

# Selbstähnliche Fragmentierungen

## Diplomarbeit

Institut für Mathematische Statistik der  
Westfälischen Wilhelms-Universität  
Münster

**Professor Dr. G. Alsmeyer**

vorgelegt von  
**Rolf Böve**

September 2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Einführung der selbstähnlichen Fragmentierungen</b>	<b>4</b>
2.1 $S^\downarrow$ -Fragmentierungen . . . . .	4
2.2 $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen . . . . .	7
2.3 Intervall-Fragmentierungen . . . . .	17
2.4 Anhang . . . . .	29
<b>3. Verhältnis der Fragmentierungen zueinander</b>	<b>35</b>
3.1 Austauschbarkeit . . . . .	35
3.2 $S^\downarrow$ - und $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen . . . . .	39
3.3 Intervall- und $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen . . . . .	43
<b>4. Homogene <math>\mathcal{P}</math>-Fragmentierungen</b>	<b>53</b>
4.1 Lévy-Itô-Dekomposition . . . . .	53
4.2 Zerlegung von austauschbaren Partitionsmaßen . . . . .	63
<b>5. Nichthomogene <math>\mathcal{P}</math>-Fragmentierungen</b>	<b>70</b>
5.1 Die erweiterte Fragmentierungseigenschaft bei Intervall-Fragmentierungen . . . . .	70
5.2 Transformation des Selbstähnlichkeitsindex bei Intervall-Fragmentierungen . . . . .	77
5.3 Anwendung der Transformation bei $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen . . . . .	82

<b>6. Weitere Untersuchungen</b>	<b>85</b>
6.1. Asymptotische Frequenzen . . . . .	85
6.2 Anmerkungen zur Erosionsrate und dem Levy-Maß . . . . .	99
6.3 Beispiel . . . . .	104
6.4 Anhang . . . . .	110
 <b>Verzeichnis ausgewählter Symbole</b>	 <b>111</b>
 <b>Literatur</b>	 <b>112</b>

# 1. Einleitung

In der Natur finden sich gleichermaßen zahlreiche Beispiele für Zerlegungs- und Agglomerationsprozesse. Gerade im Bereich chemischer Reaktionen, z.B. Polymerisation, bei galaktischen Clusterbildungen oder Erosionsprozessen treten komplexe Entwicklungen solcher Art auf (für weitere Beispiele siehe [Al4]). Lassen wir die Zeit rückwärts laufen, so werden Aggregations- zu Fragmentierungsprozessen et vice versa. Dieser Zusammenhang spiegelt sich auch in der mathematischen Theorie wider, die bestrebt ist, grundlegende Modelle und deren Analyse zur abstrahierten Beschreibung der Realität anzugeben. Die in der Mathematik zur Deskription von sich verdichtenden Systemen eingesetzten sogenannten „Coalescents“ (siehe hierzu z.B. [EvPi], [Ki1], [Pi]), die häufig in der Form von Verzweigungsprozessen dargestellt werden (siehe hierzu z.B. [Al2], [Al3]), führen durch Zeitinversion zu Fragmentierungsprozessen (siehe hierzu z.B. [AlPi]). Unabhängig von dieser engen Bindung hat sich Bertoin der Aufgabe angenommen, ein eigenständiges theoretisches Gerüst für Fragmentierungsprozesse zu erstellen. Diese Arbeit setzt sich mit den Grundlagen der von ihm eingeführten *selbstähnlichen Fragmentierungen* auseinander.

Anschaulich lässt sich solch ein stochastischer Prozess folgendermaßen beschreiben: Zeitstetig und markovsch wird dargestellt, wie eine Einheitsmasse im Zeitablauf in möglicherweise unendlich viele Fragmente zerlegt wird. Zu einzelnen Zeitpunkten gibt der Prozess die absteigend geordnete Folge der Fragmentmassen an. Sei  $(m_i)_{i \geq 1}$  mit  $1 \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq 0$  die entsprechende Folge zu einem Zeitpunkt  $t \geq 0$ . Die bedingte Verteilung des Post- $t$ -Prozesses wird durch zwei Eigenschaften näher bestimmt:

- (1) Fragmentierungseigenschaft: Die weitere Zerlegung der einzelnen Fragmente erfolgt unabhängig voneinander.
- (2) Skalierungseigenschaft: Bezeichnet  $(m_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$  die Folge der Teilmassen von  $m_i > 0$  zum Zeitpunkt  $t + r$ ,  $r \geq 0$ , so hat  $(\frac{m_{i,j}}{m_i})_{j \in \mathbb{N}}$  dieselbe Verteilung wie die Folge der Teilmassen, die zum Zeitpunkt  $m_i^\alpha r$  für ein bestimmtes  $\alpha \in \mathbb{R}$  aus der Zerlegung der Einheitsmasse entsteht.

Es liegt eine sogenannte selbstähnliche Fragmentierung mit Index  $\alpha$  vor.  $\alpha$  ist als Geschwindigkeit der Zerlegung interpretierbar. Je größer  $\alpha$  ist, desto langsamer werden kleine Fragmente zerlegt. Im Falle  $\alpha = 0$  heißt der Prozess *homogene Fragmentierung*. Der Begriff Selbstähnlichkeit ist seit einiger Zeit (vergleiche z.B. [La] aus

dem Jahre 1972) fester Bestandteil der Wahrscheinlichkeitstheorie. Im Rahmen dieser Arbeit wird dieses Konzept mit der unabhängigen Zerlegung einzelner Fragmente vereint.

Ziel dieser Arbeit ist es, im Anschluss an die Festlegung selbstähnlicher Fragmentierungen deren Struktur besser zu verstehen und genauer zu erfassen, durch welche Phänomene die Zerlegung maßgeblich gesteuert wird. Da die Definition dieser Prozesse über stochastische Kerne erfolgt, besteht zugleich der Bedarf nach Klärung der Existenz, dem in Form einer Konstruktionsanleitung Rechnung getragen wird.

Neben der oben skizzierten Fragmentierung in Form von geordneten Massenfolgen ( $S^\downarrow$ -Fragmentierung) gibt es andere Möglichkeiten der Darstellung. In Kapitel 2 werden wir zusätzlich zur  $S^\downarrow$ -Fragmentierung zwei weitere Arten von selbstähnlichen Fragmentierungen formal einführen. Als Zustandsräume wählen wir hierbei die Menge der Partitionen von  $\mathbb{N}$  ( $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen) und die Menge der offenen Teilmengen von  $(0, 1)$  (Intervall-Fragmentierungen). Bei den  $\mathcal{P}$ - und Intervall-Fragmentierungen werden wir grundlegende Eigenschaften nachweisen, die für das spätere Vorgehen notwendig sein werden. Die Definition der drei Prozesstypen erfolgt jeweils über sogenannte *Fragmentierungskerne* und wird durch die Verbindung von *Fragmentierungs-* und *Skalierungseigenschaft* geprägt. Die Vermutung, dass die Prozesse eine enge Beziehung zueinander aufweisen, wird in Kapitel 3 bestätigt und präzisiert: Die Fragmentierungen der drei Prozesstypen lassen sich ineinander überführen. Somit erweist sich jeder Prozesstyp lediglich als eine alternative Darstellungsform, und wir können für die weitere Analyse die jeweils am besten geeignete auswählen.  $\mathcal{P}$ - und Intervall-Fragmentierungen werden dabei den Vorzug vor  $S^\downarrow$ -Fragmentierungen erhalten. Am Anfang des Kapitels präsentieren wir für uns relevante Ergebnisse aus der Theorie der Austauschbarkeit, die der Schlüssel zu entscheidenden Resultaten in Abschnitt 3.2 und Kapitel 4 sein wird. In Abschnitt 4.1 konstruieren wir homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen mit Hilfe von Poisson-Punkt-Prozessen. Der zweite Teil liefert die wichtige Erkenntnis, dass zur Verteilung einer homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung ein sogenanntes *Lévy-Maß*  $\nu$  und eine *Erosionsrate*  $c$  korrespondieren. Diese Zuordnung ermöglicht das Verständnis von homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen als Überlagerung von kontinuierlicher und abrupter Zerlegung. Um diese Ergebnisse auch bei nichthomogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen anwenden zu können, stellen wir in Kapitel 5 eine geeignete Zeittransformation vor, die den Zusammenhang zwischen homogenen und nichthomogenen Fragmentierungen herstellt.

Dabei argumentieren wir zunächst auf der Basis von Intervall-Fragmentierungen und übertragen mit Unterstützung von Kapitel 3 das Resultat auf  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen. Wir erhalten das zentrale Ergebnis, dass selbstähnliche Fragmentierungen durch die drei Parameter  $\alpha$ ,  $\nu$  und  $c$  fixiert werden. Ferner können wir eine Konstruktionsanleitung für sämtliche selbstähnliche Fragmentierungen angeben. Im ersten Abschnitt des letzten Kapitels gehen wir der Frage nach, wie sich die Masse eines zufällig ausgewählten Fragments im Zeitablauf entwickelt. Wir werden sehen, dass die Verteilung dieses Prozesses ebenfalls durch die drei Parameter beschrieben werden kann. Als hilfreich wird sich die Theorie über Subordinatoren herausstellen. Im zweiten Abschnitt werden wir die Bedeutung von Lévy-Maß und Erosionsrate eingehender untersuchen. Beschließen wollen wir diese Arbeit mit einem Beispiel, bei dem einige der präsentierten Resultate noch einmal zur Anwendung kommen werden.

Die von uns vorgestellten Ergebnisse entstammen hauptsächlich den Veröffentlichungen von Bertoin und Beresticky ([Ber4], [Ber6] und [Be]) aus den Jahren 2001-2002. In der letzten Zeit sind auf der Grundlage dieser Artikel weitere Arbeiten zu diesem Themengebiet verfasst worden. Zum einen lassen sich in [Ber5], [Ber7] und [Ha] detaillierte Aussagen über das asymptotische Verhalten des in Kapitel 6 behandelten Prozesses finden. Zum anderen werden in [Mi], [MiSc] und [Ber3] konkrete Beispiele für selbstähnliche Fragmentierungen untersucht. Zuletzt sei erwähnt, dass Haas eine leichte Verallgemeinerung der selbstähnlichen Fragmentierungen vornimmt, indem an die Stelle des Selbstähnlichkeitsindex eine stetige Funktion tritt (siehe dazu [Ha]).

## 2. Einführung der selbstähnlichen Fragmentierungen

In diesem Kapitel wollen wir drei Arten von Fragmentierungsprozessen vorstellen. Grundlegend wird jeweils das Zusammenwirken einer sogenannten Fragmentierungseigenschaft und einer Skalierungseigenschaft sein. Wir werden uns bei den  $S^\downarrow$ -Fragmentierungen auf deren Definition beschränken. Bei  $\mathcal{P}$ - und Intervall-Fragmentierungen werden wir darüber hinaus elementare Eigenschaften nachweisen, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit von Nutzen sein werden.

### 2.1 $S^\downarrow$ -Fragmentierungen

Es soll die zufällige Zerlegung einer Einheitsmasse im Zeitablauf beschrieben werden. Hierbei betrachten wir lediglich die der Größe nach geordneten Folgen von Fragmenten. Als Zustandsraum eines derartigen stochastischen Prozesses wählen wir folglich

$$S^\downarrow := \left\{ s = (s_1, s_2, \dots), s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq 0, \sum_{i \geq 1} s_i \leq 1 \right\} \subset [0, 1]^\mathbb{N}.$$

Wir versehen  $S^\downarrow$  mit der Supremumsmetrik  $\varrho$ , definiert durch

$$\varrho(s, s') := \sup_{i \geq 1} \{|s_i - s'_i|\}$$

für  $s = (s_1, s_2, \dots)$  und  $s' = (s'_1, s'_2, \dots)$ . Sei  $\mathfrak{G}^\downarrow$  die durch  $\varrho$  induzierte (Borelsche)  $\sigma$ -Algebra auf  $S^\downarrow$ .

**2.1. Bemerkungen.** a) Der Fall  $\sum_{i \geq 1} s_i < 1$  steht für Situationen, in denen ein Teil der ursprünglichen Masse verloren gegangen ist.

b) Es gilt  $s_k \leq \frac{1}{k}$  für alle  $k \geq 1$ . Aus diesem Grund bedingt die punktweise (komponentenweise) Konvergenz in  $S^\downarrow$  die gleichmäßige Konvergenz, also die Konvergenz bezüglich  $\varrho$ .

c) Als abgeschlossene Teilmenge des kompakten metrischen Raums  $([0, 1]^\mathbb{N}, \varrho)$  ist auch  $(S^\downarrow, \varrho)$  kompakt.

Die Festlegung eines *Fragmentierungsprozesses* - im Folgenden auch einfach *Fragmentierung* genannt - erfolgt über die sogenannten *Fragmentierungskerne*. Zur formalen Einführung benötigen wir einige weitere Bezeichnungen. Für  $l \in [0, 1]$  sei

$$S_l^\downarrow := \left\{ s = (s_1, s_2, \dots) \in S^\downarrow : \sum_{i \geq 1} s_i \leq l \right\}$$

und  $\mathfrak{S}_l^\downarrow := \mathfrak{S}^\downarrow \cap S_l^\downarrow$ . Offenbar ist  $(S_l^\downarrow, \varrho)$  ein abgeschlossener Unterraum von  $(S^\downarrow, \varrho)$ . Für jedes  $l \in [0, 1]$  sei nun ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_l$  auf  $(S_l^\downarrow, \mathfrak{S}_l^\downarrow)$  gegeben, welches die zufällige Zerlegung einer Teilmasse der Größe  $l$  beschreibt. Zu beliebigem  $L = (l_1, l_2, \dots) \in S^\downarrow$  sei  $(X_i)_{i \geq 1}$  eine Folge stochastisch unabhängiger  $S^\downarrow$ -wertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  mit

$$X_i := (X_{ij})_{j \geq 1} \stackrel{d}{=} Q_{l_i}.$$

Bezeichnet schließlich  $T$  die Ordnungsstatistik auf  $[0, 1]^\mathbb{N}$  und  $X := (X_{ij})_{i,j \geq 1}$ , so sei  $P(L, \cdot)$  die Verteilung von  $T(X)$ , genauer

$$P(L, B) := \mathbb{P}(T(X) \in B) = \left( \bigotimes_{i \geq 1} Q_{l_i} \right)^T, \quad B \in \mathfrak{S}^\downarrow.$$

Ein einfaches Argument zeigt, dass  $P$  einen stochastischen Kern von  $S^\downarrow$  nach  $S^\downarrow$  definiert, wenn die Zuordnung

$$[0, 1] \ni l \mapsto Q_l(B)$$

für jedes  $B \in \mathfrak{S}^\downarrow$  messbar ist, d.h. wenn  $Q(l, B) := Q_l(B)$  einen stochastischen Kern von  $[0, 1]$  nach  $S^\downarrow$  bildet. Dies sei hiernach stets unterstellt.

**2.2. Definition.** Ein stochastischer Kern  $P$  der soeben eingeführten Art heißt *Fragmentierungskern auf  $S^\downarrow$*  und  $(Q_l)_{l \in [0, 1]}$  die  *$P$  induzierende Familie*.

Wir sind nun in der Lage, mit Hilfe von Fragmentierungskernen Fragmentierungen auf  $S^\downarrow$  einzuführen. Die Existenz derartiger Prozesse bleibt hier zunächst offen.

**2.3. Definition.** Ein zeitlich homogener Markov-Prozess  $\lambda(\cdot) = (\lambda(t), t \geq 0)$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  mit Werten in  $(S^\downarrow, \mathfrak{S}^\downarrow)$  heißt  *$S^\downarrow$ -Fragmentierung*, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:



- (1)  $\lambda(0) = (1, 0, \dots)$  fast sicher.
- (2)  $\lambda(\cdot)$  ist stetig in Wahrscheinlichkeit, d.h. für alle  $t \geq 0$  konvergiert  $\lambda(t + s)$  in Wahrscheinlichkeit gegen  $\lambda(t)$  für  $s \rightarrow 0$ .
- (3)  $\lambda(\cdot)$  erfüllt die *Fragmentierungseigenschaft*, d.h. die Halbgruppe  $(P^t(\cdot, \cdot))_{t \geq 0}$  der  $t$ -Schritt-Übergangskerne  $(P^t(L, \cdot) = \mathbb{P}(\lambda(s + t) \in \cdot | \lambda(s) = L))$  für alle  $s, t \geq 0$  und  $L \in S^\downarrow$  wird durch Fragmentierungskerne auf  $S^\downarrow$  gegeben.

Die Halbgruppeneigenschaft manifestiert sich in den Kolmogorov-Chapman Gleichungen. Es gilt

$$P^{s+t}(L_1, \cdot) = P^s P^t(L_1, \cdot) := \int_{S^\downarrow} P^t(L_2, \cdot) P^s(L_1, dL_2)$$

für alle  $L_1 \in S^\downarrow$  und  $s, t \geq 0$ , wobei  $P^0(L_1, \cdot) := \delta_{L_1}$ .

Wir notieren, dass für  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots)$  jedes Fragment  $\lambda_i(t)$  identifiziert mit  $(\lambda_i(t), 0, \dots)$  als Anfangswert eines unabhängigen Fragmentierungsprozesses, dessen Verteilung nur von dem Wert  $\lambda_i(t)$  abhängt, aufgefasst werden kann. Die Vereinigung und Neuordnung aller Komponenten dieser Prozesse zum Zeitpunkt  $s$  ergibt offenbar  $\lambda(s + t)$ . Für  $l \in [0, 1]$  sei  $g_l : S^\downarrow \rightarrow S^\downarrow$  definiert durch

$$g_l((s_1, s_2, \dots)) := (ls_1, ls_2, \dots).$$

**2.4. Definition.** Sei  $\lambda(\cdot)$  eine  $S^\downarrow$ -Fragmentierung mit Übergangshalbgruppe  $(P^t)_{t \geq 0}$  und  $(Q_t(l))_{l \in [0, 1]}$  die den Kern  $P^t$  induzierende Familie für jedes  $t \geq 0$ .  $\lambda(\cdot)$  heißt *selbstähnlich mit Index*  $\alpha \in \mathbb{R}$ , falls  $\lambda(\cdot)$  die *Skalierungseigenschaft*

$$Q_t(l) = (Q_{l^\alpha t}(1))^{g_l}$$

für alle  $l \in [0, 1]$  und  $t \geq 0$  erfüllt. Im Falle  $\alpha = 0$  nennt man  $\lambda(\cdot)$  *homogene  $S^\downarrow$ -Fragmentierung*.

**2.5. Bemerkungen.** (a) Die Skalierungseigenschaft lässt sich auch folgendermaßen umschreiben: Für  $r, t \geq 0$  entspricht die bedingte Verteilung von  $\lambda(t + r)$  gegeben  $\lambda(t) = (l, 0, \dots)$ ,  $l \in [0, 1]$ , der Verteilung von  $l\lambda(r l^\alpha)$ .

(b) Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft lassen sich zusammen auch

folgendermaßen umschreiben: Für  $r, t \geq 0$  entspricht die bedingte Verteilung von  $\lambda(t+r)$  gegeben  $\lambda(t) = (l_1, l_2, \dots) \in S^\downarrow$  der Verteilung von

$$T(l_1 \lambda^{(1)}(r_1), l_2 \lambda^{(2)}(r_2), \dots),$$

wobei  $\lambda^{(1)}(\cdot), \lambda^{(2)}(\cdot), \dots$  eine Folge stochastisch unabhängiger Kopien von  $\lambda(\cdot)$  und  $r_i = r l_i^\alpha$  für  $i \geq 1$  sei.

