewegung ein homogener Markov-Prozess. Aus der Konstruktion erkennt man außerdem, dass für alle t die Bewegungen von Teilchen aus W_0 und W_1, die nach t geboren wurden, unabhängig sind von allen Bewegungen in der IVBB, W_0 und W_1 bis zum Zeitpunkt t. Daher gilt (ii).

Es bleibt also zu zeigen, dass $\alpha > 0$ so gewählt werden kann, dass (i) gilt. Wegen $\epsilon < \frac{\delta}{2}$, ist der Abstand von gepaarten Teilchen immer höchstens gleich δ. Nun wollen wir zeigen, dass auf $\{C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\}$ die folgenden beiden Aussagen fast sicher gelten:

(a) Alle IVBB-Teilchen, die nach einer bestimmten Zeit geboren werden, paaren sich sofort mit einem W_1-Teilchen, und alle W_0-Teilchen, die nach einer bestimmten Zeit geboren werden, paaren sich sofort mit einem IVBB-Teilchen.

(b) Die endlich vielen W_0- bzw. IVBB-Teilchen, die nicht direkt bei der Geburt gepaart werden, paaren sich irgendwann auch mit einem IVBB- bzw. W_1-Teilchen.

Begründung:
Es bezeichne $p(\alpha)$ für jedes $\alpha > 0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine SBB das Intervall $\left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right]$ nicht vor der Zeit 2α verlässt. Da die Pfade von Brownschen Bewegungen fast sicher stetig sind, gilt dann

$$p(\alpha) \underset{\alpha \to 0}{\uparrow} 1 \, .$$

Daher existiert ein hinreichend kleines $\alpha > 0$, so dass

$$C_1 p(\alpha) e^{-\lambda_0 \alpha} > C_1 - \delta \tag{3.3.32}$$

und

$$(C_0 + \delta) p(\alpha) e^{-\lambda_0 \alpha} > C_0 \tag{3.3.33}$$

gelten. Weiter gehört nach Konstruktion zu jedem W_i-Teilchen eine standard Brownsche Bewegung, die unabhängig von der IVBB, den Geburtsprozessen von W_0 und W_1 und den Brownschen Bewegungen aller anderen Teilchen ist. Diese bestimmt die Bewegung des Teilchens bis zu seiner Paarungszeit. Danach spielt sie keine Rolle mehr. Wir bezeichnen nun ein W_1-Teilchen als *gut* , falls seine zugehörige Brownsche Bewegung das Intervall vom Radius $\frac{\delta}{2}$ um seinen Geburtspunkt nicht vor der Zeit 2α verlässt. Sonst nennen wir es *schlecht* . Wir bezeichnen ein W_1-Teilchen nk also genau dann als *gut* , wenn für alle $r \in [T^1_{nk}, T^1_{nk}+2\alpha]$

$$\left| S^{nk^1}_{r - T_{nk}} - S^{nk^1}_{T_{nk}} \right| \leq \frac{\delta}{2}$$

gilt.Sei ($j \in \{1, \ldots, h\}$) Wir betrachten nun für alle J_j den Poissonschen Punktprozess, der die Geburten aller guten W_1-Teilchen in J_j bestimmt. Er besitzt das Intensitätsmaß θ, definiert durch

$$\theta(dx, dt) = p(\alpha) C_1 e^{\lambda_0 t} \beta(x) 1_{J_j}(x) \; \nu_1(dx) \; dt$$

Weiter bezeichne $N_t^1(J_j)$ die Gesamtzahl von guten W_1-Teilchen, die bis zum Zeitpunkt t in J_j geboren wurden. Dann erhalten wir mit 3.3.17, dass fast sicher

$$\frac{N_t^1(J_j)}{e^{\lambda_0 t}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} p(\alpha)C_1\lambda_0^{-1}\int_{J_j}\beta(x)\ \nu(dx). \tag{3.3.34}$$

gilt. Nun betrachten wir den Punktprozess der IVBB-Geburten in dem Intervall J_j. Dieser besitzt das Intensitätsmaß $\widetilde{\theta}$ mit $\widetilde{\theta}(dt) = g(t)\ dt$, wobei

$$g(t) := \int_{J_j}\beta(x)\ N_t(dx).$$

Es folgt dann mit Satz 3.3.16, dass fast sicher

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_{J_j}\beta(x)\ N_t(dx)}{e^{\lambda_0 t}} = W\int_{J_j}\beta(x)\ \nu(dx)$$

gilt, wobei W durch (3.3.24) definiert ist. Weiter bezeichne $N_t^{**}(J_j)$ die Anzahl der IVBB-Geburten in J_j bis zur Zeit t. Dann erhalten wir mit Lemma 3.3.17

$$\frac{N_t^{**}(J_j)}{e^{\lambda_0 t}} \to W\lambda_0^{-1}\int_{J_j}\beta(x)\ \nu(dx)\ \text{ fast sicher.} \tag{3.3.35}$$

Aus (3.3.32), (3.3.34) und (3.3.35) folgt, dass auf $\{C_0+\delta < W < C_1-\delta\}$ gilt: Für alle großen n übersteigt die Anzahl der Geburten von guten W_1-Teilchen in J_j während $[(n-1)\alpha, n\alpha)$ fast sicher die Anzahl der IVBB-Geburten in J_j während $[n\alpha,(n+1)\alpha)$. Also werden ab einem gewissen Zeitpunkt alle neuen IVBB-Teilchen direkt bei ihrer Geburt mit W_1-Teilchen gepaart. Außerdem gibt es einen unendlichen Überschuss an guten W_1-Teilchen, so dass die endlich vielen IVBB-Teilchen, die bei ihrer Geburt nicht gepaart wurden, irgendwann mit einem W_1-Teilchen gepaart werden.

Auf die gleiche Art und Weise kann man zeigen, dass auf dem Ereignis $\{C_0+\delta < W < C_1-\delta\}$ das Folgende gilt: Für alle großen n übertrifft die Anzahl der Geburten von guten IVBB-Teilchen während $[(n-1)\alpha, n\alpha)$ fast sicher die Anzahl der Geburten von W_0-Teilchen während $[n\alpha,(n+1)\alpha)$. Dabei bezeichnet man ein IVBB-Teilchen genau dann als *gut,*wenn seine zugehörige Brownsche Bewegung das Intervall vom Radius $\frac{\delta}{2}$ um seinen Geburtspunkt nicht vor der Zeit 2α verlässt. Es werden also ab einem gewissen Zeitpunkt alle neuen W_0-Teilchen direkt bei ihrer Geburt mit einem IVBB-Teilchen gepaart. Außerdem gibt es einen unendlichen Überschuß an guten IVBB-Teilchen, so dass die endlich vielen W_0-Teilchen, die nicht bei ihrer Geburt gepaart wurden, irgendwann mit einem IVBB-Teilchen gepaart werden.

Insgesamt erhalten wir also die Aussagen (a) und (b). Daraus folgt aber offensichtlich Bedingung (i) und damit ist der Satz bewiesen. □

Wir wollen nun zeigen, wie man für unseren Spezialfall einer Verzweigungsfunktion mit kompaktem Träger aus Satz 3.3.18 die Gleichung (3.3.3) erhält. Seien C_0, C_1 beliebige Konstanten mit $0 < C_0 < C_1 < \infty$. Im restlichen Teil dieses Abschnittes betrachten wir eine IVBB und Poissonsche Flutwellen, die den Bedingungen dieses Satzes genügen. Mit R_t, R_t^0 bzw. R_t^1 bezeichnen wir dann wieder die Position des zum Zeitpunkt t rechtesten Teilchens des entsprechenden Prozesses. Zunächst erhält man folgendes Ergebnis:

Lemma 3.3.19.
Seien $A := \{C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\}$ und $B_s := \{C_0 + \delta < W_s < C_1 - \delta\}$ für $s \in \mathbb{R}$. Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $s^*(\epsilon)$ derart, dass $P(B_s \Delta A) < \epsilon$ für alle $s \geq s^*(\epsilon)$ gilt, wobei $B_s \Delta A$ die symmetrische Differenz der Mengen A und B_s bezeichnet, das heißt $B_s \Delta A = (A \backslash B_s) \cup (B_s \backslash A)$.