## 2.2 $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen

Beginnen wollen wir diesen Abschnitt mit der Vorstellung des Zustandsraumes von  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen. Einige der in diesem Kontext relevanten Begriffe werden uns durch die gesamte Arbeit begleiten.

Sei  $E$  eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$ . Eine Partition  $\Gamma = (B_1, B_2, \dots)$  von  $E$  ist eine unendliche Folge von paarweise disjunkten Teilmengen  $B_i \subset E$ , genannt *Blöcke*, mit der Eigenschaft  $E = \sum_{i \geq 1} B_i$ . Wir vereinbaren als Normierung, dass stets

$$\min B_1 \leq \min B_2 \leq \dots$$

gilt, wobei  $\min A := \min\{n : n \in A\}$  und  $\inf \emptyset := \infty$ . Für notwendige Renormierungen verwenden wir das Symbol  $[\cdot]$ , indem wir  $[B_{\sigma(1)}, B_{\sigma(2)}, \dots] := (B_1, B_2, \dots)$  für jede beliebige Permutation  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  setzen. Es bezeichne  $\mathcal{P}(E)$  die Menge aller derartig normierten Partitionen von  $E$ . Zwecks Abkürzung schreiben wir  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}_n$  anstelle von  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  bzw.  $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ . Durch die Festlegung

$$i \stackrel{\Gamma}{\sim} j \quad :\Leftrightarrow \quad i, j \in B_k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}$$

induziert  $\Gamma$  eine Äquivalenzrelation auf  $E$ , die ihrerseits  $\Gamma$  eindeutig festlegt. Eine Partition  $\Gamma'$  heißt *feiner* als  $\Gamma$ , falls  $i \stackrel{\Gamma'}{\sim} j$  stets  $i \stackrel{\Gamma}{\sim} j$  impliziert. Dies bedeutet nichts anderes, als dass jeder Block der Partition  $\Gamma'$  als Vereinigung von Blöcken der Partition  $\Gamma$  dargestellt werden kann.

**2.6. Definition.** (a) Gegeben eine endliche oder unendliche Menge  $C = \{c_1, c_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$  mit  $c_1 < c_2 < \dots$  und  $\Gamma = (B_1, B_2, \dots) \in \mathcal{P}$ , sei

$$\Gamma \circ C := (A_1, A_2, \dots), \quad A_i := \bigcup_{j \in B_i} \{c_j\},$$

wobei  $\{c_j\} := \emptyset$  für  $j > |C|$ , sowie

$$\Gamma \circ \emptyset := (\emptyset, \emptyset, \dots).$$

Dann heißt  $\Gamma \circ C$  die *durch  $\Gamma$  induzierte Partition von  $C$* . Sie ist wegen  $c_1 < c_2 < \dots$  wieder normiert.

(b) Gegeben  $\Gamma = (B_1, B_2, \dots) \in \mathcal{P}(E)$  ( $E \subset \mathbb{N}$ ),  $\Delta \in \mathcal{P}$  und  $k \in \mathbb{N}$  heißt

$$\Delta \overset{k}{\circ} \Gamma := (B_1, \dots, B_{k-1}, \Delta \circ B_k, B_{k+1}, \dots)$$

die *Verfeinerung von  $\Gamma$  durch  $\Delta$  in  $k$* .

(c) Gegeben  $\Gamma = (B_1, B_2, \dots) \in \mathcal{P}(E)$  und  $E' \subset E$ , sei  $\Gamma_{E'} \in \mathcal{P}(E')$  die *Einschränkung von  $\Gamma$  auf  $E'$*  in dem Sinne, dass für  $i, j \in E$  gilt:

$$i \overset{\Gamma}{\sim} j \quad \Rightarrow \quad i \overset{\Gamma_{E'}}{\sim} j.$$

Offenbar entspricht dies  $[B_1 \cap E', B_2 \cap E', \dots]$ . Im Falle  $E' = \{1, \dots, n\}$  wird  $\Gamma_{\{1, \dots, n\}}$  durch  $\Gamma_n$  abgekürzt.

(d) Sei  $\Gamma = (B_1, B_2, \dots) \in \mathcal{P}$  und  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine endliche Permutation, d.h.  $\sigma(n) = n$  für alle hinreichend großen  $n$ . Dann wird  $\sigma(\Gamma) \in \mathcal{P}$  durch die Partition  $[\sigma(B_1), \sigma(B_2), \dots]$  definiert, also

$$i \overset{\sigma(\Gamma)}{\sim} j \quad :\Leftrightarrow \quad \sigma^{-1}(i) \overset{\Gamma}{\sim} \sigma^{-1}(j)$$

für alle  $i, j \in \mathbb{N}$ .

(e) Jede Partition der Form  $(E, \emptyset, \dots)$  heißt *trivial*, und wir setzen

$$\mathcal{P}_n^* := \{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n \neq (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)\}.$$

(f) Eine Folge  $(\Gamma^{(i)})_{i \geq 1}$  von Partitionen mit  $\Gamma^{(i)} \in \mathcal{P}(E_i)$  und  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  heißt *konsistent*, falls

$$\Gamma_{E_i}^{(j)} = \Gamma^{(i)}$$

für alle  $i \geq 1$  und  $j \geq i$  gilt.

**2.7. Bemerkungen.** (a) Für  $n, n' \in \mathbb{N}$  mit  $n < n'$  und  $\Gamma \in \mathcal{P}$  stimmt  $\Gamma_n$  mit der Einschränkung von  $\Gamma_{n'}$  auf  $\{1, \dots, n\}$  überein. Die Familie  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  ist folglich konsistent.

b) Ist hingegen  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  eine konsistente Familie von Partitionen mit  $\gamma_n \in \mathcal{P}_n$  für jedes  $n \geq 1$ , so existiert genau eine Partition  $\Gamma \in \mathcal{P}$  mit der Eigenschaft

$$\Gamma_n = \gamma_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Die Eindeutigkeit folgt sofort. Für  $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{P}$ , die die Bedingung (1) erfüllen, impliziert nämlich  $\Gamma \neq \Gamma'$  die Existenz von  $i, j \in \mathbb{N}$  mit  $i \stackrel{\Gamma}{\sim} j$  und  $i \not\stackrel{\Gamma'}{\sim} j$  oder umgekehrt und somit  $\Gamma_m \neq \Gamma'_m$  für  $m \geq \max\{i, j\}$ . Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme  $\Gamma_m = \gamma_m = \Gamma'_m$ . Definiert man  $i \stackrel{\Gamma}{\sim} j \Leftrightarrow i \stackrel{\gamma_n}{\sim} j$  für  $n \geq \max\{i, j\}$ , so ist  $\Gamma$  wegen der Konsistenzeigenschaft von  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  wohldefiniert und  $\Gamma$  erfüllt offensichtlich (1).

Eine geeignete Metrik  $d_{\mathcal{P}}$  auf  $\mathcal{P}$  wird durch

$$d_{\mathcal{P}}(\Gamma, \Gamma') := 2^{-n(\Gamma, \Gamma')} \quad \text{mit } n(\Gamma, \Gamma') := \sup\{n \geq 1 : \Gamma_n = \Gamma'_n\}$$

für  $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{P}$  gegeben. Wir bemerken, dass  $n(\Gamma, \Gamma') = \infty$  äquivalent zu  $\Gamma = \Gamma'$  ist.

**2.8. Lemma.**  *$(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$  ist ein kompakter metrischer Raum und damit insbesondere polnisch.*

BEWEIS: Gezeigt wird, dass jede Folge von Partitionen in  $\mathcal{P}$  eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei  $(\Gamma^{(n)})_{n \geq 1}$  eine beliebige Folge in  $\mathcal{P}$ . Da  $|\mathcal{P}_m| < \infty$  für alle  $m \geq 1$ , kann man mittels eines Induktionsarguments leicht zeigen, dass es eine konsistente Folge  $\gamma^{(m)} \in \mathcal{P}_m, m \geq 1$ , gibt, so dass alle

$$K_m := \{n \geq 1 : \gamma^{(m)} = \Gamma_m^{(n)}\}, \quad m \geq 1,$$

unendlich viele Elemente besitzen und  $K_1 \supset K_2 \supset \dots$  gilt. Für jedes  $m \geq 1$  definieren wir nun  $n_m$  als das  $m$ -te aufsteigend geordnete Element von  $K_m$ . Da  $(\Gamma_m^{(n_m)})_{m \geq 1}$  konsistent ist, existiert nach Bemerkung 2.7 (b) ein eindeutig bestimmtes  $\Gamma \in \mathcal{P}$  mit  $\Gamma_m = \Gamma_m^{(n_m)}$  für alle  $m \geq 1$ , was insbesondere  $n(\Gamma, \Gamma^{(n_m)}) \geq m$  und somit

$$d_{\mathcal{P}}(\Gamma, \Gamma^{(n_m)}) \leq 2^{-m}$$

für alle  $m \geq 1$  impliziert.  $\Gamma^{(n_m)}$  konvergiert also gegen  $\Gamma$ . □

**2.9. Bemerkung.** Da  $d_{\mathcal{P}}$  offenbar auch auf  $\mathcal{P}_m$  eine Metrik definiert und  $|\mathcal{P}_m| < \infty$  für alle  $m \geq 1$  gilt, bildet auch  $(\bar{\mathcal{P}}, d_{\mathcal{P}})$  mit  $\bar{\mathcal{P}} := \mathcal{P} + \sum_{m \geq 1} \mathcal{P}_m$  einen metrischen Raum. Man kann ferner leicht zeigen, dass diese Erweiterung von  $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$  weiterhin kompakt ist.

Nachdem wir  $\mathcal{P}$  metrisiert haben, sei  $\mathfrak{B}_{\mathcal{P}}$  die zugehörige Borelsche  $\sigma$ -Algebra,

die bekanntlich von den (bezüglich  $d_{\mathcal{P}}$ ) offenen Mengen erzeugt wird. Für  $C \subset \mathbb{N}$  sei außerdem

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{P}(C)} := \{\mathcal{A}_C : \mathcal{A} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{P}}\}, \quad \mathcal{A}_C := \{\Gamma_C : \Gamma \in \mathcal{A}\}.$$

Wir kommen nun zur Einführung von  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen, die anschaulich gesprochen die zeitstetige zufällige Verfeinerung von Partitionen von  $\mathbb{N}$  beschreiben, wobei zu jedem Zeitpunkt die Blöcke der aktuell gegebenen Partition unabhängig voneinander weiter zerlegt werden. Die formale Beschreibung geschieht wie in Abschnitt 2.1 mit Hilfe von *Fragmentierungskernen*. Für jedes  $B \subset \mathbb{N}$  sei  $Q_B$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathcal{P}(B), \mathfrak{B}_{\mathcal{P}(B)})$ . Gegeben eine Partition  $\Gamma = (B_1, B_2, \dots) \in \mathcal{P}$ , sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallspartitionen von  $\mathbb{N}$  mit  $X_i \stackrel{d}{=} Q_{B_i}$ . Die Verteilung der Zufallspartition  $[X_1, X_2, \dots] \in \mathcal{P}$ , die sich durch Zusammenfassung der Partitionen  $X_i$  und anschließender Normierung  $[\cdot]$  ergibt, bezeichnen wir mit  $P(\Gamma, \cdot)$ . Wir setzen hierbei stillschweigend voraus, dass die Zuordnung

$$\mathcal{P} \ni \Gamma = (B_1, B_2, \dots) \mapsto \left( \bigotimes_{i \geq 1} Q_{B_i} \right)^{[\cdot]}$$

messbar und somit  $P$  ein stochastischer Kern von  $(\mathcal{P}, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}})$  nach  $(\mathcal{P}, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}})$  ist.

**2.10. Definition.** Ein stochastischer Kern  $P$  der soeben eingeführten Art heißt  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungskern und  $(Q_B)_{B \subset \mathbb{N}}$  die  $P$  induzierende Familie.

**2.11. Definition.** Ein zeitlich homogener Markov-Prozess  $\Pi(\cdot) = (\Pi(t), t \geq 0)$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  mit Werten in  $(\mathcal{P}, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}})$  heißt  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

- (1)  $\Pi(0) = (\mathbb{N}, \emptyset, \dots)$  fast sicher.
- (2)  $\Pi(\cdot)$  ist stetig in Wahrscheinlichkeit.
- (3)  $\Pi(\cdot)$  erfüllt die *Fragmentierungseigenschaft*, d.h. die Halbgruppe  $(P^t(\cdot, \cdot))_{t \geq 0}$  der  $t$ -Schritt-Übergangskerne  $(P^t(\Gamma, \cdot) = \mathbb{P}(\Pi(s+t) \in \cdot | \Pi(s) = \Gamma))$  für alle  $s, t \geq 0$  und  $\Gamma \in \mathcal{P}$ ) wird durch  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungskerne gegeben, wobei  $(Q_B^t)_{B \subset \mathbb{N}}$  die  $P^t$  induzierende Familie bezeichne.
- (4)  $\Pi(\cdot)$  ist *austauschbar*, d.h.  $\mathbb{P}(\Pi \in \cdot) = \mathbb{P}(\sigma(\Pi) \in \cdot)$  für jede endliche Permutation  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

Offenkundig beschreibt jede  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung eine sukzessive Verfeinerung von Partitionen von  $\mathbb{N}$ , d.h.  $\Pi(s+t)$  ist stets eine Verfeinerung von  $\Pi(s)$  für al-

le  $s, t \geq 0$ . Die Forderung der Austauschbarkeit ist wesentlich. Sie beschränkt die Klasse der  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen in sinnvoller Weise, wie Kapitel 3 und die Strukturaussage in Kapitel 4 belegen werden.

Auch für  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen wollen wir als Nächstes den Begriff der *Selbstähnlichkeit* einführen (Definition 2.14) und benötigen hierfür zunächst die Definition der *asymptotischen Frequenzen*.

**2.12. Definition.** Gegeben  $\Gamma = (B_1, B_2, \dots) \in \mathcal{P}$  bezeichnet

$$\Lambda(B_i) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{1 \leq k \leq n : k \in B_i\}|,$$

sofern dieser Limes existiert, die *asymptotische Frequenz von  $B_i$* . Existiert der Limes nicht, setzen wir

$$\Lambda(B_i) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{1 \leq k \leq n : k \in B_i\}|.$$

Schließlich sei  $\Lambda^\downarrow(\Gamma)$  die absteigend geordnete Folge der  $\Lambda(B_i)$ ,  $i \geq 1$ .

Nach dem Lemma von Fatou gilt  $\sum_{i \geq 1} \Lambda(B_i) \leq 1$  für jedes  $\Gamma = (B_1, B_2, \dots) \in \mathcal{P}$ . Damit ist  $\Lambda^\downarrow(\Gamma)$  ein Element der in Abschnitt 2.1 definierten Menge  $S^\downarrow$ . Erwähnt sei bereits hier, dass asymptotische Frequenzen im Rahmen von  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen zu festen Zeitpunkten fast sicher existieren, wie Satz 3.5 konstatieren wird.

**2.13. Definition.** Eine  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot) = (\Pi(t), t \geq 0)$  heißt *regulär*, wenn außerhalb einer Nullmenge die Komponenten aller  $\Lambda^\downarrow(\Pi(t))$ ,  $t \geq 0$ , als Limiten existieren.

Mit Hilfe des bisherigen Rüstzeugs lassen sich jetzt selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen beschreiben, wobei die Existenz an dieser Stelle offen bleibt. Diesbezüglich sei auf die Kapitel 4 und 5 verwiesen.

**2.14. Definition.** Eine  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot) = (\Pi(t), t \geq 0)$  mit Übergangskernen  $P^t$  induziert durch  $(Q_B^t)_{B \subset \mathbb{N}}$  ( $t \geq 0$ ) heißt *selbstähnlich mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$* , falls gilt:

- (1)  $\Pi(\cdot)$  ist regulär.
- (2)  $\Lambda^\downarrow(\Pi(\cdot)) = (\Lambda^\downarrow(\Pi(t)), t \geq 0)$  ist stetig in Wahrscheinlichkeit.
- (3)  $\Pi(\cdot)$  erfüllt folgende *Skalierungseigenschaft*: Für alle  $B \subset \mathbb{N}$  und  $t \geq 0$  ist  $Q_B^t$  die Verteilung von  $\Pi(t\Lambda(B)^\alpha) \circ B$ .

Im Falle  $\alpha = 0$  heißt  $\Pi(\cdot)$  *homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung*.

**2.15. Lemma.** *Gegeben eine  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$ , ist folgende Bedingung äquivalent zu (3) in Definition 2.14:*

(3') *Für alle  $B \subset \mathbb{N}$  und  $t \geq 0$  ist  $Q_B^t$  die Verteilung von  $\Pi(t\Lambda(B)^\alpha)_B$ , der Einschränkung von  $\Pi(t\Lambda(B)^\alpha)$  auf  $B$ .*

Die behauptete Äquivalenz von (3) und (3') hängt maßgeblich an der Austauschbarkeit von  $\Pi(\cdot)$ , wie der anschließende Beweis zeigt, denn im Allgemeinen sind  $\Gamma \circ B$  und  $\Gamma_B$  für  $\Gamma \in \mathcal{P}$  und  $B \subset \mathbb{N}$  verschieden.

BEWEIS: Offenbar reicht es zu zeigen, dass  $\Pi(t)_B \stackrel{d}{=} \Pi(t) \circ B$  für alle  $t \geq 0$  und  $B \subset \mathbb{N}$  gilt. Es sei  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$  (endlich oder unendlich) mit  $b_1 < b_2 < \dots$  und  $B_n := B \cap \{1, \dots, n\}$  für  $n \geq 1$ . Wir wählen für  $n \geq 1$  endliche Permutationen  $\sigma_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft

$$\sigma_n(i) = b_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq |B_n|.$$

Dann gilt unter Benutzung der Austauschbarkeit von  $\Pi(\cdot)$

$$\Pi(t)_{B_n} \stackrel{d}{=} (\sigma_n(\Pi(t)))_{B_n} = \Pi(t) \circ B_n$$

für alle  $n \geq 1$  und  $t \geq 0$  und deshalb auch

$$\Pi(t)_B = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(t)_{B_n} \stackrel{d}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(t) \circ B_n = \Pi(t) \circ B$$

für alle  $t \geq 0$ , wobei die Limiten natürlich bezüglich  $d_{\mathcal{P}}$  gebildet werden.  $\square$

**2.16. Bemerkungen.** (a) Die Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft lassen sich zusammen auch folgendermaßen umschreiben: Für  $r, t \geq 0$  entspricht die bedingte Verteilung von  $\Pi(t+r)$  gegeben  $\Pi(t) = \Gamma = (B_1, B_2, \dots) \in \mathcal{P}$  der Verteilung der Zufallspartition

$$\Pi^\Gamma(r) := [\Pi^{(1)}(r_1) \circ B_1, \Pi^{(2)}(r_2) \circ B_2, \dots]$$

bzw.

$$\tilde{\Pi}^\Gamma(r) := [\Pi^{(1)}(r_1)_{B_1}, \Pi^{(2)}(r_2)_{B_2}, \dots].$$

Hierbei sei  $(\Pi^{(i)}(\cdot))_{i \geq 1}$  eine Folge stochastisch unabhängiger Kopien von  $\Pi(\cdot)$  und  $r_i := r\Lambda(B_i)^\alpha$  für  $i \geq 1$ .