Beweis.
Es sei $(s_n)_{n\geq 0}$ eine beliebige Folge von reellen Zahlen, für die $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ gilt. Wegen

$$\left\{\bigcap_{k\geq 0} \bigcup_{n\geq k} (B_{s_n} \Delta A)\right\} \subseteq \{W_{s_n} \nrightarrow W\}$$

erhält man sofort

$$P\left(\bigcap_{k\geq 0} \bigcup_{n\geq k} (B_{s_n} \Delta A)\right) = 0,$$

und da $\left(\bigcup\limits_{n\geq k} (B_{s_n} \Delta A)\right)_{k\geq 0}$ eine absteigende Mengenfolge in k ist, gilt

$$\lim_{k\to\infty} \bigcup_{n\geq k} (B_{s_n} \Delta A) = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} (B_{s_n} \Delta A) .$$

Also ergibt sich mit der Stetigkeit von oben

$$P\left(\bigcup_{n\geq k} (B_{s_n} \Delta A)\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

was

$$\lim_{n\to\infty} P\left(B_{s_n} \Delta A\right) = 0$$

impliziert. Da $(s_n)_{n\geq 0}$ eine beliebige Folge war, folgt die Behauptung. □

Die soeben bewiesene Tatsache ermöglicht nun die Herleitung eines weiteren Lemmas:

Lemma 3.3.20.
Für $t \geq 0, x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$ und $i = 0,1$ seien $D^i(t,x)$ und $D^i_s(t,x)$ folgendermaßen definiert:

$$D^i(t,x) := \left\{ R^i_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}} t + x \ ; \ C_0 + \delta < W < C_1 - \delta \right\},$$

$$D^i_s(t,x) := \left\{ R^i_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}} t + x \ ; \ C_0 + \delta < W_s < C_1 - \delta \right\}.$$

Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $s^*(\epsilon) \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle $s \geq s^*(\epsilon)$, alle $t \geq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ die Bedingung

$$\left| P\left(D^i_s(t,x)\right) - P\left(D^i(t,x)\right) \right| < \epsilon$$

erfüllt ist.

Beweis.
Seien $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ fest und $D^i := D^i(t,x)$ sowie $D^i_s := D^i_s(t,x)$ für $s \in \mathbb{R}$. Seien ferner A und B_s wie in Lemma 3.3.19 definiert, $C^i := \left\{ R^i_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}} t + x \right\}$ $(i = 0,1)$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Es gilt für alle s

$$\begin{aligned}
\left| P(D^i_s) - P(D^i) \right| &= \left| P(C^i \cap B_s) - P(C^i \cap A) \right| \\
&= \begin{cases} P(C^i \cap B_s) - P(C^i \cap A), \text{ falls } P(C^i \cap B_s) > P(C^i \cap A) \\ P(C^i \cap A) - P(C^i \cap B_s), \text{ falls } P(C^i \cap B_s) \leq P(C^i \cap A) \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} P((C^i \cap B_s) \backslash (C^i \cap A)), \text{ falls } P(C^i \cap B_s) > P(C^i \cap A) \\ P((C^i \cap A) \backslash (C^i \cap B_s)), \text{ falls } P(C^i \cap B_s) \leq P(C^i \cap A) \end{cases} \\
&\leq P(C^i \cap (B_s \backslash A)) + P(C^i \cap (A \backslash B_s)) \\
&= P((C^i \cap (B_s \backslash A)) \cup (C^i \cap (A \backslash B_s))) \\
&= P(C^i \cap ((B_s \backslash A) \cup (A \backslash B_s))) \\
&= P(C^i \cap A \Delta B_s) \ < \ P(A \Delta B_s).
\end{aligned}$$