(b) Die Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft implizieren, dass die Verteilung der weiteren Fragmentierung eines Blockes ausschließlich von dessen asymptotischer Frequenz abhängt.

(c) Gemäß Teil (a) legen die eindimensionalen Randverteilungen die Verteilung von  $\Pi(\cdot)$  fest.

(d) Wie in Korollar 6.12 gezeigt wird, kann bei homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen auf die Forderungen (1) und (2) der Definition 2.14 verzichtet werden, da jene generell regulär und deren assoziierte Prozesse der geordneten asymptotischen Frequenzen stetig in Wahrscheinlichkeit sind.

**2.17. Definition.**  $\mathbb{P}_\Gamma$  bezeichnet die Verteilung eines Fragmentierungsprozesses, der von einer beliebigen Partition  $\Gamma \in \mathcal{P}$  startet, d.h. genauer - bezogen auf die Situation in Bemerkung 2.16 (a) -

$$\mathbb{P}_\Gamma(\Pi(r) \in \cdot) := \mathbb{P}(\Pi(t+r) \in \cdot | \Pi(t) = \Gamma) = \mathbb{P}(\Pi^\Gamma(r) \in \cdot) = \mathbb{P}(\tilde{\Pi}^\Gamma(r) \in \cdot)$$

für  $r, t \geq 0$ .

Im Interesse des späteren Vorgehens nutzen wir den Rest dieses Abschnittes dazu, elementare Resultate über die soeben eingeführten selbstähnlichen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen zu präsentieren. Zunächst konstruieren wir basierend auf der Verfeinerungseigenschaft von  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen eine sogenannte *càdlàg-Version* einer selbstähnlichen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$ . Das Vorliegen eines càdlàg-Prozesses, d.h. eines Prozesses, der fast sicher rechtsseitig stetig ist und fast sicher linke Limiten besitzt, ist gerade bei der Behandlung von Markov-Prozessen von Vorteil. Das folgende einfache Lemma ist hierfür nützlich.

**2.18. Monotonielemma.** (a) Aus  $\Gamma^{(1)} \subset \Gamma^{(2)} \subset \Gamma^{(3)}$  folgt stets

$$d_{\mathcal{P}}(\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(1)}) \leq d_{\mathcal{P}}(\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(1)}) \quad \text{und} \quad d_{\mathcal{P}}(\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}) \leq d_{\mathcal{P}}(\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(3)}).$$

(b) Jede monotone Folge  $(\Gamma^{(n)})_{n \geq 1}$  von Elementen aus  $\mathcal{P}$  konvergiert (bezüglich  $d_{\mathcal{P}}$ ) gegen ein  $\Gamma \in \mathcal{P}$ .

BEWEIS: Zu (a): Es genügt der Hinweis, dass offenbar

$$n(\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(1)}) \geq n(\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(1)}) \quad \text{und} \quad n(\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}) \geq n(\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(3)})$$



gilt (zur Definition von  $n(\cdot, \cdot)$  siehe die Ausführungen vor Lemma 2.8).

Zu (b): Da  $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$  nach Lemma 2.8 ein kompakter metrischer Raum ist, existiert eine konvergente Teilfolge von  $(\Gamma^{(n)})_{n \geq 1}$  mit Grenzwert  $\Gamma' \in \mathcal{P}$ . Teil (a) liefert die Behauptung für  $\Gamma := \Gamma'$ .  $\square$

Definieren wir für  $t \geq 0$  die Zufallsvariable  $\Pi(t+)$  durch die Äquivalenzrelation

$$i \stackrel{\Pi(t+)}{\sim} j \quad :\Leftrightarrow \quad i \stackrel{\Pi(t')}{\sim} j \quad \text{für ein } t' \in \mathbb{Q} \cap (t, \infty),$$

so gilt:

**2.19. Proposition.**  $(\Pi(t+), t \geq 0)$  ist eine càdlàg-Version von  $\Pi(\cdot)$ .

BEWEIS: Nach Definition der  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  existiert eine Nullmenge  $N \in \mathfrak{A}$ , so dass die Pfade  $\mathbb{Q}^+ \ni t \mapsto \Pi(t)(\omega)$  für alle  $\omega \in N^c$  monoton fallend sind. Da der Prozess  $(\Pi(t+), t \geq 0)$  durch  $(\Pi(t), t \in \mathbb{Q}^+)$  festgelegt wird, erhalten wir die fallende Monotonie der Pfade  $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \Pi(t+)(\omega)$  für alle  $\omega \in N^c$ .

Seien nun  $t \geq 0$  und  $\omega \in N^c$  fest, aber beliebig. Zum Nachweis der rechtsseitigen Stetigkeit betrachten wir

$$\lim_{s \downarrow t} \Pi(s+)(\omega) =: \Gamma,$$

wobei die Existenz des Grenzwertes durch das vorherige Lemma gesichert ist. Aus

$$\begin{aligned} i \stackrel{\Pi(t+)(\omega)}{\sim} j &\Leftrightarrow \exists t' \in \mathbb{Q} \cap (t, \infty) \text{ mit } i \stackrel{\Pi(t')(\omega)}{\sim} j \\ &\Leftrightarrow \exists t' \in \mathbb{Q} \cap (t, \infty) \text{ mit } i \stackrel{\Pi(t''+)(\omega)}{\sim} j \text{ für } t'' \in (t, t') \\ &\Leftrightarrow i \stackrel{\Gamma}{\sim} j \end{aligned}$$

für  $i, j \in \mathbb{N}$  folgt  $\Pi(t+)(\omega) = \Gamma$  und damit die rechtsseitige Stetigkeit. Die Existenz linksseitiger Limiten ist ebenfalls eine direkte Konsequenz des Monotonielemmas.

Es bleibt  $\mathbb{P}((\Pi(t+) = \Pi(t))) = 1$  zu zeigen. Sei  $(t_n)_{n \geq 1}$  eine Folge mit  $\mathbb{Q}^+ \ni t_n \downarrow t$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da  $\Pi(\cdot)$  stetig in Wahrscheinlichkeit ist, gilt

$$\Pi(t_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \Pi(t)$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Nach einem Resultat der Wahrscheinlichkeitstheorie (vergleiche z.B. [Als1], S. 170) existiert eine Teilfolge von  $(t_n)_{n \geq 1}$ , so dass für diese fast sichere Konvergenz vorliegt. Aufgrund der Monotonieeigenschaft erhalten wir damit nach

Lemma 2.18 sogar

$$\Pi(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Pi(t) \quad \text{fast sicher}$$

und wegen

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(t_n) = \Pi(t+) \right) = 1$$

die Behauptung. □

**2.20. Bemerkung.** Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit und Monotonie von  $(\Pi(t+), t \geq 0)$  implizieren ferner dessen fast sichere Stetigkeit für festes  $t \geq 0$ .

Wir werden von nun an eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  als càdlàg-Version unterstellen. Ferner sei  $\Pi(\cdot)$  im Folgenden stets nicht-trivial, d.h.  $\Pi(\cdot) \neq (\mathbb{N}, \emptyset, \dots)$  mit positiver Wahrscheinlichkeit.

**2.21. Bemerkung.** In diesem Fall gilt  $\Pi(\infty-) = (\{1\}, \{2\}, \dots)$ , d.h. nicht-triviale selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen streben fast sicher gegen die Partition, die nur aus einelementigen Blöcken besteht. Der Prozess hat demnach in dieser Partition seinen einzigen absorbierenden Zustand. Wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis, sondern verweisen darauf, dass dieses Resultat unmittelbar aus Proposition 2.38, Satz 3.10 und Satz 3.14 folgt. Das analoge Ergebnis für selbstähnliche Intervall-Fragmentierungen (Proposition 2.38) besitzt den Vorteil des kürzeren Nachweises.

Der Einsatz von Stoppzeiten im Rahmen von homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen wird im weiteren Verlauf notwendig sein. Dafür definieren wir zunächst die natürliche Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  für eine  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  durch

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\sigma(\Pi(s), s \leq t) \cup \mathcal{N})$$

für alle  $t \geq 0$  mit  $\mathcal{N} := \{N \in \mathfrak{A} : \mathbb{P}(N) = 0\}$ .

**2.22. Lemma.** *Die natürliche Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  ist rechtsseitig stetig.*

BEWEIS: Siehe [Ber1], S. 18.

Wir beschränken uns ab jetzt in diesem Abschnitt auf die Betrachtung von homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen. Wir werden sehen, dass diese bzw. deren Halbgruppe

von Übergangskernen die sogenannte *Feller-Eigenschaft* erfüllen. Es sei angemerkt, dass dies für selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen mit Index  $\alpha \neq 0$  im Allgemeinen nicht zutrifft. Hinsichtlich der Festlegung von  $\Pi^\Gamma(\cdot)$  und  $\mathbb{P}_\Gamma$  verweisen wir auf Bemerkung 2.16 (a) und Definition 2.17.

**2.23. Satz (Feller-Eigenschaft).** *Es sei  $\Pi(\cdot) = (\Pi(t), t \geq 0)$  eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung. Für jede stetige Funktion  $\Psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $t \geq 0$  ist die Abbildung*

$$\Gamma \mapsto \mathbb{E}_\Gamma \Psi(\Pi(t)), \quad \Gamma \in \mathcal{P},$$

*stetig, und für jedes  $\Gamma \in \mathcal{P}$  gilt*

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E}_\Gamma \Psi(\Pi(t)) = \Psi(\Gamma).$$

BEWEIS: Wir definieren  $\bar{\pi}_n := (\pi_n, \{n+1, n+2, \dots\}, \emptyset, \dots)$  für  $\pi \in \mathcal{P}$  und  $\bar{\Pi}_n(\cdot) = (\Pi(\cdot)_n, \{n+1, n+2, \dots\}, \emptyset, \dots)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Offenbar gilt dann  $d_{\mathcal{P}}(\pi, \bar{\pi}_n) \leq 2^{-n}$ . Jede stetige Funktion  $\Psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  ist wegen der Kompaktheit von  $\mathcal{P}$  sogar gleichmäßig stetig, d.h. für beliebiges  $\epsilon > 0$  existiert ein  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $\pi \in \mathcal{P}$  gilt:

$$|\Psi(\pi) - \Psi(\bar{\pi}_n)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_\epsilon.$$

Ferner ist im Falle  $d_{\mathcal{P}}(\Gamma, \Gamma') \leq 2^{-n}$  für  $\Gamma = (B_1, B_2, \dots), \Gamma' = (C_1, C_2, \dots) \in \mathcal{P}$  die Verteilung von  $\bar{\Pi}_n(t)$  unter  $\mathbb{P}_\Gamma$  identisch mit der unter  $\mathbb{P}_{\Gamma'}$ , d.h. insbesondere

$$\mathbb{E}_\Gamma \Psi(\bar{\Pi}_n(t)) = \mathbb{E}_{\Gamma'} \Psi(\bar{\Pi}_n(t))$$

für alle  $t \geq 0$ . Gemäß Konstruktion hängt die Verteilung von  $\bar{\Pi}_n^\Gamma(\cdot)$  bzw.  $\bar{\Pi}_n^{\Gamma'}(\cdot)$  nämlich nur von  $B_i \cap \{1, \dots, n\}$  bzw.  $C_i \cap \{1, \dots, n\}$  für  $i \geq 1$  ab, und diese Mengen entsprechen einander wegen  $\Gamma_n = \Gamma'_n$ .

Insgesamt folgt dann für  $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{P}$  mit  $d_{\mathcal{P}}(\Gamma, \Gamma') \leq 2^{-n_\epsilon}$

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}_\Gamma \Psi(\Pi(t)) - \mathbb{E}_{\Gamma'} \Psi(\Pi(t))| \\ & \leq |\mathbb{E}_\Gamma \Psi(\Pi(t)) - \mathbb{E}_\Gamma \Psi(\bar{\Pi}_{n_\epsilon}(t))| + |\mathbb{E}_\Gamma \Psi(\bar{\Pi}_{n_\epsilon}(t)) - \mathbb{E}_{\Gamma'} \Psi(\bar{\Pi}_{n_\epsilon}(t))| \\ & \quad + |\mathbb{E}_{\Gamma'} \Psi(\bar{\Pi}_{n_\epsilon}(t)) - \mathbb{E}_{\Gamma'} \Psi(\Pi(t))| \\ & \leq \mathbb{E}_\Gamma |\Psi(\Pi(t)) - \Psi(\bar{\Pi}_{n_\epsilon}(t))| + \mathbb{E}_{\Gamma'} |\Psi(\bar{\Pi}_{n_\epsilon}(t)) - \Psi(\Pi(t))| < \epsilon. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\Gamma \mapsto \mathbb{E}_\Gamma \Psi(\Pi(t))$  ist daher stetig für jedes  $t \geq 0$ .

Wegen  $\Pi^\Gamma(0) = \Gamma$  fast sicher und der Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit konvergiert  $\Pi^\Gamma(t)$  in Wahrscheinlichkeit gegen  $\Gamma$  für  $t \downarrow 0$ . Somit konvergiert  $\Pi(t)$

unter  $\mathbb{P}_\Gamma$  schwach gegen  $\Gamma$  für  $t \downarrow 0$ . Aufgrund der Kompaktheit von  $\mathcal{P}$ , die die Beschränktheit der stetigen Funktionen  $\Psi$  bedingt, ist dies gleichbedeutend mit  $\lim_{t \downarrow 0} \Psi(\Pi(t)) = \Psi(\Gamma)$  für alle  $\Gamma \in \mathcal{P}$ .  $\square$

Die Gültigkeit der Feller-Eigenschaft und die rechtsseitige Stetigkeit der natürlichen Filtration führen abschließend zu folgendem Resultat:

**2.24. Korollar.** *Die homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  genügt der starken Markov-Eigenschaft, d.h. für jede Stoppzeit  $T$  bezüglich der natürlichen Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  ist die Fragmentierung  $(\Pi(T+t), t \geq 0)$  unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Pi(T) = \Gamma)$  unabhängig von  $\mathcal{F}_T$  und hat die Verteilung  $\mathbb{P}_\Gamma$ .*

BEWEIS: Siehe [Br], S. 323 und S. 357.

Wegen  $\Pi(\infty) = (\{1\}, \{2\}, \dots)$  lässt sich  $\Pi(T+t)$  selbst für den Fall definieren, dass  $T = \infty$  mit positiver Wahrscheinlichkeit gilt.

## 2.3 Intervall-Fragmentierungen

Bevor wir zur eigentlichen Definition von Intervall-Fragmentierungen kommen, befassen wir uns wie bei den  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen mit dem entsprechenden Zustandsraum. Ohne Kenntnis dessen zentraler Eigenschaften wäre eine Analyse des stochastischen Prozesses später nicht durchführbar.

Als Zustandsraum der dritten Klasse von Fragmentierungsprozessen wählen wir den Raum der offenen Teilmengen von  $[0, 1]$ , den wir mit  $\mathcal{V}$  bezeichnen. Jedes  $V \in \mathcal{V}$  wird durch die stetige und beschränkte Funktion  $\chi_V : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ ,

$$\chi_V(x) := \min\{|x - y| : y \in V^c\}$$

mit  $V^c := [0, 1] \setminus V$ , eindeutig festgelegt. Durch den Abstand

$$d_{\mathcal{V}}(U, V) := \|\chi_U - \chi_V\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} \{|\chi_U(x) - \chi_V(x)|\} \quad \text{für } U, V \in \mathcal{V}$$

wird eine Metrik auf  $\mathcal{V}$  gegeben. Sei  $\mathfrak{D}_{\mathcal{V}}$  die durch  $d_{\mathcal{V}}$  induzierte (Borelsche)  $\sigma$ -Algebra.

**2.25. Bemerkungen.** (a)  $d_{\mathcal{V}}(U, V)$  stimmt für  $U, V \in \mathcal{V}$  mit dem Hausdorff-Abstand zwischen den kompakten Komplementen von  $U$  und  $V$  überein, d.h.

$$d_{\mathcal{V}}(U, V) = \max\left\{\sup_{x \in U^c} d(x, V^c), \sup_{y \in V^c} d(y, U^c)\right\}$$

mit  $d(x, V) := \inf_{v \in V} \{|x - v|\}$ . Der Beweis wird im Anhang im Anschluss an diesen Abschnitt gegeben. Da der Raum der kompakten Teilmengen von  $[0, 1]$  versehen mit der Hausdorff-Metrik kompakt ist (siehe dazu [Ed], S. 66ff), ist auch  $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$  ein kompakter metrischer Raum.

(b)  $V_1 \subset V_2 \subset V_3$  impliziert

$$d_{\mathcal{V}}(V_2, V_1) \leq d_{\mathcal{V}}(V_3, V_1) \quad \text{und} \quad d_{\mathcal{V}}(V_2, V_3) \leq d_{\mathcal{V}}(V_1, V_3),$$

da  $\chi_{V_1}(x) \geq \chi_{V_2}(x) \geq \chi_{V_3}(x)$  für alle  $x \in [0, 1]$  gilt. Mit Teil (a) folgt ferner, dass jede monotone Folge  $(V_n)_{n \geq 1}$  von Elementen aus  $\mathcal{V}$  gegen ein  $V \in \mathcal{V}$  (bezüglich  $d_{\mathcal{V}}$ ) konvergiert.

(c) Eine Folge  $((b_n, c_n))_{n \geq 1}$  von offenen Intervallen konvergiert bezüglich  $d_{\mathcal{V}}$  genau dann gegen  $(a_0, b_0)$  mit  $0 \leq a_n < b_n \leq 1$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ , wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_0$  gilt.

Das folgende Lemma zeigt, dass jede offene Teilmenge von  $[0, 1]$  eindeutig in offene, paarweise disjunkte Intervalle zerlegbar ist. Dies ist der entscheidende Grund dafür, dass sich die Menge  $\mathcal{V}$  für die Beschreibung von Fragmentierungen eignet.

**2.26. Lemma.** *Gegeben ein  $V \in \mathcal{V}$ , existiert eine (bis auf Permutationen) eindeutig bestimmte Folge  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von offenen, paarweise disjunkten Intervallen  $I_k \subset [0, 1]$  mit  $V = \sum_{k \in \mathbb{N}} I_k$ .*

BEWEIS: Siehe Anhang im Anschluss an diesen Abschnitt.

**2.27. Definition.** Die im vorherigen Lemma eingeführte Folge  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  heißt *Intervallzerlegung von  $V$* .

Wir vereinbaren, dass die Intervalle der Länge nach absteigend und bei gleicher Länge von links nach rechts geordnet sein sollen, falls explizit keine andere Normierung vorgegeben wird.

Die folgenden zwei technischen Resultate werden für die weitere Behandlung von Fragmentierungsprozessen auf  $\mathcal{V}$ , insbesondere für den Nachweis der Feller-Eigenschaft, nützlich sein.

**2.28. Lemma.** *Sei  $(V_{n,i})_{n,i \geq 1}$  eine Familie von Elementen aus  $\mathcal{V}$ , für die gilt:*

- (1) *Für jedes  $i \in \mathbb{N}$  konvergiert  $V_{n,i}$  (bezüglich der Metrik  $d_{\mathcal{V}}$ ) gegen ein  $V_i \in \mathcal{V}$  für  $n \rightarrow \infty$ .*
- (2) *Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $V_{n,1}, V_{n,2}, \dots$  eine Folge disjunkter Mengen und  $\lim_{i \rightarrow \infty} V_{n,i} = \emptyset$  gleichmäßig in  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Dann gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i \geq 1} V_{n,i} = \bigcup_{i \geq 1} V_i.$$

BEWEIS: Siehe Anhang im Anschluss an diesen Abschnitt.