Es folgt also wegen Lemma 3.3.19 für alle hinreichend großen s, alle $t \geq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$\left| P(D^i_s - P(D^i) \right| \ \leq \ P(A \Delta B_s) \ < \ \epsilon.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Das nächste Lemma gibt $\lim\limits_{t \to \infty} P\left(R^i_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}} t + x \ ; \ C_0 + \delta < W < C_1 - \delta \right)$ für jedes $i \in \{0,1\}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ an:

Lemma 3.3.21.
Für $i = 0, 1$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} P\left(R_t^i \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\ ;\ C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right) \\
&= \exp\left\{-C_i \widetilde{\gamma} e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\} P\left(C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right)
\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

mit

$$\widetilde{\gamma} \ = \ \frac{1}{2\lambda_0} \int e^{\sqrt{2\lambda_0}y} \beta(y)\ \nu(dy). \tag{3.3.37}$$

Beweis.
Aufgrund von Lemma 3.3.13 ergibt sich für alle $s, x \in \mathbb{R}$ und $i \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} P\left(R_t^i \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\ ;\ C_0 + \delta < W_s < C_1 - \delta\right) \\
&= \ P\left(C_0 + \delta < W_s < C_1 - \delta\right) \lim_{t\to\infty} P\left(R_t^i \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\right)
\end{aligned}$$

Wegen Lemma 3.3.5 gilt weiter für alle $x \in \mathbb{R}$ und $i \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} P\left(R_t^i \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \exp\left\{-\frac{C_i}{2\lambda_0} e^{\lambda_0 t - \sqrt{2\lambda_0}\left(\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\right)} \int e^{\sqrt{2\lambda_0}y} \beta(y)\ \nu(dy)\right\} \\
&= \lim_{t\to\infty} \exp\left\{-\frac{C_i}{2\lambda_0} e^{-\sqrt{2\lambda_0}x} \int e^{\sqrt{2\lambda_0}y} \beta(y)\ \nu(dy)\right\} \\
&= \exp\left\{-C_i \widetilde{\gamma} e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\}.
\end{aligned}$$

Andererseits erhält man mit Lemma 3.3.20 für alle $s, x \in \mathbb{R}$ und $i \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to\infty} \lim_{t\to\infty} P\left(R_t^i \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\ ;\ C_0 + \delta < W_s < C_1 - \delta\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} P\left(R_t^i \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\ ;\ C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right).
\end{aligned}$$

Außerdem folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $i \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to\infty} \left(\exp\left\{-C_i \widetilde{\gamma} e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\} P\left(C_0 + \delta < W_s < C_1 - \delta\right)\right) \\
&= \exp\left\{-C_i \widetilde{\gamma} e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\} \lim_{s\to\infty} P\left(C_0 + \delta < W_s < C_1 - \delta\right) \\
&= \exp\left\{-C_i \widetilde{\gamma} e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\} P\left(C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right),
\end{aligned}$$

wobei sich der letzte Schritt wegen Lemma 3.3.19 ergibt. Fügt man nun alle Gleichungen zusammen, so folgt direkt (3.3.36). □

Nun können wir das am Anfang von Abschnitt 3.3 angekündigte Ergebnis beweisen:

Satz 3.3.22.
Für eine IVBB, deren Verzweigungsfunktion kompaktem Träger besitzt, gilt

$$\lim_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\right) = E\exp\left\{-W\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\} \tag{3.3.38}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis.
Der Beweis wird in zwei Schritten geführt.

Zunächst gelte $P\left(C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right) > 0$. Wegen Gleichung (3.3.36) folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-C_0\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}(x+\delta)}\right\} \\ =\ &\frac{\lim_{t\to\infty} P\left(R_t^0 \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x + \delta\ ;\ C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right)}{P\left(C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right)} \\ =\ &\lim_{t\to\infty} P\left(R_t^0 - \delta \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\ \middle|\ C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right) \\ \geq\ &\limsup_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\ \middle|\ C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right). \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Dabei ergibt sich der letzte Schritt wegen Bedingung (i) in Satz 3.3.18. Ebenso erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\liminf_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\ \middle|\ C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right) \\ \geq\ &\exp\left\{-C_1\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}(x-\delta)}\right\}. \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