**2.29. Lemma.** *Sei  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Elementen aus  $\mathcal{V}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V \in \mathcal{V}$ . Bei geeigneter Indizierung der Intervallzerlegungen  $(I_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$  und  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $V_n$  bzw.  $V$  gilt:*

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,i} = I_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ ,
- (2)  $\lim_{i \rightarrow \infty} I_{n,i} = \emptyset$  gleichmäßig in  $n \in \mathbb{N}$ .

BEWEIS: Siehe Anhang im Anschluss an diesen Abschnitt.

Wir stellen nun das Pendant zu den geordneten asymptotischen Frequenzen aus Abschnitt 2.1 vor. Mit  $\lambda$  sei das Lebesgue-Maß bezeichnet. Wir setzen  $|I| := \lambda(I)$  für ein Intervall  $I$ . Wir definieren die Abbildung  $s : (\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}}) \rightarrow (S^{\downarrow}, \varrho)$  durch

$$s(V) := (s_1(V), s_2(V), \dots) \quad \text{mit } s_i(V) := |I_i|$$

für  $i \in \mathbb{N}$ , wobei  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  die Intervallzerlegung von  $V$  sei. Dabei gilt wie vereinbart  $|I_i| \leq |I_j|$  für  $i \geq j$ . Die Abbildung  $s$  gibt also für  $V \in \mathcal{V}$  die absteigend geordneten Längen der einzelnen Intervalle der Zerlegung von  $V$  an. Im Gegensatz zur geordneten asymptotischen Frequenz weist sie folgende Eigenschaften auf:

**2.30. Lemma.** (a) Die Abbildung  $s$  ist stetig.

(b) Sei  $(V_n)_{n \geq 0}$  eine Folge von Elementen aus  $\mathcal{V}$  mit

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_0 \quad \text{oder} \quad V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_0,$$

und es konvergiere  $s(V_n)$  gegen  $s(V_0)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt  $V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} V_0$ .

BEWEIS: Zu (a): Sei  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $V_n \in \mathcal{V}$  für  $n \geq 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V \in \mathcal{V}$ . Nach Lemma 2.29 können wir die Indizierungen der Intervallzerlegungen  $(I_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$  und  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $V_n$ ,  $n \geq 1$ , bzw.  $V$  so wählen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,i} = I_i$  für jedes  $i \geq 1$  gilt. Nach Bemerkung 2.25 (c) ist dies gleichbedeutend mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_i(V_n) = s_i(V)$  für jedes  $i \geq 1$ . Mit Bemerkung 2.1 (b) erhalten wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(V_n) = s(V)$  bezüglich der Metrik  $\varrho$ , also die Stetigkeit von  $s$ .

Zu (b): Nach Bemerkung 2.25 (b) konvergiert  $V_n$  gegen ein  $V' \in \mathcal{V}$  für  $n \rightarrow \infty$ . Nach Voraussetzung gilt  $s_i(V_0) = s_i(V')$  für jedes  $i \geq 1$ . Da  $V_0$ ,  $V'$  offen sind und entweder  $V' \subset V_0$  oder  $V' \supset V_0$  gilt, liefert dies die Behauptung.  $\square$

Wir sind jetzt soweit, die Definition für Intervall-Fragmentierungen anzugeben.

**2.31. Definition.** Ein stochastischer Prozess  $F(\cdot) = (F(t), t \geq 0)$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  mit Werten in  $(\mathcal{V}, \mathfrak{D}_{\mathcal{V}})$  heißt *Intervall-Fragmentierung*, falls  $F(t) \subset F(r)$  fast sicher gilt für  $0 \leq r \leq t$ . Der Prozess  $(s \circ F(t), t \geq 0)$  wird die zu  $F(\cdot)$  *assoziierte geordnete Fragmentierung* genannt.

Jede Intervall-Fragmentierung beschreibt demnach das Schrumpfen einer offenen Teilmenge von  $[0, 1]$ . Mit Blick auf die Intervallzerlegungen ist auch die Interpretation als im Zeitablauf fortschreitende Verfeinerung angemessen.

Analog zur  $S^\perp$ - und  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung führt der Weg zum Begriff der *Selbstähnlichkeit* bei Intervall-Fragmentierungen über *Fragmentierungskerne*. Die formale Einführung verlangt einige weitere Bezeichnungen. Für ein offenes Intervall  $I \subset [0, 1]$  sei

$$\mathcal{V}_I := \{V \cap I : V \in \mathcal{V}\}, \quad \mathfrak{D}_{\mathcal{V}_I} := \mathfrak{D}_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{V}_I.$$

Offensichtlich ist  $(\mathcal{V}_I, d_{\mathcal{V}})$  ein abgeschlossener Unterraum von  $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$ . Es bezeichne  $Q_I$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathcal{V}_I, \mathfrak{D}_{\mathcal{V}_I})$  für jedes offene Intervall  $I \subset [0, 1]$ . Im Falle  $I = \emptyset$  sei  $Q_I := \delta_{\emptyset}$ . Zu einem beliebigen  $V \in \mathcal{V}$  mit Intervallzerlegung  $(I_i)_{i \geq 1}$

sei  $(X_i)_{i \geq 1}$  eine Folge stochastisch unabhängiger  $\mathcal{V}$ -wertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  mit  $X_i \stackrel{d}{=} Q_{I_i}$  für  $i \geq 1$ . Die Verteilung der Zufallsvariablen  $\sum_{i \geq 1} X_i$  bezeichnen wir mit  $P(V, \cdot)$ . Wir setzen wiederum voraus, dass die Zuordnung

$$\mathcal{V} \ni V = \sum_{i \geq 1} I_i \mapsto \left( \bigotimes_{i \geq 1} Q_{I_i} \right)^{\Sigma}.$$

messbar und somit  $P$  ein stochastischer Kern von  $(\mathcal{V}, \mathfrak{D}_{\mathcal{V}})$  nach  $(\mathcal{V}, \mathfrak{D}_{\mathcal{V}})$  ist.

**2.32. Definition.** Ein stochastischer Kern  $P$  der soeben eingeführten Art heißt *Fragmentierungskern auf  $\mathcal{V}$*  und  $\{Q_I, I \subset [0, 1] \text{ offenes Intervall}\}$  die  *$P$  induzierende Familie*.

Für jedes  $I = (a, b)$ ,  $0 \leq a < b \leq 1$ , sei die affine Funktion  $g_I : [0, 1] \rightarrow I$  definiert durch

$$g_I(x) := a + x(b - a).$$

Wir setzen  $g_{\emptyset}(x) := 0$  für alle  $x \in [0, 1]$ .

**2.33. Definition.** Eine Intervall-Fragmentierung  $F(\cdot) = (F(t), t \geq 0)$  heißt *selbstähnlich mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$* , falls gilt:

- (1)  $F(\cdot)$  ist ein zeitlich homogener Markov-Prozess.
- (2)  $F(0) = (0, 1)$  fast sicher.
- (3)  $F(\cdot)$  ist stetig in Wahrscheinlichkeit.
- (4)  $F(\cdot)$  erfüllt die *Fragmentierungseigenschaft*, d.h. die Halbgruppe  $(P^t(\cdot, \cdot))_{t \geq 0}$  der  $t$ -Schritt-Übergangskerne besteht aus Fragmentierungskernen auf  $\mathcal{V}$ , wobei  $\{Q_I^t, I \subset [0, 1] \text{ offenes Intervall}\}$  die  $P^t$  induzierende Familie bezeichne.
- (5)  $F(\cdot)$  erfüllt folgende *Skalierungseigenschaft*: Für  $I = (a, b)$ ,  $0 \leq a \leq b \leq 1$  und  $t \geq 0$  gilt  $Q_I^t(\cdot) = \left( Q_{(0,1)}^{(b-a)^{\alpha}t}(\cdot) \right)^{g_I}$ .

Im Falle  $\alpha = 0$  heißt  $F(\cdot)$  *homogene Intervall-Fragmentierung*.

**2.34. Bemerkungen.** (a) Die Fragmentierungseigenschaft der Intervall-Fragmentierungen garantiert, dass disjunkte Intervalle unabhängig voneinander zerlegt werden.

(b) Die Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft lassen sich zusammen



auch folgendermaßen umschreiben: Für  $r, t \geq 0$  entspricht die bedingte Verteilung von  $F(t+r)$  gegeben  $F(t) = V = \sum_{k \geq 1} I_k \in \mathcal{V}$  der Verteilung von

$$X_r := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} g_{I_k} \circ F^{(k)}(r|I_k|^\alpha).$$

Dabei sei  $F^{(1)}(\cdot), F^{(2)}(\cdot), \dots$  eine Folge stochastisch unabhängiger Kopien von  $F(\cdot)$ .

(c) Die Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft induzieren, dass die Verteilung der weiteren Fragmentierung eines Intervalls ausschließlich von der Länge des Intervalls abhängt.

(d) Gemäß Teil (b) legen die eindimensionalen Randverteilungen die Verteilung von  $F(\cdot)$  fest.

**2.35. Definition.**  $\mathbb{P}_V$  bezeichnet die Verteilung eines Fragmentierungsprozesses, der von einer beliebigen offenen Menge  $V \in \mathcal{V}$  startet, d.h. genauer - bezogen auf die Situation in Bemerkung 2.34 (b) -

$$\mathbb{P}_V(F(r) \in \cdot) := \mathbb{P}(F(t+r) \in \cdot | F(t) = V) = \mathbb{P}(X_r \in \cdot)$$

für  $r, t \geq 0$ .

Wie bei den  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen wollen wir auch hier zu gegebener Intervall-Fragmentierung  $F(\cdot) = (F(t), t \geq 0)$  eine càdlàg-Version  $(F(t+), t \geq 0)$  konstruieren. Wir definieren

$$F(t+) := \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap (t, \infty)} F(s)$$

für  $t \geq 0$  und behaupten

**2.36. Proposition.**  $(F(t+), t \geq 0)$  ist eine càdlàg-Version von  $F(\cdot)$ .

BEWEIS: Nach Definition der Intervall-Fragmentierung  $F(\cdot)$  existiert eine Nullmenge  $N \in \mathfrak{A}$ , so dass die Pfade  $\mathbb{Q}^+ \ni t \mapsto F(t)(\omega)$  für alle  $\omega \in N^c$  monoton fallend sind. Dies garantiert die fallende Monotonie der Pfade  $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto F(t+)(\omega)$  für alle  $\omega \in N^c$ .

Seien nun  $t \geq 0$  und  $\omega \in N^c$  fest, aber beliebig. Zum Nachweis der rechtsseitigen Stetigkeit notieren wir

$$F(t+) \supset \lim_{s \downarrow t} F(s+)(\omega) =: V \in \mathcal{V},$$

wobei der Grenzwert gemäß Bemerkung 2.25 (b) existiert. Aus  $F(s)(\omega) \subset V$  für  $s \in \mathbb{Q} \cap (t, \infty)$  folgt  $F(t+)(\omega) \subset V$ . Da gleichzeitig  $F(t+)(\omega) \supset V$  gilt, erhalten wir  $F(t+)(\omega) = V$  und somit die rechtsseitige Stetigkeit. Die Existenz linksseitiger Limiten ist ebenfalls mit Bemerkung 2.25 (b) und der Monotonie auf  $N^c$  sichergestellt. Wie im Beweis zur Proposition 2.19 folgt unter Beachtung der Stetigkeit von  $F(\cdot)$  und Bemerkung 2.25 (b), dass  $(F(t+), t \geq 0)$  eine Version von  $F(\cdot)$  ist.  $\square$

Von nun an betrachten wir nur noch càdlàg-Versionen mit ausschließlich (fast sicher) monoton fallenden Pfaden.

**2.37. Bemerkungen.** (a) In diesem Fall impliziert Lemma 2.30 die Äquivalenz von Bedingung (3) aus Definition 2.33 und der Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit von  $s \circ F(\cdot)$ .

(b) Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit und Monotonie von  $(F(t+), t \geq 0)$  gewährleisten die fast sichere Stetigkeit für jedes feste  $t \geq 0$ .

Wir beschränken uns außerdem auf nicht-triviale Intervall-Fragmentierungen  $F(\cdot)$ , d.h.  $F(\cdot) \not\equiv (0, 1)$  mit positiver Wahrscheinlichkeit. Wie bei den selbstähnlichen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen ist auch hier das Grenzverhalten explizit beschreibbar.

**2.38. Proposition.** *Sei  $F(\cdot) = (F(t), t \geq 0)$  eine nicht-triviale selbstähnliche Intervall-Fragmentierung mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann konvergiert  $F(t)$  fast sicher gegen  $\emptyset$  für  $t \rightarrow \infty$ .*

BEWEIS: Zunächst bestehen folgende Äquivalenzbeziehungen:

$F(\cdot) \not\equiv (0, 1)$  mit positiver Wahrscheinlichkeit

$\Leftrightarrow s_t := P^t((0, 1), (0, 1)) < 1$  für alle  $t > 0$  (sonst wäre  $(s_{nt}) = (s_t)^n = 1$  für ein  $t > 0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  und somit  $F(\cdot) \equiv (0, 1)$  fast sicher wegen der Monotonie und der càdlàg-Eigenschaft)

$\Leftrightarrow F(\cdot) \not\equiv (0, 1)$  fast sicher

Die Messbarkeit der im Folgenden betrachteten Mengen wird durch die Stetigkeit der Abbildung  $s$  sicher gestellt.

Wir kommen jetzt zum eigentlichen Teil des Beweises. Für alle  $x \in (0, 1)$  und  $t \geq 0$  bezeichnen wir mit  $I_x(t)$  das Intervall der Intervallzerlegung von  $F(t)$ , das das Element  $x$  enthält, falls  $x \in F(t)$  gilt, andernfalls setzen wir  $I_x(t) = \emptyset$ . Es sei  $\epsilon \in (0, 1)$  beliebig. Wie gerade gezeigt, gilt  $\mathbb{P}(F(t) = (0, 1)) < 1$  für alle  $t > 0$ . Für  $t_1 > 0$  und  $x \in (0, 1)$  haben wir damit  $\mathbb{P}(|I_x(t_1)| < 1) > 0$ . Es existiert also ein  $0 < \epsilon_0 < 1$  mit  $\mathbb{P}(|I_x(t_1)| < \epsilon_0) \geq \gamma > 0$  für alle  $x \in (0, 1)$ . Wir fixieren ein beliebiges  $x \in (0, 1)$  und setzen  $y := g_{I_x(t_1)}^{-1}(x)$ . Es gilt insbesondere  $\mathbb{P}(|I_y(t_1)| < \epsilon_0) \geq \gamma$ . Wir definieren

$$t_2 := \frac{t_1}{\min\{\epsilon_0^{2\alpha}, \epsilon_0^\alpha\}}.$$

Aufgrund von Eigenschaft (5) aus Definition 2.33 und der Monotonie bei Intervall-Fragmentierungen gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(|I_x(t_1 + t_2)| < \epsilon_0^2) \\ \geq & \mathbb{P}(|I_x(t_1)| < \epsilon_0, |I_x(t_1 + t_2)| < \epsilon_0^2) \\ = & \int_{[\epsilon_0^2, \epsilon_0)} \mathbb{P}(|I_x(t_1 + t_2)| < \epsilon_0^2 \mid |I_x(t_1)| = v) \mathbb{P}(|I_x(t_1)| \in dv) + \mathbb{P}(|I_x(t_1)| < \epsilon_0^2) \\ = & \int_{[\epsilon_0^2, \epsilon_0)} \mathbb{P}\left(|I_y(t_2 v^\alpha)| < \frac{\epsilon_0^2}{v}\right) \mathbb{P}(|I_x(t_1)| \in dv) + \mathbb{P}(|I_x(t_1)| < \epsilon_0^2) \\ \geq & \int_{[\epsilon_0^2, \epsilon_0)} \mathbb{P}(|I_y(t_1)| < \epsilon_0) \mathbb{P}(|I_x(t_1)| \in dv) + \mathbb{P}(|I_x(t_1)| < \epsilon_0^2) \\ = & \mathbb{P}(|I_x(t_1)| \in [\epsilon_0^2, \epsilon_0)) \mathbb{P}(|I_y(t_1)| < \epsilon_0) + \mathbb{P}(|I_x(t_1)| < \epsilon_0^2) \\ \geq & \mathbb{P}(|I_x(t_1)| < \epsilon_0) \mathbb{P}(|I_y(t_1)| < \epsilon_0) \geq \gamma^2 > 0. \end{aligned}$$

Wir können die Argumentation induktiv fortsetzen, wobei  $t_i$  durch

$$t_i := \frac{t_1}{\min\{\epsilon_0^{i\alpha}, \epsilon_0^{(i-1)\alpha}\}}, \quad i \geq 2,$$

definiert sei, so dass wir

$$\mathbb{P}\left(\left|I_x\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)\right| < \epsilon_0^n\right) \geq \gamma^n$$

für  $n \geq 1$  erhalten. Wählen wir  $n^* \in \mathbb{N}$  mit  $\epsilon_0^{n^*} < \epsilon$  und setzen

$$t^* := \sum_{i=1}^{n^*} t_i < \infty,$$

so gilt demnach

$$\mathbb{P}(|I_x(t^*)| < \epsilon) \geq \gamma^{n^*} > 0.$$

Ebenso können wir

$$\mathbb{P}(|I_y(t^*)| < \epsilon) \geq \gamma^{n^*}$$

schließen. Definieren wir

$$t_1^* := \frac{t^*}{\min\{\epsilon_0^\alpha, 1\}},$$

so liefert eine erneute Berücksichtigung von Eigenschaft (5) und der Monotonie

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(|I_x(t^* + t_1^*)| \geq \epsilon) \\ = & \mathbb{P}(|I_x(t^* + t_1^*)| \geq \epsilon, |I_x(t^*)| \geq \epsilon) \\ = & \int_{\epsilon}^1 \mathbb{P}(|I_x(t^* + t_1^*)| \geq \epsilon \mid |I_x(t^*)| = v) \mathbb{P}(|I_x(t^*)| \in dv) \\ = & \int_{\epsilon}^1 \mathbb{P}\left(|I_y(t_1^* v^\alpha)| \geq \frac{\epsilon}{v}\right) \mathbb{P}(|I_x(t^*)| \in dv) \\ \leq & \int_{\epsilon}^1 \mathbb{P}(|I_y(t^*)| \geq \epsilon) \mathbb{P}(|I_x(t^*)| \in dv) \\ = & \mathbb{P}(|I_x(t^*)| \geq \epsilon) \mathbb{P}(|I_y(t^*)| \geq \epsilon) \leq (1 - \gamma^{n^*})^2. \end{aligned}$$

Induktiv fortgesetzt ergibt sich

$$\mathbb{P}(|I_x(t^* + nt_1^*)| \geq \epsilon) \leq (1 - \gamma^{n^*})^{n+1}$$

für  $n \geq 1$ , also  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|I_x(t)| \geq \epsilon) = 0$ . Da  $\epsilon \in (0, 1)$  beliebig gewählt war, impliziert dies  $|I_x(t)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$  bzw.  $I_x(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \emptyset$  für  $t \rightarrow \infty$ . Dieser Zusammenhang besteht für alle  $x \in (0, 1)$ . Wegen

$$F(t) = \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)} I_x(t)$$

für alle  $t \geq 0$  folgt  $F(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \emptyset$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Sei nun  $t_n \in (0, \infty)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_n \uparrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann existiert nach einem Resultat aus der Wahrscheinlichkeitstheorie (vergleiche z.B. [Als1], S. 170) eine Teilfolge  $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $F(t_{n_k}) \rightarrow \emptyset$  fast sicher für  $k \rightarrow \infty$ . Wegen  $F(s) \subset F(t)$  für  $s \leq t$  folgt mit Bemerkung 2.25 (b)  $F(t_n) \rightarrow \emptyset$  fast sicher für  $n \rightarrow \infty$  und damit die Behauptung.  $\square$

Zum Abschluss dieses Kapitels weisen wir wiederum die Feller-Eigenschaft nach. Hierbei ist erwähnenswert, dass sich die Gültigkeit nicht auf homogene Intervall-Fragmentierungen beschränkt, sondern auf sämtliche selbstähnliche Intervall-Fragmentierungen erstreckt. Diese Eigenschaft ist - wie wir noch sehen werden - ein Vorteil der Intervall-Fragmentierungen gegenüber den  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen bei der Analyse von nichthomogenen Fragmentierungen.

**2.39. Satz (Feller-Eigenschaft).** *Die Familie  $(P^t)_{t \geq 0}$  der  $t$ -Schritt-Übergangskerne einer selbstähnlichen Intervall-Fragmentierung  $F(\cdot)$  mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$  erfüllt die Feller-Eigenschaft. Das heißt: Konvergiert eine Folge  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Elementen aus  $\mathcal{V}$  gegen  $V \in \mathcal{V}$  für  $n \rightarrow \infty$ , so gilt*

- (1)  $P^t(V_n, \cdot)$  konvergiert schwach gegen  $P^t(V, \cdot)$  für  $n \rightarrow \infty$  und
- (2)  $P^t(V, \cdot)$  konvergiert schwach gegen  $\delta_V$  für  $t \rightarrow 0$ .

Eine für den Nachweis von Satz 2.39 nützliche Aussage liefert das folgende Lemma, dessen Beweis im Anhang im Anschluss an diesen Abschnitt zu finden ist.

**2.40. Lemma.** *Gegeben  $U, V \in \mathcal{V}$  mit den Intervallzerlegungen  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , gilt*

$$d_{\mathcal{V}}(U, V) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} d_{\mathcal{V}}(I_k, J_k).$$

BEWEIS VON SATZ 2.39: Zu (1): Sei  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{V}$  mit  $V_n \rightarrow V$  für  $n \rightarrow \infty$ . Gemäß Lemma 2.29 wählen wir die Indizierungen der Intervallzerlegungen  $(I_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$  und  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $V_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  bzw. von  $V$  so, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,i} = I_i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} I_{n,i} = \emptyset \quad \text{gleichmäßig in } n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Wir schreiben  $g_{n,i}$  für  $g_{I_{n,i}}$ ,  $n \geq 1$ , und  $g_i$  für  $g_{I_i}$ . Für festes, aber beliebiges  $t \geq 0$  definieren wir  $t_{n,i} := t|I_{n,i}|^\alpha$  und  $t_i := t|I_i|^\alpha$ . Sei  $F_1(\cdot), F_2(\cdot), \dots$  eine Folge stochastisch unabhängiger Kopien von  $F(\cdot)$  und

$$Y_n := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_{n,i} \circ F_i(t_{n,i})$$

sowie

$$Y := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i \circ F_i(t_i).$$

Gemäß der Gleichung (2) gilt  $|I_{n,i}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |I_i|$  und daher  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{n,i} = t_i$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Im Falle  $t_i < \infty$  erlaubt dies unter Beachtung von Bemerkung 2.37 (b) den Schluss

$$F_i(t_{n,i}) \longrightarrow F_i(t_i) \quad \text{fast sicher für } n \rightarrow \infty.$$

Wir fixieren ein beliebiges  $i \in \mathbb{N}$ . Wir behaupten, dass  $g_{n,i} : (\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}}) \rightarrow (\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$  gleichmäßig gegen  $g_i : (\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}}) \rightarrow (\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert. Dabei sei  $g_i(U) := \bigcup_{x \in U} g_i(x)$  für jedes  $U \in \mathcal{V}$ . Es sei  $U$  eine beliebige offene Teilmenge von  $[0, 1]$  mit Intervallzerlegung  $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Mit Lemma 2.40 ergibt sich

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{V}}(g_{n,i}(U), g_i(U)) &= d_{\mathcal{V}}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} g_{n,i}(J_k), \bigcup_{k \in \mathbb{N}} g_i(J_k)\right) \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \{d_{\mathcal{V}}(g_{n,i}(J_k), g_i(J_k))\} \\ &\leq d_{\mathcal{V}}(g_{n,i}((0, 1)), g_i((0, 1))) = d_{\mathcal{V}}(I_{n,i}, I_i), \end{aligned}$$

was bei Beachtung von Gleichung (2) die gleichmäßige Konvergenz zeigt. Ferner ist offensichtlich  $g_i : (\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}}) \rightarrow (\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$  stetig. Unter Zuhilfenahme der Abschätzung

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{V}}(g_{n,i} \circ F_i(t_{n,i}), g_i \circ F_i(t_i)) &\leq d_{\mathcal{V}}(g_{n,i} \circ F_i(t_{n,i}), g_i \circ F_i(t_{n,i})) \\ &\quad + d_{\mathcal{V}}(g_i \circ F_i(t_{n,i}), g_i \circ F_i(t_i)) \end{aligned}$$

können wir nun im Falle  $t_i < \infty$  folgern:

$$g_{n,i} \circ F_i(t_{n,i}) \longrightarrow g_i \circ F_i(t_i) \quad \text{fast sicher für } n \rightarrow \infty.$$

Diese Beziehung hat auch für  $t_i = \infty$  Bestand, da in diesem Fall  $I_i = \emptyset$  und  $\alpha < 0$  gelten muss.

Für fast alle  $\omega \in \Omega$  konvergiert gemäß der Gleichung (3)  $g_{n,i} \circ F_i(t_{n,i})(\omega)$  gegen  $\emptyset$  für  $i \rightarrow \infty$  und zwar gleichmäßig bezüglich  $n \in \mathbb{N}$ .

Damit sind die Voraussetzungen für Lemma 2.28 erfüllt und wir erhalten

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_{n,i} \circ F_i(t_{n,i}) \longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i \circ F_i(t_i) \quad \text{fast sicher,}$$

d.h.  $Y_n \longrightarrow Y$  fast sicher für  $n \rightarrow \infty$ .

Nach Bemerkung 2.34 (b) und gemäß Definition 2.35 haben  $Y_n$  und  $Y$  die Verteilung  $P^t(V_n, \cdot)$  für  $n \in \mathbb{N}$  bzw.  $P^t(V, \cdot)$ . Somit konvergiert  $P^t(V_n, \cdot)$  insbesondere

schwach gegen  $P^t(V, \cdot)$  für  $n \rightarrow \infty$ , was die erste Behauptung beweist.

Zu (2): Die zweite Behauptung ist das Ergebnis analogen Vorgehens. Seien  $V, g_i$  und  $F_1, F_2, \dots$  definiert wie in Teil (1).  $Y_t := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i \circ F_i(t|I_i|^\alpha)$  besitzt nach Bemerkung 2.34 (b) und gemäß Definition 2.35 die Verteilung  $P^t(V, \cdot)$  für  $t \geq 0$  und  $Y := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i \circ F_i(0)$  die Verteilung  $\delta_V$ . Wie beim Beweis der ersten Behauptung kann mit Hilfe des Lemmas 2.28 gezeigt werden, dass  $Y_t$  in Wahrscheinlichkeit gegen  $Y$  konvergiert für  $t \rightarrow 0$ . Dies belegt die zweite Behauptung. Dabei ist zu beachten, dass  $t|I_i|^\alpha < \infty$  für  $i \in \mathbb{N}$  unterstellt werden kann, da ansonsten  $F_i(t|I_i|^\alpha) = \emptyset$  gemäß Proposition 2.38 gelten würde.  $\square$

Die Feller-Eigenschaft und die rechtsseitige Stetigkeit implizieren die Gültigkeit der starken Markov-Eigenschaft bei selbstähnlichen Intervall-Fragmentierungen, also die Ausweitung der Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft auf Stoppzeiten. Im 5. Kapitel werden wir eine andere Erweiterung vorstellen, die bei der Analyse der Intervall-Fragmentierungen eine zentrale Rolle einnehmen wird.

## 2.4 Anhang

Um den inhaltlichen Fluss aufrecht zu erhalten, haben wir auf den Beweis einiger Behauptungen verzichtet. Wir wollen an dieser Stelle nun das Versäumte nachholen. Wir beginnen mit der Beziehung zwischen  $d_{\mathcal{V}}$  und der Hausdorff-Metrik.

BEWEIS VON BEMERKUNG 2.25 (a): Zu zeigen ist für  $U, V \in \mathcal{V}$

$$d_{\mathcal{V}}(U, V) = \max \left\{ \sup_{x \in U^c} d(x, V^c), \sup_{y \in V^c} d(y, U^c) \right\}$$

mit  $d(x, V^c) = \inf_{v \in V^c} \{ |x - v| \}$ . Für  $U, V \in \mathcal{V}$  gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{V}}(U, V) &= \|\chi_U - \chi_V\|_{\infty} \\ &= \max \left\{ \underbrace{\sup_{x \in V \cap U^c} \{ |\chi_U(x) - \chi_V(x)| \}}_{=: d_1}, \underbrace{\sup_{x \in V^c \cap U} \{ |\chi_U(x) - \chi_V(x)| \}}_{=: d_2}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\sup_{x \in V^c \cap U^c} \{ |\chi_U(x) - \chi_V(x)| \}}_{=: d_3}, \underbrace{\sup_{x \in V \cap U} \{ |\chi_U(x) - \chi_V(x)| \}}_{=: d_4} \right\}. \end{aligned}$$

Gemäß der Definitionen von  $\chi$  und  $d$  erhalten wir

$$\begin{aligned} d_1 &= \sup_{x \in U^c} \chi_V(x) = \sup_{x \in U^c} d(x, V^c), \\ d_2 &= \sup_{x \in V^c} \chi_U(x) = \sup_{x \in V^c} d(x, U^c), \\ d_3 &= 0. \end{aligned}$$

Zur Abschätzung von  $d_4$  wählen wir ein  $z \in U \cap V$  mit

$$|\chi_U(z) - \chi_V(z)| = \sup_{x \in U \cap V} |\chi_U(x) - \chi_V(x)|.$$

Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\chi_U(z) \geq \chi_V(z)$ . Zu beachten ist, dass  $z - \chi_V(z) \in V^c$  oder  $z + \chi_V(z) \in V^c$ . Es gilt

$$\begin{aligned} d_4 &= \left| \inf_{x \in U^c} \{ |z - x| \} - \chi_V(z) \right| \\ &\leq \inf_{x \in U^c} \{ |z - x| - \chi_V(z) \} \\ &= \min \left\{ \inf_{x \in U^c} \{ |z + \chi_V(z) - x| \}, \inf_{x \in U^c} \{ |z - \chi_V(z) - x| \} \right\} \\ &\leq \sup_{y \in V^c} \{ \chi_U(y) \} = d_2. \end{aligned}$$



Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{V}}(U, V) &= \max\{d_1, d_2\} \\ &= \max\left\{\sup_{x \in U^c} d(x, V^c), \sup_{y \in V^c} d(y, U^c)\right\}, \end{aligned}$$

wie behauptet.  $\square$

Die Eindeutigkeit der Intervallzerlegungen der offenen Teilmengen von  $[0, 1]$  ist für die Konstruktion der Intervall-Fragmentierungen von entscheidender Bedeutung. Aus diesem Grund wollen wir den Beweis von Lemma 2.26 nicht vorenthalten.

BEWEIS VON LEMMA 2.26: Wir zeigen zunächst, dass eine Intervallzerlegung für jedes  $V \in \mathcal{V}$  existiert und widmen uns dann dem Nachweis der Eindeutigkeit.

EXISTENZ: Für alle  $x \in \mathbb{Q} \cap V$  setzen wir

$$I_x := (x - \epsilon_x, x + \delta_x),$$

wobei

$$\epsilon_x := \sup\{\epsilon > 0 : (x - \epsilon, x] \subset V\},$$

$$\delta_x := \sup\{\delta > 0 : [x, x + \delta) \subset V\}.$$

Offensichtlich gilt  $\bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap V} I_x \subset V$ . Für die umgekehrte Inklusion wählen wir ein  $y \in V$ . Da  $V$  offen ist, existiert ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $J_y := (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset V$ . Wegen der Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  bezüglich  $\mathbb{R}$  existiert ein  $x \in \mathbb{Q} \cap J_y$ . Die Definition von  $I_x$  liefert  $J_y \subset I_x$ , d.h.  $V \subset \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap V} I_x$  und somit  $V = \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap V} I_x$ .

Es ist noch zu zeigen, dass entweder  $I_x \cap I_y = \emptyset$  oder  $I_x = I_y$  für  $x, y \in \mathbb{Q} \cap V$  gilt. Dies ist erfüllt, denn für  $I_x \cap I_y \neq \emptyset$  existiert ein  $z \in I_x \cap I_y \cap \mathbb{Q}$ , und nach Definition haben wir  $I_x = I_z = I_y$ .

EINDEUTIGKEIT: Aus der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen folgt, dass eine Intervallzerlegung aus höchstens abzählbar unendlich vielen nichtleeren Intervallen bestehen kann. Für ein  $V \in \mathcal{V}$  betrachten wir die Intervallzerlegungen  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Nehmen wir an, dass diese nicht übereinstimmen, so muss ein Randpunkt eines Intervalls der einen Intervallzerlegung in einem Intervall der anderen liegen, wie leicht zu sehen ist. Es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $b \in J_k$  für

das Intervall  $I_k = (a, b)$ ,  $0 \leq a < b < 1$ . Dies impliziert zugleich  $b \in V$ , d.h.  $b$  liegt in einem Intervall  $I_l$ , wobei  $I_k \cap I_l = \emptyset$ . Da  $I_l$  offen ist, existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $(b - \epsilon, b + \epsilon) \subset I_l$ . Aus  $(b - \epsilon, b + \epsilon) \cap I_k \neq \emptyset$  folgt schließlich  $I_k \cap I_l \neq \emptyset$ , d.h. ein Widerspruch. Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Wir liefern jetzt die Beweise der Lemmata 2.28 und 2.29 nach, die wichtige Hilfen bei der Konvergenzuntersuchung von Intervallzerlegungen waren.

BEWEIS VON LEMMA 2.28: Aus den Annahmen folgt, dass die offenen Mengen  $V_1, V_2, \dots$  disjunkt sind und gegen  $\emptyset$  konvergieren für  $n \rightarrow \infty$ . Wir setzen

$$W_n := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_{n,i}, \quad W := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i.$$

Es gilt wegen der Disjunktheit der betrachteten Mengen

$$\chi_{W_n} = \sum_{i \geq 1} \chi_{V_{n,i}}, \quad \chi_W = \sum_{i \geq 1} \chi_{V_i}.$$

Die Behauptung folgt schließlich aus der Ungleichung

$$\|\chi_{W_n} - \chi_W\|_\infty \leq \sum_{i=1}^k \|\chi_{V_{n,i}} - \chi_{V_i}\|_\infty + \sup_{i \geq k+1} \|\chi_{V_{n,i}}\|_\infty + \sup_{i \geq k+1} \|\chi_{V_i}\|_\infty.$$

Mit wachsendem  $k$  werden die beiden letzten Terme und bei fixiertem  $k$  mit wachsendem  $n$  wird der erste Term beliebig klein.  $\square$

BEWEIS VON LEMMA 2.29: Sei  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  die eindeutige Intervallzerlegung von  $V$  mit  $|I_1| \geq |I_2| \geq \dots$ . Es bezeichne  $m_i$  den Mittelpunkt von  $I_i$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$  mit  $I_i \neq \emptyset$ . Wir setzen  $d_n := d_V(V_n, V)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Nach Voraussetzung gilt  $d_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$i(n) := \max\{i \in \mathbb{N} : |I_i| > 4d_n\}.$$

Für jedes  $i \leq i(n)$  gilt dann  $\chi_V(m_i) > 2d_n$  und damit

$$\chi_{V_n}(m_i) = \chi_{V_n}(m_i) - \chi_V(m_i) + \chi_V(m_i) > d_n,$$

so dass wir  $m_i \in V_n$  erhalten. Mit  $I_{n,i}$  bezeichnen wir für  $i \leq i(n)$  das Intervall der Intervallzerlegung von  $V_n$ , das  $m_i$  enthält. Es gilt

$$|I_{n,i}| > 2d_n \quad \text{für } i \leq i(n), \tag{4}$$

da ansonsten  $\chi_V(m_i) - \chi_{V_n}(m_i) > d_n$ .

Wir behaupten ferner

$$d_V(I_i, I_{n,i}) \leq d_n \quad \text{für } i \leq i(n). \quad (5)$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $I_{n,i} = (a, b) \subset I_i = (a', b')$ ,  $0 \leq a, a' < b, b' \leq 1$ . Dabei ist  $m_i \in I_{n,i} \cap I_i$  zu beachten. Im Falle  $d_V(I_i, I_{n,i}) > d_n$  gilt entweder  $b' - b > d_n$  oder  $a - a' > d_n$ , d.h.

$$\begin{aligned} d_V(V, V_n) &\geq \max\{\chi_V(b') - \chi_{V_n}(b), \chi_V(a') - \chi_{V_n}(a)\} \\ &> d_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Dies ist ein Widerspruch zur Definition von  $d_n$ . Bei der letzten Ungleichung ist  $a' \leq a < m_i$  und  $b' \geq b > m_i$  zu berücksichtigen. Wir haben (5) gezeigt.

Wir können nun

$$I_{n,i} \cap I_{n,j} = \emptyset \quad \text{für } i, j \leq i(n) \text{ und } i \neq j \quad (7)$$

folgern, denn:  $I_{n,i} \cap I_{n,j} \neq \emptyset$  impliziert  $I_{n,i} = I_{n,j}$  und mit (5) ergibt sich

$$d_V(I_i, I_j) \leq d_V(I_i, I_{n,i}) + d_V(I_j, I_{n,j}) \leq 2d_n.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu

$$d_V(I_i, I_j) \geq \chi_{I_i}(m_i) - \chi_{I_j}(m_i) = \chi_{I_i}(m_i) > 2d_n.$$

Es sei jetzt  $J$  ein Intervall der Intervallzerlegung von  $V_n$  mit  $|J| > 6d_n$  und Mittelpunkt  $m$ . Wir behaupten  $J = I_{n,i}$  für ein  $i \leq i(n)$ . Wegen  $\chi_{V_n}(m) > 3d_n$  gilt  $\chi_V(m) > 2d_n$ , also  $m \in V$ . Das Intervall  $I_i$  der Intervallzerlegung von  $V$ , das  $m$  enthält, hat die Länge  $|I_i| > 4d_n$ , so dass  $i \leq i(n)$  folgt. Wie oben können wir dann  $d_V(I_i, J) \leq d_n$  zeigen und gemäß Ungleichung (5)

$$d_V(J, I_{n,i}) \leq d_V(I_i, J) + d_V(I_i, I_{n,i}) \leq 2d_n$$

schließen. Mit (4) und (7) folgt  $J = I_{n,i}$ .