Insgesamt gilt also für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{-C_0\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}(x+\delta)}\right\} \\
&\geq \limsup_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x \;\middle|\; C_0+\delta < W < C_1-\delta\right) \\
&\geq \liminf_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x \;\middle|\; C_0+\delta < W < C_1-\delta\right) \\
&\geq \exp\left\{-C_1\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}(x-\delta)}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.3.41}$$

Lässt man nun δ gegen 0 laufen, so erhält man wegen $\delta = \frac{C_1-C_0}{3}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} \exp\left\{-C_0\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}(x+\delta)}\right\} &= \lim_{\delta\to 0} \exp\left\{-C_1\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}(x-\delta)}\right\} \\
&= \exp\left\{-C\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\},
\end{aligned} \tag{3.3.42}$$

wobei

$$C := \lim_{\delta\to 0} C_1 - \delta = \lim_{\delta\to 0} C_0 + \delta.$$

Daraus folgt aber mit (3.3.41) für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{-C\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\} \\
&= \lim_{\delta\to 0}\limsup_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x \;\middle|\; C_0+\delta < W < C_1-\delta\right) \\
&= \lim_{\delta\to 0}\liminf_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x \;\middle|\; C_0+\delta < W < C_1-\delta\right) \\
&= \lim_{\delta\to 0}\lim_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x \;\middle|\; C_0+\delta < W < C_1-\delta\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x \;\middle|\; W = C\right).
\end{aligned} \tag{3.3.43}$$

Daher ergibt sich mit majorisierter Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
& E \exp\left\{-W\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\} = \int_0^\infty \exp\left\{-C'\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\} P^W(dC') \\
& = \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} P\left(R_t \le \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x \;\middle|\; W = C'\right) P^W(dC') \\
& = \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty P\left(R_t \le \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x \;\middle|\; W = C'\right) P^W(dC') \\
& = \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty P\left(R_t \le \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\right) P^W(dC') \\
& = \lim_{t\to\infty} P\left(R_t \le \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\right),
\end{aligned}
\tag{3.3.44}
$$

wobei der vorletzte Schritt aus Satz 52.5 aus [Als] folgt.

Gelte nun $P\{C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\} = 0$. Es folgt mit Lemma 3.3.5

$$
\begin{aligned}
& \exp\left\{-C_0\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda}(x+\delta)}\right\} = \lim_{t\to\infty} P\left(R_t^0 \le \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x + \delta\right) \\
& = \lim_{t\to\infty} P\left(R_t^0 - \delta \le \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x \middle| C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right) \\
& \ge \limsup_{t\to\infty} P\left(R_t \le \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x \middle| C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& \liminf_{t\to\infty} P\left(R_t \le \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x \;\middle|\; C_0 + \delta < W < C_1 - \delta\right) \\
& \ge \exp\left\{-C_1\widetilde{\gamma}e^{-\sqrt{2\lambda_0}(x-\delta)}\right\}.
\end{aligned}
$$

Man erhält die Behauptung für diesen Fall nun auf die gleiche Weise wie im Fall $P(C_0 + \delta < W < C_1 - \delta) > 0$. □

3.3.3 Der allgemeine Fall

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem allgemeinen Fall. Wir fordern von der Verzweigungsfunktion der betrachteten IVBB also nur noch, dass sie die Bedingungen (3.3.1) und (3.3.2) erfüllt. Den Beweis von Satz 3.3.1 werden wir allerdings nur skizzieren. Seien W, λ_0, ϕ_0 und $N_t(J)$ $(J \subset \mathbb{R}, t \ge 0)$ wie im letzten Abschnitt definiert. Als erstes geben wir ohne Beweis folgendes Hilfslemma an:

Lemma 3.3.23.
Für alle $\delta > 0$ gibt es ein $M = M(\delta) < \infty$, so dass für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, deren Träger in $\mathbb{R}\backslash[-\delta, \delta]$ enthalten und kompakt ist, und für alle $t \geq 0$

$$E\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\ N_t(dx)\right) \leq Me^{\lambda_0 t} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\sqrt{2\lambda_0}|x|}\ dx \tag{3.3.45}$$

gilt.