Aufbauend auf dem bisher Gezeigten werden wir die behaupteten Konvergenzen nachweisen. Für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir die Intervallzerlegung  $(I_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$  von  $V_n$ , wobei die Folge  $(I_{n,i})_{i > i(n)}$  der Länge nach absteigend geordnet sei. Beschränken wir uns auf  $I_i \neq \emptyset$ , so gilt

$$d_V(I_i, I_{n,i}) \leq d_n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gemäß (5) und wegen  $i(n) \rightarrow \max\{j \in \mathbb{N} : I_j \neq \emptyset\}$  für  $n \rightarrow \infty$ . Im Falle  $I_i = \emptyset$  haben wir  $i(n) < i$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Wie gezeigt, bedingt dies  $|I_{n,i}| \leq 6d_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ist der erste Teil bewiesen.

Zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz fixieren wir ein beliebiges  $\epsilon > 0$  und wählen  $\mathbb{N} \ni i > \frac{3}{\epsilon}$ . Aus  $|I_1| \geq |I_2| \geq \dots$  und  $|I_1| + |I_2| + \dots \leq 1$  folgt  $|I_i| < \frac{\epsilon}{3}$  und  $d_V(I_i, \emptyset) < \frac{\epsilon}{6}$ . Für  $d_n < \frac{\epsilon}{3}$  und  $i \leq i(n)$  gilt gemäß Ungleichung (5)

$$d_V(I_{n,i}, \emptyset) \leq d_V(I_i, I_{n,i}) + d_V(I_i, \emptyset) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Für  $d_n < \frac{\epsilon}{3}$  und  $i > i(n)$  haben wir  $|I_{n,i}| \leq 6d_n$ , d.h.  $d_V(I_{n,i}, \emptyset) \leq 3d_n < \epsilon$ . Zu untersuchen bleibt der Fall  $d_n \geq \frac{\epsilon}{3}$ . Weil  $|I_i| > 4d_n \geq 4\frac{\epsilon}{3}$  für  $i \leq i(n)$  gilt, erhalten wir  $i(n) \leq \frac{3}{4\epsilon}$  und somit  $i - i(n) > \frac{9}{4\epsilon}$ . Dies besagt, dass es mehr als  $\frac{9}{4\epsilon}$  Intervalle der Intervallzerlegung von  $V_n$  mit einer Länge von mindestens  $|I_{n,i}|$  geben muss, d.h.  $|I_{n,i}| \leq \frac{4\epsilon}{9}$  und damit  $d_V(I_{n,i}, \emptyset) < \frac{2\epsilon}{9}$ . Insgesamt bestätigt dies die gleichmäßige Konvergenz.  $\square$

Beim Verifizieren der Feller-Eigenschaft für Intervall-Fragmentierungen hat uns Lemma 2.40 einen wertvollen Dienst geleistet. Wir beschließen den Anhang mit dem

BEWEIS VON LEMMA 2.40: Wegen der paarweisen Disjunktheit der Intervalle einer Intervallzerlegung gilt

$$\begin{aligned} d_V \left( \sum_{k \geq 1} I_k, \sum_{k \geq 1} J_k \right) &= \sup_{x \in [0,1]} \left\{ \left| \sum_{k \geq 1} \chi_{I_k}(x) - \sum_{k \geq 1} \chi_{J_k}(x) \right| \right\} \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \left\{ \left| \sum_{k \geq 1} \underbrace{\chi_{I_k}(x) - \chi_{J_k}(x)}_{=: d_k(x)} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Es bestehen folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} d_k(x) > 0 &\Rightarrow \chi_{I_k}(x) > 0 \Rightarrow x \in I_k \Rightarrow x \notin I_l \quad \forall l \neq k \\ &\Rightarrow d_l(x) \leq 0 \quad \forall l \neq k \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_k(x) < 0 &\Rightarrow \chi_{J_k}(x) > 0 \Rightarrow x \in J_k \Rightarrow x \notin J_l \quad \forall l \neq k \\ &\Rightarrow d_l(x) \geq 0 \quad \forall l \neq k. \end{aligned}$$

Also existiert für alle  $x \in [0, 1]$  höchstens ein  $k$  bzw.  $l \in \mathbb{N}$  mit  $d_k(x) > 0$  bzw.  $d_l(x) < 0$ . Es folgt - wie behauptet -

$$d_{\mathcal{V}} \left( \sum_{k \geq 1} I_k, \sum_{k \geq 1} J_k \right) \leq \sup_{x \in [0, 1]} \{ \max_{k \in \mathbb{N}} |d_k(x)| \} = \sup_{k \in \mathbb{N}} d_{\mathcal{V}}(I_k, J_k).$$

□

# 3. Verhältnis der Fragmentierungen zueinander

Wir haben in Kapitel 2 drei Typen von selbstähnlichen Fragmentierungen vorgestellt, die wir intuitiv aufgrund ihrer ähnlichen Konstruktion über Fragmentierungskerne als verwandt bezeichnen würden. Wir wollen in diesem Kapitel diese Vermutung in Gewissheit überführen. Bevor wir in den Abschnitten 3.2 und 3.3 die Möglichkeit der Typenumwandlung präzisieren, geben wir zunächst einen gleichermaßen kurzen wie partiellen Überblick über die Theorie der Austauschbarkeit.

## 3.1 Austauschbarkeit

Im Rahmen der  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen haben wir den Begriff der Austauschbarkeit eingeführt. Wie bereits angemerkt, wird die Austauschbarkeit der Schlüssel zu signifikanten Ergebnissen dieser Arbeit sein. Dafür wollen wir an dieser Stelle die aus der Theorie der Austauschbarkeit für uns relevanten Resultate vorstellen.

Eine Folge  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von Zufallsvariablen wird als austauschbar bezeichnet, falls für jede endliche Permutation  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gilt:

$$\mathbb{P}^{X_{\mathbb{N}}} := \mathbb{P}^{(X_1, X_2, \dots)} = \mathbb{P}^{(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots)} =: \mathbb{P}^{X_{\sigma(\mathbb{N})}}.$$

Der Satz von de Finetti besagt, dass jede austauschbare Folge von Zufallsvariablen stets eine Mischung aus Folgen identisch verteilter und stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen ist.

Um diese Aussage zu formalisieren, betrachten wir zunächst wie in [Als2] die (Bayessche) Situation, in der austauschbare Folgen in kanonischer Weise auftreten. Seien  $\Xi : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\Theta, \mathfrak{A}_{\Theta})$  und  $X_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{A})$ ,  $n \geq 1$ , Zufallsvariablen mit der Eigenschaft, dass  $X_{\mathbb{N}}$  bedingt unter  $\Xi = \theta$  eine Folge stochastisch unabhängiger jeweils  $W_{\theta}$ -verteilter Zufallsvariablen bildet, d.h. es gelte

$$\mathbb{P}^{X_{\mathbb{N}} | \Xi = \theta} = \bigotimes_{n \geq 1} \mathbb{P}^{X_n | \Xi = \theta} = W_{\theta}^{\infty}.$$

Sei  $\nu$  die Verteilung von  $\Xi$ . Für jede endliche Permutation  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  folgt

$$\mathbb{P}^{X_{\mathbb{N}}} = \int_{\Theta} \mathbb{P}^{X_{\mathbb{N}} | \Xi = \theta} \nu(d\theta) = \int_{\Theta} \bigotimes_{n \geq 1} \mathbb{P}^{X_n | \Xi = \theta} \nu(d\theta) = \int_{\Theta} \bigotimes_{n \geq 1} \mathbb{P}^{X_{\sigma(n)} | \Xi = \theta} \nu(d\theta) = \mathbb{P}^{X_{\sigma(\mathbb{N})}}.$$

Somit ist  $(X_n)_{n \geq 1}$  eine austauschbare Folge von Zufallsvariablen. Wir geben jetzt den Satz von de Finetti an.

**3.1. Satz (Satz von de Finetti).** *Ist  $(X_n)_{n \geq 1}$  eine austauschbare Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , so sind  $X_1, X_2, \dots$  bedingt unter  $\mathcal{T} := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{T}_n$ ,  $\mathcal{T}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$  für  $n \geq 1$ , stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Sind die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  ferner reellwertig, so existiert eine Zufallsvariable  $\Xi : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\Theta, \mathfrak{A}_\Theta)$  mit  $\mathbb{P}^\Xi := \nu$ , so dass  $X_1, X_2, \dots$  bedingt unter  $\Xi$  stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind.*

BEWEIS: Siehe [Als2], S. 172ff.

**3.2. Bemerkungen.** (a) Wir bezeichnen  $\Xi$  bzw.  $\nu$  als *Mischungs-Zufallsvariable* bzw. -Verteilung. Die Stimmigkeit der Bezeichnung offenbart sich, wenn wir berücksichtigen, dass die Verteilung einer austauschbaren Folge  $(X_n)_{n \geq 1}$  von Zufallsgrößen folgendermaßen beschrieben werden kann: Gemäß der Verteilung  $\nu$  erhalten wir ein  $\theta \in \Theta$  und wählen dann  $(X_n)_{n \geq 1}$  als Folge stochastisch unabhängiger jeweils  $W_\theta$ -verteilter Zufallsgrößen.

(b) Es ist möglich eine Zufallsvariable  $\Psi$  auf  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  durch  $\Psi(\omega) = W_{\Xi(\omega)}$  für  $\omega \in \Omega$  zu definieren. Wir bezeichnen  $\Psi$  als *mischendes Zufallsmaß*.

Als Nächstes wollen wir in Anlehnung an Aldous [Al1] dieses Resultat auf austauschbare Zufallspartitionen übertragen. In diesem Kontext kommt den sogenannten „*Paintbox-Prozessen*“ die tragende Rolle zu. Sei  $\mu$  eine Verteilung auf  $[0, 1]$  und  $(X_n)_{n \geq 1}$  eine Folge stochastisch unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen mit  $X_1 \stackrel{d}{=} \mu$ . Sei  $R$  die durch

$$\{i \in \mathbb{N} : X_i = x\}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

definierte Zufallspartition.  $R$  ist offensichtlich austauschbar und ihre Verteilung hängt außerdem nur von den Massepunkten der Verteilung  $\mu$  ab. Bezeichnet  $x_1, x_2, \dots$  die Folge der Massepunkte von  $\mu$  mit  $\mu(x_1) \geq \mu(x_2) \geq \dots$ , so setzen wir  $p_j := \mu(x_j)$  (wähle  $p_j = 0$ , falls  $\mu$  weniger als  $j$  Massepunkte hat). Wir definieren die Abbildung  $L : \mathcal{W}([0, 1]) \rightarrow S^\downarrow$  durch

$$L(\mu) := (p_j)_{j \geq 1} =: \tilde{p}.$$

Hierbei bezeichnet  $\mathcal{W}([0, 1])$  die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $[0, 1]$ .

**3.3. Definition.** Die soeben vorgestellte austauschbare Zufallspartition  $R$  heißt *Paintbox*( $\tilde{p}$ )-Prozess, falls  $L(\mu) = \tilde{p}$  gilt. Ihre Verteilung wird mit  $\mu_{\tilde{p}}$  bezeichnet.

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt unter Beibehaltung der obigen Notation

$$\Lambda^\downarrow(R) = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{x_j\}} X_k \right)_{j \geq 1} \longrightarrow (\mu(x_j))_{j \geq 1} \quad \text{fast sicher für } n \rightarrow \infty,$$

d.h. wir können festhalten:

**3.4. Lemma.** Gegeben ein *Paintbox*( $\tilde{p}$ )-Prozess  $R$ , existieren deren asymptotischen Frequenzen fast sicher, und es gilt  $\Lambda^\downarrow(R) = (p_1, p_2, \dots)$  fast sicher.

Analog zum Satz von de Finetti kann für austauschbare Zufallspartitionen nun folgende Aussage gemacht werden:

**3.5. Satz.** Sei  $R$  eine austauschbare Zufallspartition auf  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . Dann existiert eine  $S^\downarrow$ -wertige Zufallsvariable  $S$  mit  $\Lambda^\downarrow(R) = S$  fast sicher, und  $S$  bzw. dessen Verteilung  $\nu$  ist mischend in dem Sinne, dass die Verteilung von  $R$  durch

$$\mathbb{P}^R = \int_{S^\downarrow} \mu_s \nu(ds) \tag{8}$$

gegeben wird. Wir nennen  $R$  dann auch einen  $S$ -*Paintbox*-Prozess.

BEWEIS: Sei  $(Y_i)_{i \geq 1}$  eine Folge stochastisch unabhängiger jeweils auf  $(0, 1)$  gleichverteilter Zufallsgrößen, die zusätzlich stochastische Unabhängigkeit gegenüber  $R$  aufweisen. Außerhalb einer Nullmenge können wir  $Y_i(\omega) \neq Y_j(\omega)$  für  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i \neq j$ , annehmen. Wir definieren

$$J_i := \min \{j \in \mathbb{N} : i \text{ und } j \text{ liegen in demselben Block von } R\}$$

und  $Z_i := Y_{J_i}$  für  $i \geq 1$ . Damit ist  $R$  die Zufallspartition mit den Komponenten  $\{i : Z_i = z\}$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

Wir behaupten, dass  $Z_{\mathbb{N}} := (Z_i)_{i \geq 1}$  austauschbar ist. Wir haben  $Z_{\mathbb{N}} = g(Y_{\mathbb{N}}, R)$  für eine geeignete Funktion  $g : (0, 1)^{\mathbb{N}} \times \mathcal{P} \rightarrow (0, 1)^{\mathbb{N}}$  und  $Z_{\sigma(\mathbb{N})} = g(Y_{\sigma(\mathbb{N})}, \sigma(R))$ , wobei  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine beliebige endliche Permutation sei. Wegen der Austauschbarkeit und stochastischen Unabhängigkeit von  $Y_{\mathbb{N}}$  und  $R$  gilt  $(Y_{\sigma(\mathbb{N})}, \sigma(R)) \stackrel{d}{=} (Y_{\mathbb{N}}, R)$ , d.h.



$Z_{\mathbb{N}} \stackrel{d}{=} Z_{\sigma(\mathbb{N})}$ .  $Z_{\mathbb{N}}$  ist somit austauschbar.

Nach dem Satz von de Finetti bzw. Bemerkung 3.2 existiert dann ein mischen-  
des Zufallsmaß  $\Psi$  für  $(Z_i)_{i \geq 1}$ , d.h. bedingt unter  $\Psi = \xi$  sind  $Z_1, Z_2, \dots$  stochastisch  
unabhängig und identisch verteilt mit  $Z_1 \stackrel{d}{=} \xi$ . Bedingt unter  $\Psi = \xi$  hat  $R$  demnach  
die Paintbox-Verteilung  $\mu_{L(\xi)}$ . Setzen wir  $S := L(\Psi)$ , so erhalten wir Darstellung (8)  
und mit Lemma 3.4 die Identität  $\Lambda^\downarrow(R) = S$  fast sicher.  $\square$

Eine austauschbare Zufallspartition ist also stets eine Mischung aus Paintbox-  
Prozessen. Außerdem ist die fast sichere Existenz der asymptotischen Frequenzen  
gewährleistet. Als unmittelbare Konsequenz notieren wir noch:

**3.6. Korollar.** (a) *Die Verteilung einer austauschbaren Zufallspartition wird  
durch die Verteilung ihrer geordneten asymptotischen Frequenzen eindeutig festge-  
legt.*

(b) *Jedes endliche austauschbare, d.h. unter endlichen Permutationen in-  
variante Maß  $\kappa$  auf  $(\mathcal{P}, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}})$  besitzt die Darstellung*

$$\kappa(d\Gamma) = \int_{S^\downarrow} \mu_s(d\Gamma) \kappa(\Lambda^\downarrow \in ds).$$

(c) *Bezeichnet  $B_1$  den ersten Block einer austauschbaren  $\mathcal{P}$ -wertigen Zu-  
fallspartition  $R$ , gilt*

$$\mathbb{P}(i_1 \in B_1, \dots, i_k \in B_1) = \mathbb{P}(2 \in B_1, \dots, k+1 \in B_1)$$

für  $2 \leq i_1 < \dots < i_k < \infty$  und  $k \in \mathbb{N}$ .

BEWEIS: (a) und (b) folgen direkt aus Satz 3.5, wenn wir beachten, dass  
 $\nu$  in Gleichung (8) der Verteilung der geordneten asymptotischen Frequenzen von  $R$   
entspricht und durch  $\frac{\kappa}{\kappa(\mathcal{P})}$ , falls  $\kappa(\mathcal{P}) > 0$ , ein austauschbares Wahrscheinlichkeits-  
maß definiert wird. Zum Nachweis von Teil (c) behalten wir die Notation aus dem  
Beweis von Satz 3.5 bei. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(i_1 \in B_1, \dots, i_k \in B_1) &= \mathbb{P}(Z_1 = Z_{i_1} = \dots = Z_{i_k}) \\ &= \int \mathbb{P}(Z_1 = Z_{i_1} = \dots = Z_{i_k} | \Psi = \xi) \mathbb{P}(\Psi \in d\xi) \\ &= \int \mathbb{P}(Z_1 = Z_2 = \dots = Z_{k+1} | \Psi = \xi) \mathbb{P}(\Psi \in d\xi) \\ &= \mathbb{P}(2 \in B_1, \dots, k+1 \in B_1). \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der vorletzten Zeile benutzt, dass  $Z_1, Z_2, \dots$  bedingt unter  $\Psi = \xi$  stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind.  $\square$

## 3.2 $S^\downarrow$ - und $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen

Bei der Vorstellung der drei Fragmentierungsprozesse haben wir uns bei den  $S^\downarrow$ -Fragmentierungen kurz gefasst.  $S^\downarrow$ -Fragmentierungen eignen sich zwar gut zur Darstellung von Zerlegungen, falls nur die Größe der Fragmente von Interesse ist, sind aber im Verhältnis zu  $\mathcal{P}$ - und Intervall-Fragmentierungen schwieriger zu analysieren. Deshalb ist es erstrebenswert,  $S^\downarrow$ -Fragmentierungen auf der Grundlage von  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen zu duplizieren. Präzisiert heißt dies, dass wir zu gegebener  $S^\downarrow$ -Fragmentierung eine  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung konstruieren wollen, so dass der assoziierte Prozess der geordneten asymptotischen Frequenzen dieselbe Verteilung hat wie die  $S^\downarrow$ -Fragmentierung. Obgleich bei  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen genealogische Strukturen gegeben sind, die bei  $S^\downarrow$ -Fragmentierungen fehlen, und aus diesem Grund die Möglichkeit der Konstruktion fragwürdig erscheint, kann der folgende Satz ein positives Resultat konstatieren. Für den Beweis erweisen sich insbesondere Satz 3.5 und Korollar 3.6 über austauschbare Zufallspartitionen als hilfreich.

**3.7. Satz.** *Sei  $\lambda(\cdot)$  eine selbstähnliche  $S^\downarrow$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann existiert eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi_\lambda(\cdot)$  mit Index  $\alpha$ , so dass  $\Lambda^\downarrow(\Pi_\lambda(\cdot))$  und  $\lambda(\cdot)$  dieselbe Verteilung besitzen.*

BEWEIS: Da  $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$  wie gezeigt ein kompakter metrischer Raum ist, reicht es, eine geeignete Markovsche-Halbgruppe zu konstruieren, um die Existenz der gewünschten  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung nachzuweisen. Die Selbstähnlichkeit wird dabei aufgrund der Wahl der Übergangskerne unmittelbar folgen.