Mit Hilfe dieses Lemmas wollen wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 3.3.24.
Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $A > 0$ und ein $N > 0$, so dass für alle $t \geq N$

$$P\left(\textit{das zum Zeitpunkt } t \textit{ rechteste Teilchen ist außerhalb von } [-A, A] \textit{ geboren}\right) \leq \epsilon$$

gilt.

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir zuerst zeigen, wie aus ihm Satz 3.3.1 folgt. Dazu geben wir die folgende Definition an, die es uns erlaubt Satz 3.3.24 in einer etwas prägnanteren Form aufzuschreiben.

Definition 3.3.25.
Für $t \geq 0$ und $A \geq 0$ sei R_t^A die *Position des zum Zeitpunkt t rechtesten Teilchens, wobei nur die Teilchen betrachtet werden, die in $[-A, A]$ geboren wurden.* Mit anderen Worten ist

$$R_t^A := \max\left\{S_t^i : i = 1, \ldots, N_t\ ;\ S_{T_0(i)}^i \in [-A, A]\right\}.$$

Satz 3.3.26.
Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $A > 0$ und ein $N > 0$, so dass für alle $t \geq N$

$$P\left(R_t - R_t^A > 0\right) \leq \epsilon \tag{3.3.46}$$

gilt.

Dieser Satz impliziert nun das folgende Lemma

Lemma 3.3.27.
Für alle $\epsilon > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein A_0 und ein $N > 0$, so dass für alle $A \geq A_0$ und für alle $t \geq N$

$$P\left(R_t^A \leq x\right) - \epsilon \leq P\left(R_t \leq x\right) \leq P\left(R_t^A \leq x\right) \tag{3.3.47}$$

gilt.

Beweis.
Da die zweite Ungleichung trivialerweise erfüllt ist, genügt es, die erste zu beweisen. Seien also $\epsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Wegen (3.3.46) gibt es ein $A_0 > 0$ und ein $N > 0$, so dass für alle $t \geq N$

$$\begin{aligned} & P\left(R_t \leq x\right) + \epsilon \geq P\left(R_t \leq x\right) + P\left(R_t - R_t^{A_0} > 0\right) \\ & \geq P\left(R_t \leq x\right) + P\left(R_t^{A_0} \leq x\ ;\ R_t > x\right) = P\left(R_t^{A_0} \leq x\right) \end{aligned}$$

gilt. Da $(0, \infty) \ni A \mapsto P\left(R_t^A \leq x\right)$ eine monoton fallende Funktion ist, gilt diese Rechnung auch für alle $A \geq A_0$ und es folgt die Behauptung. □

Auf die gleiche Art und Weise, wie im vorangegangenen Abschnitt Satz 3.3.22 für eine IVBB mit einer Verzweigungsfunktion mit kompaktem Träger hergeleitet wurde, kann man nun folgendes Lemma beweisen. Es seien ϕ_0, λ_0 und W wie in Definition 3.3.15:

Lemma 3.3.28.
Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und für alle $A \in (0, \infty)$

$$\lim_{t \to \infty} P\left(R_t^A \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}} t + x\right) = E \exp\left\{-W \gamma_A e^{-\sqrt{2\lambda_0} x}\right\}, \tag{3.3.48}$$

wobei

$$\gamma_A := \frac{1}{2\lambda_0} \int_{-A}^{A} e^{\sqrt{2\lambda_0} y} \beta(y) \phi_0(y)\ dy.$$

Außerdem gilt

$$\gamma = \lim_{A \to \infty} \gamma_A = \frac{1}{2\lambda_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2\lambda_0} y} \beta(y) \phi_0(y)\ dy < \infty\ . \tag{3.3.49}$$

Mit Hilfe der beiden vorangegangenen Lemmata kann man nun leicht das angestrebte Hauptresultat dieses Kapitels beweisen:

Korollar 3.3.29.
Es sei vorausgesetzt, dass sowohl

$$\lim_{|x| \to \infty} \beta(x) \ = \ 0 \tag{3.3.50}$$

als auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)\ dx \ < \ \infty \tag{3.3.51}$$

gelten. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to \infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}\ t + x\right) \ = \ E \exp\left\{-W \gamma e^{-\sqrt{2\lambda_0}\ x}\right\}. \tag{3.3.52}$$