### KONSTRUKTION DER ÜBERGANGSKERNE

Sei  $(P^t)_{t \geq 0}$  die Halbgruppe der  $t$ -Schritt-Übergangskerne von  $\lambda(\cdot)$  und  $(Q^t(l))_{l \in [0,1]}$  die den Kern  $P^t$  induzierende Familie für jedes  $t \geq 0$ . Wir definieren

$$\dot{Q}^t(l) := (Q^t(l))^{g_l^{-1}} \quad \text{mit } g_l^{-1}((s_1, s_2, \dots)) := \left(\frac{s_1}{l}, \frac{s_2}{l}, \dots\right)$$

für  $(s_1, s_2, \dots) \in S_l^\downarrow$ . Sei  $(\ddot{Q}^t(l, \cdot))_{l \in [0,1]}$  eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\mathcal{P}$ , festgelegt durch

$$\ddot{Q}^t(l, \cdot) := \int_{S^\downarrow} \mu_s(\cdot) \dot{Q}^t(l, ds)$$

für  $t \geq 0$  und  $l \in [0, 1]$ . Hierbei bezeichnet  $\mu_s$  die  $s$ -Paintbox-Verteilung gemäß Definition 3.3.  $\ddot{Q}^t(l)$  ist also eine Mischung aus  $s$ -Paintbox-Prozessen mit der Mischungsverteilung  $\dot{Q}^t(l)$ . Um den Übergang zu Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\mathcal{P}$  herzustellen, greifen wir auf die asymptotischen Frequenzen zurück. Für  $B \subset \mathbb{N}$  sei  $\tilde{Q}^t(B)$  die Verteilung der Zufallspartition  $X_B$ , falls  $X \stackrel{d}{=} \ddot{Q}^t(\Lambda(B))$ . Mit  $\tilde{P}^t$  bezeichnen wir schließlich den durch  $(\tilde{Q}^t(B))_{B \subset \mathbb{N}}$  induzierten  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungskern.

### NACHWEIS DER HALBGRUPPENEIGENSCHAFT

Wir zeigen nun, dass die Familie  $(\tilde{P}^t)_{t \geq 0}$  eine Halbgruppe bildet bzw. die Regularitätsbedingungen für Übergangskerne zur Konstruktion eines Markov-Prozesses erfüllt, d.h. wir zeigen

$$\tilde{P}^{t+u}(\Gamma, \cdot) = \int_{\mathcal{P}} \tilde{P}^t(\Gamma', \cdot) \tilde{P}^u(\Gamma, d\Gamma') \quad (9)$$

für alle  $\Gamma \in \mathcal{P}$  und  $t, u \geq 0$ . Nach Konstruktion von  $\tilde{P}^t$  ist (9) äquivalent zu

$$\tilde{Q}^{t+u}(B, \cdot) = \int_{\mathcal{P}(B)} \tilde{P}^t(\Gamma', \cdot) \tilde{Q}^u(B, d\Gamma') \quad (10)$$

für alle  $B \subset \mathbb{N}$ . Gleichung (10) lässt sich wiederum folgendermaßen umschreiben:  $\tilde{Q}^{t+u}(B)$  ist die Verteilung der  $\mathcal{P}(B)$ -wertigen Zufallspartition  $\Pi(t, u)$ , wobei wir  $\Pi(t, u)$  anhand des folgenden Vorgehens erhalten:

- (1) Sei  $\Pi(u)$  eine austauschbare  $\mathcal{P}(B)$ -wertige Zufallsvariable mit der Verteilung  $\tilde{Q}^u(B)$ .
- (2) Gegeben  $\Pi(u) = (B_1(u), B_2(u), \dots)$ , sei

$$\Pi(t, u) := [\Pi_{B_1(u)}(t), \Pi_{B_2(u)}(t), \dots].$$

Hierbei bezeichnet  $(\Pi_{B_i(u)}(t))_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge stochastisch unabhängiger  $\mathcal{P}(B_i(u))$ -wertiger Zufallsvariablen mit Verteilung  $\tilde{Q}^t(B_i(u))$  für  $i \geq 1$ .

Wir betrachten zunächst den Fall  $B = \mathbb{N}$  und konzentrieren uns auf den Nachweis der Austauschbarkeit von  $\Pi(t, u)$ . Seien  $S = (S_k)_{k \geq 1}$  und  $S^{(1)} = (S_k^{(1)})_{k \geq 1}$ ,  $S^{(2)} = (S_k^{(2)})_{k \geq 1}, \dots$   $S^\downarrow$ -wertige Zufallsvariablen mit Verteilung  $Q^u(1)$  bzw.  $\dot{Q}^t(\Lambda(B_i(u)))$  für

$i \geq 1$ . Nach Definition lässt sich  $\Pi(u)$  als  $S$ -Paintbox-Prozess und  $\Pi_{B_i(u)}(t)$  als Einschränkung eines  $S^{(i)}$ -Paintbox-Prozesses auf  $B_i(u)$  für  $i \geq 1$  darstellen. Gegeben  $S = (s_1, s_2, \dots)$ , können wir deshalb eine Folge  $(X_i)_{i \geq 1}$  stochastisch unabhängiger identisch verteilter  $\mathbb{N}$ -wertiger Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = s_k \quad \text{für } k \geq 1$$

und

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - \sum_{k \geq 1} s_k,$$

wählen, so dass die Zufallspartition  $\Pi(u)$  bedingt unter  $S = (s_1, s_2, \dots)$  gegeben wird durch die Äquivalenzrelation:

$$i \stackrel{\Pi(u)}{\sim} j \quad :\Leftrightarrow \quad X_i = X_j > 0$$

für  $i, j \in \mathbb{N}$ . Für  $\Pi_{B_i(u)}(t)$ ,  $i \geq 1$ , sei  $(Y_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}}$  die entsprechende Folge von Zufallsvariablen. Unter Anwendung einer Bijektion  $\phi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  ergibt sich folgender Zusammenhang für  $i, j \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} i \stackrel{\Pi(u,t)}{\sim} j &\Leftrightarrow \left\{ X_i = X_j \text{ und } Y_i^{(X_i)} = Y_j^{(X_j)} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ (X_i, Y_i^{(X_i)}) = (X_j, Y_j^{(X_j)}) \right\} \\ &\Leftrightarrow Z_i := \phi(X_i, Y_i^{(X_i)}) = \phi(X_j, Y_j^{(X_j)}) =: Z_j. \end{aligned} \tag{11}$$

Da  $X_1, X_2, \dots$  sowie  $Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, \dots$  bedingt unter  $S$  bzw.  $S^{(i)}$  für  $i \geq 1$  jeweils stochastisch unabhängig und identisch verteilt sowie untereinander stochastisch unabhängig sind, ist auch  $(Z_i)_{i \geq 1}$  eine Folge stochastisch unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen. Beziehung (11) liefert somit die Austauschbarkeit von  $\Pi(t, u)$ .

Gemäß Korollar 3.6 (a) wird die Verteilung einer austauschbaren Zufallspartition von  $\mathbb{N}$  durch die Verteilung ihrer asymptotischen Frequenzen eindeutig bestimmt. Unter Beachtung von  $B = \mathbb{N}$  und Lemma 3.4 gilt nach Konstruktion

$$\Lambda^\downarrow(\Pi(t, u)) = T \left( g_{S_1}(S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \dots), g_{S_2}(S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \dots), \dots \right) \stackrel{d}{=} \lambda(t + u),$$

wobei  $T$  wie in Abschnitt 2.1 die Ordnungsstatistik bezeichnet. Also hat  $\Pi(t, u)$  die Verteilung  $\tilde{Q}^{t+u}(\mathbb{N})$ .

Sei  $B$  nun eine beliebige Teilmenge von  $\mathbb{N}$ .  $\tilde{Q}^{t+u}(B)$  ist dann die Verteilung der Zufallspartition  $X_B$  ( $X$  eingeschränkt auf  $B$ ) für eine  $\mathcal{P}$ -wertige Zufallsvariable  $X$ . Ebenso haben wir  $\Pi(t, u) = (\tilde{\Pi}(t, u))_B$  für eine  $\mathcal{P}$ -wertige Zufallsvariable  $\tilde{\Pi}(t, u)$ .

Ersetzen wir die induzierende Familie  $(Q^s(l))_{l \in [0,1]}$  durch  $(Q^s(\Lambda(B)l))_{l \in [0,1]}$  für  $s \geq 0$ , so folgt unter Verwendung des Ergebnisses für den Fall  $B = \mathbb{N}$

$$\tilde{\Pi}(t, u) \stackrel{d}{=} X$$

und damit

$$\Pi(t, u) \stackrel{d}{=} \tilde{Q}^{t+u}(B).$$

### FESTLEGUNG DER $\mathcal{P}$ -FRAGMENTIERUNG

Wir haben gezeigt, dass die Familie  $(\tilde{P}^t)_{t \geq 0}$  der Übergangskerne von  $(\mathcal{P}, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}})$  nach  $(\mathcal{P}, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}})$  die Regularitätsbedingungen erfüllt. Es existiert also eine Markovsche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Übergangskernen  $(\tilde{P}^t)_{t \geq 0}$  und  $\tilde{P}^0 = \delta_{(\mathbb{N}, \emptyset, \dots)}$ . Wir bezeichnen diesen stochastischen Prozess mit  $\Pi_{\lambda}(\cdot) = (\Pi_{\lambda}(t), t \geq 0)$ .  $\Lambda^{\downarrow}(\Pi_{\lambda}(\cdot))$  hat offenbar dieselbe Verteilung wie  $\lambda(\cdot)$ . Es gilt  $\Pi_{\lambda}(0) = (\mathbb{N}, \emptyset, \dots)$ . Außerdem ist  $\Pi_{\lambda}(\cdot)$  austauschbar, da nach Konstruktion  $\tilde{P}^t((\mathbb{N}, \emptyset, \dots)) = \tilde{Q}^t(1)$  für alle  $t > 0$  austauschbar ist.

Um die Beibehaltung der Selbstähnlichkeit einzusehen, erinnere man sich der Gültigkeit von  $Q^t(l) = Q^{tl^{\alpha}}(1)^{g_l}$  für  $t \geq 0$  und  $l \in [0, 1]$  gemäß Definition 2.4. Dies impliziert  $\tilde{Q}^t(l) = \tilde{Q}^{tl^{\alpha}}(1)$  und schließlich  $\tilde{Q}^t(B) \stackrel{d}{=} \Pi_{\lambda}(t\Lambda(B)^{\alpha})_B$  für alle  $B \subset \mathbb{N}$  und  $t \geq 0$ . Nach Lemma 2.15 ist  $\Pi_{\lambda}(\cdot)$  eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha$ .  $\square$

Im Gegensatz zur Aussage des vorherigen Satzes ist die Tatsache, dass der Prozess der geordneten asymptotischen Frequenzen einer selbstähnlichen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung eine selbstähnliche  $S^{\downarrow}$ -Fragmentierung ist, nicht verwunderlich. Wir halten quasi als Rückrichtung des Satzes 3.7 fest:

**3.8. Satz.** *Sei  $\Pi(\cdot)$  eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\Lambda^{\downarrow}(\Pi(\cdot))$  eine selbstähnliche  $S^{\downarrow}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha$ .*

BEWEIS: Nach Definition 2.11 (2) ist  $\lambda(\cdot) = (\lambda(t), t \geq 0)$  mit  $\lambda(t) := \Lambda^{\downarrow}(\Pi(t))$  für alle  $t \geq 0$  stetig in Wahrscheinlichkeit. Wegen  $\Pi(0) = (\mathbb{N}, \emptyset, \dots)$  fast sicher gilt  $\lambda(0) = (1, 0, \dots)$  fast sicher. Die Markov-Eigenschaft überträgt sich direkt von  $\Pi(\cdot)$  auf  $\Lambda^{\downarrow}(\Pi(\cdot))$ .

Die Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft lassen sich folgendermaßen herleiten: Für  $r, t \geq 0$  betrachten wir  $\lambda(r+t)$  bedingt unter  $\lambda(t) = (l_1, l_2, \dots) \in S^{\downarrow}$ .

Nach Definition gilt dann

$$\Pi(t) \in \{\Gamma = (B_1, B_2, \dots) \in \mathcal{P} : \Lambda^\downarrow(\Gamma) = (l_1, l_2, \dots)\} =: A_t.$$

Zwecks Vereinfachung sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\Lambda(B_i) = l_i$  für  $i \in \mathbb{N}$ . Sei  $\Pi^{(1)}(\cdot), \Pi^{(2)}(\cdot), \dots$  eine Folge stochastisch unabhängiger Kopien von  $\Pi(\cdot)$ . Bedingt unter  $\Pi(t) = \Gamma$  für beliebiges  $\Gamma \in A_t$  gilt gemäß Bemerkung 2.16 (a)

$$\Pi(r+t) \stackrel{d}{=} [\Pi^{(1)}(l_1^\alpha r)_{B_1}, \Pi^{(2)}(l_2^\alpha r)_{B_2}, \dots].$$

Damit ergibt sich bedingt unter  $\lambda(t) = (l_1, l_2, \dots)$

$$\lambda(t+r) \stackrel{d}{=} T(l_1 \Lambda^\downarrow(\Pi^{(1)}(l_1^\alpha r)), l_2 \Lambda^\downarrow(\Pi^{(2)}(l_2^\alpha r)), \dots).$$

Hierbei ist  $\Lambda(\Pi^{(1)}), \Lambda(\Pi^{(2)}), \dots$  eine Folge stochastisch unabhängiger Kopien von  $\lambda(\cdot)$ . Wir haben also gezeigt, dass  $(Q^t(l))_{l \in [0,1]}$  mit

$$Q^t(l) \stackrel{d}{=} (\lambda(tl^\alpha))^{g_t}$$

für  $l \in [0, 1]$  eine induzierende Familie der  $t$ -Schritt-Übergangskerne von  $\lambda(\cdot)$  ( $t \geq 0$ ) ist, d.h.  $\lambda(\cdot)$  erfüllt die Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft. Insgesamt folgt damit die Behauptung.  $\square$

Wir haben das befriedigende Ergebnis erhalten, dass wir auf der Basis der asymptotischen Frequenzen beliebig zwischen  $S^\downarrow$ - und  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen wechseln können. Diese „1 zu 1“-Beziehung erlaubt es uns,  $S^\downarrow$ -Fragmentierungen im weiteren Verlauf auszublenden und den Schwerpunkt auf die Untersuchung von  $\mathcal{P}$ - sowie Intervall-Fragmentierungen zu legen.

### 3.3 Intervall- und $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen

Sowohl  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen als auch Intervall-Fragmentierungen werden im weiteren Verlauf Objekt einer genaueren Analyse sein. Um Resultate auf den anderen Typ übertragen zu können, verlangt es einer Konkretisierung der Beziehung zwischen diesen beiden Fragmentierungsprozessen. Als Erstes soll die Konstruktion einer  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung bei gegebener selbstähnlicher Intervall-Fragmentierung  $F(\cdot) = (F(t), t \geq 0)$  mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$  beschrieben werden. Unser Ziel ist es, dass der

Prozess der geordneten asymptotischen Frequenzen zu jedem Zeitpunkt fast sicher der geordneten Fragmentierung assoziiert zu  $F(\cdot)$  entspricht.

Hierfür sei  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge stochastisch unabhängiger identisch  $R(0, 1)$ -verteilter Zufallsvariablen, definiert auf  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . Die  $U_i$ 's seien ferner stochastisch unabhängig von dem Prozess  $F(\cdot)$ .  $(I_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichne die eindeutige Intervallzerlegung von  $F(t)$  für  $t \geq 0$ . Wir definieren nun den  $\mathcal{P}$ -wertigen Prozess  $\Pi_F(\cdot) = (\Pi_F(t), t \geq 0)$  durch Festlegung von Äquivalenzrelationen. Für  $t \geq 0$  und  $\omega \in \Omega$  gelte

$$i \stackrel{\Pi_F(t)(\omega)}{\sim} j \quad :\Leftrightarrow \quad (U_i(\omega) \in I_n(t)(\omega)) \wedge (U_j(\omega) \in I_n(t)(\omega)) \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}.$$

**3.9. Definition.** Der soeben festgelegte stochastische Prozess  $\Pi_F(\cdot)$  heißt  *$\mathcal{P}$ -Fragmentierung assoziiert zu  $F(\cdot)$* .

Der Nachweis, dass es sich bei  $\Pi_F(\cdot)$  tatsächlich um eine  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung handelt, wird im folgenden Satz erbracht. Die Definition von  $\Pi_F(\cdot)$  wird sich als geeignete Wahl erweisen.

**3.10. Satz.** Sei  $F(\cdot)$  eine selbstähnliche Intervall-Fragmentierung mit Index  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Dann gilt:

- (a) Der  $\mathcal{P}$ -wertige Prozess  $\Pi_F(\cdot)$  ist regulär.
- (b)  $\Pi_F(\cdot)$  ist eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha$  und es gilt  $s \circ F(t) = \Lambda^\downarrow(\Pi(t))$  fast sicher für jedes  $t \geq 0$ .

BEWEIS: Zu (a): Sei  $I_x(t)$  für  $x \in (0, 1)$  definiert wie im Beweis von Proposition 2.38, so dass gilt

$$F(t) = \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)} I_x(t)$$

für jedes  $t \geq 0$ . Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen erhalten wir für alle  $x \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$  und  $t \geq 0$ :

$$\frac{1}{n} |\{1 \leq i \leq n : U_i \in I_x(t)\}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |I_x(t)| \quad \text{fast sicher.}$$

Sei  $x \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$  nun fest, aber beliebig. Wir zeigen, dass eine Nullmenge  $N_x$  existiert, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\underbrace{\{1 \leq i \leq n : U_i(\omega) \in I_x(t)(\omega)\}}_{=: A_n^t(\omega)}| = |I_x(t)(\omega)|$$

gilt für alle  $\omega \in N_x^c$  und  $t \geq 0$ .

Die Zufallsabbildung  $H : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  sei definiert durch

$$H(t) := |I_x(t)|.$$

Nach Proposition 2.36 ist  $t \mapsto H(t)(\omega)$  rechtsseitig stetig für  $\omega \in (N^H)^c$  und eine Nullmenge  $N^H \in \mathfrak{A}$ . Damit ist auch  $t \mapsto A_n^t(\omega)$  rechtsseitig stetig für jedes feste  $n \in \mathbb{N}$  und  $\omega \in (N^H)^c$ . Es sei  $N_x := (\bigcup_{t \in \mathbb{Q}^+} N^t) \cup N^H$ , wobei  $N^t$  die Nullmenge bezeichnet, außerhalb derer  $A_n^t(\omega)$  gegen  $|I_x(t)(\omega)|$  konvergiert. Für  $\omega \in N_x^c$  und  $t \in \mathbb{Q}^+$  gilt also  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^t(\omega) = |I_x(t)(\omega)|$ .