Beweis.
Mit (3.3.49) und dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{A\to\infty} E \exp\left\{-W\gamma_A e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\} = E\exp\left\{-W\gamma e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\}$$

Außerdem folgt aus Ungleichung (3.3.47), dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{A\to\infty}\lim_{t\to\infty} P\left(R_t^A \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\right) = \lim_{t\to\infty} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\right)$$

gilt. Wegen Gleichung (3.3.48) ergibt sich dann die Behauptung. □

Nun wollen wir noch die folgende Definition angeben, die wir benötigen, um schließlich Satz 3.3.24 beweisen zu können:

Definition 3.3.30.
Für $A \geq 0, t \geq 0$ und $J \subset \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $N_t^A(J)$ die *Anzahl der Teilchen in J zur Zeit t, die außerhalb von $[-A, A]$ geboren wurden.*

Falls J die Gestalt $\left[\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x, \infty\right)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ und ein $t \geq 0$ annimmt, erhalten wir das folgende Ergebnis:

Lemma 3.3.31.
Für alle $\epsilon > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $A > 0$, so dass für alle $t \geq 0$

$$EN_t^A\left(\left[\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x, \infty\right)\right) \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{3.3.53}$$

gilt.

Beweis. Es gilt für alle $A \geq 0$, alle $t \geq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &EN_t^A\left(\left[\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x, \infty\right)\right) \\ &= E\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} \int_{\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t+x}^{\infty} \beta(y)\frac{e^{-\frac{(z-y)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\, dz\, N_s(dy)\, ds\right). \end{aligned}$$

Gemäß Lemma 3.3.23 folgt weiter für alle $t \geq 0$, alle $t \geq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & EN_t^A\left(\left[\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x, \infty\right)\right) \\ \leq & \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} \int_{\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t+x}^{\infty} \frac{Me^{\lambda_0 s}e^{-\sqrt{2\lambda_0}|y|}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\ \beta(y)\ e^{\frac{-(z-y)^2}{2(t-s)}}\ dz\ dy\ ds \qquad (3.3.54) \\ \leq & \int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} \int_{x+\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t}^{\infty} \frac{Me^{\lambda_0 t}}{\sqrt{2\lambda_0}}\ e^{-\sqrt{2\lambda_0}|y|-\sqrt{2\lambda_0}|z-y|}\beta(y)\ dz\ dy. \end{aligned}$$

Da aber $\int \beta(y)\ dy < \infty$ vorausgesetzt war, gibt es für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ ein hinreichend großes A, so dass

$$EN_t^A\left(\left[\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x, \infty\right)\right) \ \leq\ \frac{\epsilon}{2} \qquad (3.3.55)$$

für alle $t \geq 0$ gilt. □

Für den Beweis von Satz 3.3.24 benötigen wir noch eine letzte Hilfsaussage

Lemma 3.3.32.
Für beliebiges $\epsilon > 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ und ein $N \geq 0$ so dass für alle $t \geq N$

$$P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\right) \ \leq\ \frac{\epsilon}{2} \qquad (3.3.56)$$

gilt.

Beweis.
Für alle $0 < A < \infty$ und alle $t \geq 0$ gilt $R_t^A \leq R_t$. Daher folgt für alle $0 < A < \infty$ und alle $x \in \mathbb{R}$ wegen Lemma 3.3.28

$$\begin{aligned} P\left(R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\right) \ &\leq\ P\left(R_t^A \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x\right) \\ \underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\ & E\exp\left\{-W\gamma_A e^{-\sqrt{2\lambda_0}x}\right\} \end{aligned}$$

Für ein festes A gibt es also ein hinreichend kleines x, so dass dieser Limes kleiner als $\frac{\epsilon}{4}$ ist. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir wollen zum Ende dieses Abschnitts den angekündigten Beweis von Satz 3.3.24 (bzw. Satz 3.3.26) angeben:

Beweis.
Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen Lemma 3.3.32 gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und ein $N \geq 0$, so dass für alle $t \geq N$ Ungleichung (3.3.56) gilt. Außerdem existiert zu ϵ und x_0 nach Lemma 3.3.31 ein $A_0 > 0$, so dass für alle $t \geq 0$ und $A \geq A_0$ Ungleichung (3.3.53) erfüllt ist. Insgesamt folgt daher für alle $t \geq 0$ und alle $A \geq A_0$

$$\begin{aligned}
P\left(R_t - R_t^A > 0\right) &= P\left(R_t - R_t^A \; ; \; R_t \leq \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x_0\right) \\
&\quad + P\left(R_t - R_t^A > 0 \; ; \; R_t > \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x_0\right) \\
&= \frac{\epsilon}{2} + P\left(R_t - R_t^A > 0; R_t > \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x_0\right)
\end{aligned}$$

Zu zeigen ist also noch, dass für alle $A \geq A_0$ und für alle $t \geq N$

$$P\left(R_t - R_t^A > 0 \; ; \; R_t > \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x_0\right) \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{3.3.57}$$

gilt. Seien dazu $A \geq A_0$ und $t \geq N$ fest gewählt und

$$B := \left\{R_t - R_t^A > 0 \; ; \; R_t > \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x_0\right\}.$$

Nehmen wir zunächst an, dass $P(B) > \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Wegen

$$B \subset \left\{N_t^A\left(\left[\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x_0, \infty\right)\right) \geq 1\right\},$$

folgt dann auch

$$P\left(N_t^A\left(\left[\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x_0, \infty\right)\right) \geq 1\right) > \frac{\epsilon}{2}.$$

Da andererseits

$$\begin{aligned}
P\left(N_t^A\left(\left[\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x_0, \infty\right)\right) \geq 1\right) &= \sum_{n\geq 1} P\left(N_t^A\left(\left[\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x_0, \infty\right)\right) = n\right) \\
&\leq \sum_{n\geq 1} nP\left(N_t^A\left(\left[\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x_0, \infty\right)\right) = n\right) \\
&= EN_t^A\left(\left[\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}t + x_0, \infty\right)\right) \leq \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

gilt, folgt die Behauptung. $\square$

Literaturverzeichnis

[Als] Alsmeyer, G. (2000)
Wahrscheinlichkeitstheorie (2.Auflage). Skripten zur Mathematischen Statistik Nr.30, Universität Münster.

[Als2] Alsmeyer, G. (2002)
Stochastische Prozesse Teil 1. Diskrete Markov-Ketten, Martingale und Erneuerungstheorie (2.Auflage). Skripten zur Mathematischen Statistik Nr.33, Universität Münster.

[Bor] Borodin, A.N. und Salminen, P. (1996)
Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae. Birkhäuser Verlag.

[Bre] Bremaud, P. (1981)
Point Processes and Queues. Martingale Dynamics. Springer-Verlag.

[Fah] Fahrmeir, L., Kaufmann, H. und Friedemann, O. (1981)
Stochastische Prozesse. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen. Carl Hanser Verlag, München.

[Gra] Gradshteyn, I.S. und Ryzhik, I.M. (1994)
Table of Integrals, Series, and Products (Fifth Edition). Academic Press.

[Kar] Karatzas, I. und Shreve, S.E. (1991)
Brownian Motion and Stochastic Calculus (Second Edition). Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

[Koe] König, D. und Schmidt, V. (1992)
Zufällige Punktprozesse. B.G. Teubner, Stuttgart.

[Lal] Lalley, S. und Sellke, T. (1988)
Traveling Waves in Inhomogeneous Branching Brownian Motions I. The Annals of Probability 1988, Vol.16, No.3, 1051-1062.

[Par] Partzsch, L. (1984)
Vorlesungen zum eindimensionalen Wienerschen Prozeß. B.G. Teubner, Leipzig.

[Rei] R.-D. Reiss (1993)
A Course on Point Processes. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag.

Ich versichere, dass ich diese Arbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, 31. Juli 07

Sebastian Dartmann