Wir wählen ein festes  $t \geq 0$  und eine Folge  $(t_m)_{m \geq 1}$  rationaler Zahlen mit  $t_m \downarrow t$  für  $m \rightarrow \infty$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \left| |I_x(t)(\omega)| - A_n^t(\omega) \right| &\leq \left| |I_x(t)(\omega)| - |I_x(t_m)(\omega)| \right| + \left| |I_x(t_m)(\omega)| - A_n^{t_m}(\omega) \right| \\ &\quad + \left| A_n^{t_m}(\omega) - A_n^t(\omega) \right|. \end{aligned}$$

Da die drei letzten Terme für  $\omega \in N_x^c$  und hinreichend große  $m, n \in \mathbb{N}$  beliebig klein werden, erhalten wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^t(\omega) = |I_x(t)(\omega)|$  für alle  $\omega \in N_x^c$ . Wir definieren nun  $N = \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)} N_x$  als die gesuchte Nullmenge, so dass die Behauptung mit Bemerkung 2.1 (b) folgt.

Zu (b): Die Austauschbarkeit von  $\Pi_F(\cdot)$  ergibt sich unmittelbar aus der stochastischen Unabhängigkeit und der identischen Verteilung der Zufallsvariablen  $U_i, i \geq 1$ .  $F(0) = (0, 1)$  fast sicher impliziert  $\Pi_F(0) = (\mathbb{N}, \emptyset, \dots)$  fast sicher. Aufgrund der Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit von  $F(\cdot)$  und der Stetigkeit von  $s$  ist  $s \circ F(\cdot)$  stetig in Wahrscheinlichkeit und somit auch  $\Lambda^\downarrow(\Pi_F(\cdot))$ , da  $\Lambda^\downarrow(\Pi_F(t))$  und  $s \circ F(t)$  nach dem Gesetz der großen Zahlen für jedes  $t \geq 0$  fast sicher übereinstimmen. Aus der Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit von  $F(\cdot)$  folgt ebenfalls leicht die Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit von  $\Pi_F(\cdot)$ , da

$$\mathbb{P}(U_i \in \partial V) = 0, \quad i \geq 1,$$

gilt, wobei  $\partial V$  den Rand von  $V$  bezeichnet.

Ein wenig aufwändiger gestaltet sich der Nachweis der weiteren Eigenschaften. Wir betrachten für ein festes  $t > 0$  die Intervallzerlegung  $(I_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  von  $F(t)$  und setzen  $I_0(t) := F(t)^c$ . Für  $n \in \mathbb{N}_0$  definieren wir

$$\beta_n(t) := \{k \in \mathbb{N} : U_k \in I_n(t)\}.$$



$\beta_0(t)$  ist damit die Menge der Indizes, die mit der Menge der Einpunktblöcke der Partition  $\Pi_F(t)$  übereinstimmt. Die Blöcke von  $\Pi_F(t)$ , die weder leer noch Einpunktblöcke sind, korrespondieren mit den  $\beta_n(t)$ 's für  $n = 1, 2, \dots$  im Falle  $I_n(t) \neq \emptyset$ .

Zur Überprüfung der Markov-Eigenschaft überlegen wir, wie  $\Pi_F(r)$  für  $0 \leq r \leq t$  aus  $\Pi_F(t)$  ermittelt werden kann.  $\Pi_F(r)$  wird gegeben durch Äquivalenzrelationen für  $i \in \beta_{i'}(t)$  und  $j \in \beta_{j'}(t)$  mit  $i', j' \in \mathbb{N}_0$ :

$$i \stackrel{\Pi_F(r)}{\sim} j \Leftrightarrow \begin{cases} \exists l \in \mathbb{N} \text{ mit } I_{i'}(t) \cup I_{j'}(t) \subset I_l(r) & : \quad \text{für } i' \neq 0, j' \neq 0 \\ \exists l \in \mathbb{N} \text{ mit } U_i \in I_l(r) \text{ und } I_{j'}(t) \subset I_l(r) & : \quad \text{für } i' = 0, j' \neq 0 \\ \exists l \in \mathbb{N} \text{ mit } U_j \in I_l(r) \text{ und } I_{i'}(t) \subset I_l(r) & : \quad \text{für } i' \neq 0, j' = 0 \\ \exists l \in \mathbb{N} \text{ mit } U_i \in I_l(r) \text{ und } U_j \in I_l(r) & : \quad \text{für } i' = 0, j' = 0. \end{cases}$$

Dies zeigt, dass  $\Pi_F(r)$  festgelegt wird durch  $\Pi_F(t)$ ,  $F(r)$  und  $(U_i)_{i \in \beta_0(t)}$ . Da die Zufallsvariablen  $U_i, i \in \beta_0(t)$ , keine Auswirkungen auf den weiteren Verlauf von  $(\Pi_F(t+s), s \geq 0)$  haben, lässt sich die Markov-Eigenschaft von  $F(\cdot)$  direkt auf  $\Pi_F(\cdot)$  übertragen. Es gilt nämlich für  $t > t_1 > t_2 > \dots > t_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  beliebig:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Pi_F(t+s) \in \cdot | \Pi_F(t), \Pi_F(t_1), \dots, \Pi_F(t_n)) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_F(t+s) \in \cdot | \Pi_F(t), (U_i)_{i \in \beta_0(t)}, F(t_1), \dots, F(t_n)) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_F(t+s) \in \cdot | \Pi_F(t)). \end{aligned}$$

Damit erfüllt  $\Pi_F(\cdot)$  die Markov-Eigenschaft.

Die Fragmentierungseigenschaft der Intervall-Fragmentierungen erlaubt die Reduktion der Betrachtung auf ein einzelnes Intervall beim Nachweis der Selbstähnlichkeit. Für ein festes, aber beliebiges  $i \in \mathbb{N}$  mit  $I_i(t) \neq \emptyset$  indizieren wir die Elemente von  $\beta_i(t)$  in aufsteigender Reihenfolge, d.h.  $\beta_{i,1}(t) < \beta_{i,2}(t) < \dots$ , und setzen  $U_{i,j} := U_{\beta_{i,j}(t)}$ .  $(U_{i,j})_{j \geq 1}$  bildet offensichtlich eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen, die gegeben  $(I_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\beta_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  jeweils gleichverteilt auf  $I_i(t)$  sind. Für  $r \geq 0$  betrachten wir nun  $F(t+r) \cap I_i(t)$  bedingt unter  $F(t) = (I_n(t), n \in \mathbb{N})$  anhand der Darstellung

$$g_{I_i(t)} \circ F^{(i)}(r | I_i(t) |^\alpha), \quad (12)$$

wobei  $F^{(i)}(\cdot)$  gemäß der Skalierungseigenschaft von  $F(\cdot)$  dieselbe Verteilung wie  $F(\cdot)$  hat und stochastisch unabhängig von  $(F(s), s \leq t)$  ist. Die entsprechende Intervallzerlegung bezeichnen wir mit  $(I_n^{(i)}(t+r))_{n \in \mathbb{N}}$ . Wir greifen ein beliebiges Intervall  $I_j^{(i)}(t+r)$  dieser Intervallzerlegung heraus. Dieses Intervall besitzt nach (12) die Gestalt  $g_{I_i(t)} \circ J$  für ein (Zufalls-)Intervall  $J$  der Intervallzerlegung von  $F^{(i)}(r | I_i(t) |^\alpha)$ .

Der zu  $I_j^{(i)}(t+r)$  korrespondierende Block  $\beta_j^{(i)}(t+r)$  wird also gegeben durch

$$\beta_j^{(i)}(t+r) = \{k \in \mathbb{N} : U_k \in g_{I_i(t)} \circ J\}.$$

Definieren wir

$$C := \{k \in \mathbb{N} : g_{I_i(t)}^{-1} \circ U_{i,k} \in J\},$$

so ist  $C$  ein zu  $J$  korrespondierender Block, da  $g_{I_i(t)}^{-1}(U_{i,1}), g_{I_i(t)}^{-1}(U_{i,2}), \dots$  eine Folge stochastisch unabhängiger jeweils  $R(0,1)$ -verteilter Zufallsvariablen ist und  $I_i(t) \neq \emptyset$  zu  $|\beta_i| = \infty$  äquivalent ist.  $C$  kann somit als Block einer Kopie  $\Pi_F^{(i)}(\cdot)$  von  $\Pi_F(\cdot)$  zum Zeitpunkt  $r\Lambda(\beta_i(t))^\alpha$  aufgefasst werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \beta_j^{(i)}(t+r) &= \{k \in \mathbb{N} : U_k \in g_{I_i(t)} \circ J\} \\ &= \{k \in \{\beta_{i,1}(t), \beta_{i,2}(t), \dots\} : U_k \in g_{I_i(t)} \circ J\} \\ &= \{k \in \{\beta_{i,1}(t), \beta_{i,2}(t), \dots\} : g_{I_i(t)}^{-1} \circ U_k \in J\} \\ &= \{\beta_{i,j}(t) \in \beta_i(t) : g_{I_i(t)}^{-1} \circ U_{i,j} \in J\} \\ &= \{\beta_{i,j}(t) \in \beta_i(t) : j \in C\}. \end{aligned}$$

Führen wir dies für alle Intervalle der Intervallzerlegung  $(I_n^{(i)}(t+r))_{n \in \mathbb{N}}$  durch, so ergibt sich bei Beachtung von Definition 2.6 (a) über induzierte Partitionen

$$[\beta_1^{(i)}(t+r), \beta_2^{(i)}(t+r), \dots] = \Pi_F^{(i)}(r\Lambda(\beta_i(t))^\alpha) \circ \beta_i(t).$$

Die Fragmentierungseigenschaft von  $F(\cdot)$  gewährleistet schließlich die Gültigkeit der Fragmentierungseigenschaft für  $\Pi_F(\cdot)$ .  $\Pi_F(\cdot)$  ist also eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha$ .  $\square$

Wir wenden uns jetzt der umgekehrten Richtung zu. Sei  $\Pi(\cdot) = (\Pi(t), t \geq 0)$  eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Zur Konstruktion einer Intervall-Fragmentierung  $F_\Pi(\cdot) = (F_\Pi(t), t \geq 0)$ , deren assoziierte geordnete Fragmentierung dieselbe Verteilung hat wie der zu  $\Pi(\cdot)$  assoziierte Prozess der geordneten asymptotischen Frequenzen, führen wir zunächst einige Begriffe ein. Dabei wird Definition 3.11 die Genealogie der  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen zum Inhalt haben.

In diesem Rahmen verwenden wir eine alternative Bezeichnung für die Blöcke der Partitionen. Für jedes  $t \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$  sei  $B_k(t)$  der Block der Partition  $\Pi(t)$ , der  $k$  als das kleinste Element enthält, falls solch ein Block existiert. Andernfalls setzen wir  $B_k(t) := \emptyset$ . Wir schreiben  $\lambda_k(t)$  für die asymptotische Frequenz von  $B_k(t)$  und definieren

$$t_k := \inf \{t \geq 0 : B_k(t) \neq \emptyset\}$$

für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .

**3.11. Definition.** (a) Für  $k \geq 2$  heißt  $j \in \mathbb{N}$  *Vater von  $k$* , falls  $k \in B_j(t_k-)$  gilt.

(b) Per Induktion wird der Begriff *Vorfahre* festgelegt:  $k \in \mathbb{N}$  sei der Vorfahre von  $k$ , und der Vater eines Vorfahren von  $k$  sei wiederum ein Vorfahre von  $k$ .

(c)  $k, k' \geq 2$  heißen *Zwillingsbrüder*, falls sie denselben Vater haben und  $t_k = t_{k'}$  gilt.

(d) Der *Vorgänger*  $p(k)$  von  $k$ ,  $k \geq 2$ , ist der größte Zwillingsbruder  $k'$  von  $k$  mit  $k' < k$  ist, falls solch ein  $k'$  existiert, andernfalls ist  $p(k)$  der Vater von  $k$ .

Wir kommen nun zur eigentlichen Konstruktion. Für jedes  $t \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$  führen wir das offene Intervall

$$I_k(t) := (x_k, x_k + \lambda_k(t)) \subset (0, 1) \quad (13)$$

ein, wobei wir

$$x_1 := 0 \quad \text{und} \quad x_k := x_{p(k)} + \lambda_{p(k)}(t_k) \quad (14)$$

für  $k \geq 2$  setzen.

**3.12. Proposition.** Sei für  $t \geq 0$  die Familie  $(I_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  von Intervallen gemäß (13) und (14) festgelegt. Dann gilt<sup>1</sup>:

(a)  $I_i(t) \cap I_j(t) = \emptyset$  für  $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$ , d.h.  $(I_i(t), i \in \mathbb{N})$  ist die Intervallzerlegung einer offenen Teilmenge von  $[0, 1]$  für alle  $t \geq 0$ .

(b)  $F_{\Pi}(\cdot) = (F_{\Pi}(t), t \geq 0)$  mit  $F_{\Pi}(t) := \sum_{i \geq 1} I_i(t)$  für jedes  $t \geq 0$  weist die Monotonieeigenschaft auf, d.h.  $F_{\Pi}(t) \subset F_{\Pi}(s)$  für  $0 \leq t \leq s$ .

Zur übersichtlicheren Gestaltung des Beweises fügen wir ein Lemma ein.

**3.13. Lemma.** Gegeben  $(I_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  ( $t \geq 0$ ) gemäß Proposition 3.12, lassen sich folgende Aussagen angeben:

(a) Für  $0 \leq t < t_k$  gilt  $I_k(t) = \emptyset$  und für  $t_k \leq t < t'$  gilt  $I_k(t') \subset I_k(t)$ .

---

<sup>1</sup>Die folgenden Aussagen gelten fast sicher. Auf diesen Zusatz werde hier und im anschließenden Beweis verzichtet, da die Argumentation dadurch nicht beeinflusst wird.

- (b) Für den Fall, dass  $k' \neq k$  entweder der Vater oder der Zwilling Bruder von  $k$  ist, gilt  $I_k(t_k) \cap I_{k'}(t_k) = \emptyset$
- (c) Falls  $j$  der Vater von  $k \geq 2$  ist, gilt  $I_k(t) \subset I_j(t_k -)$  für  $t \geq 0$ .

BEWEIS: Zu (a): Für  $t < t_k$  gilt  $B_k(t) = \emptyset$ ,  $\lambda_k(t) = 0$  und somit  $I_k(t) = \emptyset$ . Für  $t_k \leq t < t'$  gilt  $B_k(t') \subset B_k(t)$ ,  $\lambda_k(t') \leq \lambda_k(t)$  und es folgt

$$I_k(t') = (x_k, x_k + \lambda_k(t')) \subset (x_k, x_k + \lambda_k(t)) = I_k(t).$$

Zu (b): Sei  $k'$  Zwilling Bruder von  $k$ , d.h.  $t_k = t_{k'}$  und  $k, k'$  haben denselben Vater  $k''$ . Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $k' < k$ . Es gilt  $x_k = x_{p(k)} + \lambda_{p(k)}(t_k)$  und damit  $I_k(t_k) \cap I_{p(k)}(t_k) = \emptyset$ . Da nach Definition  $k' \leq p(k) < k$  Gültigkeit hat, folgt sukzessiv fortgesetzt

$$x_{k'} + \lambda_{k'}(t_k) \leq x_{p(k)} + \lambda_{p(k)}(t_k)$$

und hieraus  $I_{k'}(t_k) \cap I_k(t_k) = \emptyset$ . Bei analogem Vorgehen erhalten wir dasselbe Ergebnis für den Fall, dass  $k'$  der Vater von  $k$  ist.

Zu (c): Falls  $j$  der Vater von  $k \geq 2$  ist, so gilt nach Definition  $k \in B_j(t_k -)$ , d.h.  $B_k(t) \subset B_j(t_k -)$  für  $t \geq 0$ . Ferner hat für  $j =: l_1 < l_2 < \dots < l_m := k$ , wobei  $l_i$  der Vorgänger von  $l_{i+1}$  sei für  $1 \leq i \leq m - 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$  ( $m = 2 \Leftrightarrow j$  ist der Vorgänger von  $k$ ), die Inklusion

$$B_{l_1}(t_k) + \dots + B_{l_m}(t_k) \subset B_j(t_k -)$$

Bestand. Es folgt

$$x_k = x_{p(k)} + \lambda_{p(k)}(t_k) = x_j + \lambda_{l_1}(t_k) + \dots + \lambda_{l_{m-1}}(t_k) \geq x_j$$

und

$$x_k + \lambda_k(t) = x_j + \lambda_{l_1}(t) + \dots + \lambda_{l_m}(t) \leq x_j + \lambda_j(t_k -)$$

für  $t \geq t_k$ , also  $I_k(t) \subset I_j(t_k -)$  für  $t \geq 0$ .  $\square$

BEWEIS VON PROPOSITION 3.12: Zu (a): Seien  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i \neq j$ . Zu betrachten ist nur noch der Fall, bei dem  $i$  und  $j$  weder Zwilling Brüder sind noch einer der Vater des anderen ist, denn ansonsten gilt nach Lemma 3.13 (b)  $I_i(t_i) \cap I_j(t_i) = \emptyset$  und schließlich nach Lemma 3.13 (a)  $I_i(t) \cap I_j(t) = \emptyset$  für alle  $t \geq 0$ . Wir definieren  $k$

als den größten gemeinsamen Vorfahren von  $i$  und  $j$  sowie  $t'$  als den Zeitpunkt mit der Eigenschaft:

$$i, j \in B_k(t'-) \quad \text{und} \quad (i \notin B_k(t')) \vee (j \notin B_k(t')).$$

Für  $t < t'$  ist zumindest einer der beiden Blöcke  $B_i(t)$  oder  $B_j(t)$  leer, also gilt  $I_i(t) \cap I_j(t) = \emptyset$ . Für  $t \geq t'$  ergibt sich nach Lemma 3.13 (b) und (c)

$$I_k(t'-) \supset I_k(t_{i_1}-) \supset I_{i_1}(t_{i_2}-) \supset I_{i_2}(t_{i_3}-) \supset \dots \supset I_i(t)$$

und

$$I_k(t'-) \supset I_k(t_{j_1}-) \supset I_{j_1}(t_{j_2}-) \supset I_{j_2}(t_{j_3}-) \supset \dots \supset I_j(t),$$

wobei  $i_l$  bzw.  $j_l$  jeweils ein Vorfahre von  $i_{l+1}$  und  $i$  bzw.  $j_{l+1}$  und  $j$  für  $l \geq 1$  sei und wir  $i_1$  nach Definition von  $t'$  als Zwillingbruder von  $j_1$  wählen können. Mit Lemma 3.13 (a) und (b) folgt sofort  $I_i(t) \cap I_j(t) = \emptyset$  für jedes  $t \geq 0$ .

Zu (b): Sei  $0 \leq r < t$ . Für  $r \geq t_k$  gilt  $I_k(t) \subset I_k(r)$  und für  $t < t_k$  ist  $I_k(t) = \emptyset$ . Es bleibt lediglich die Situation  $r < t_k \leq t$  zu untersuchen. Hierzu betrachten wir den größten Vorfahren  $i$  von  $k$  mit  $t_i \leq r$ . Es folgt  $I_k(t) \subset I_i(t_k-) \subset I_i(r)$  und somit insgesamt die Behauptung.  $\square$

Der in Proposition 3.12 festgelegte stochastische Prozess  $F_\Pi(\cdot)$  ist also eine Intervall-Fragmentierung. Dabei garantiert die Festlegung der Intervalle gemäß (13) die Übereinstimmung zwischen  $\Lambda(B_k(t))$  und  $|I_k(t)|$  für jedes  $t \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$ , d.h. es gilt

$$\Lambda^\downarrow(\Pi(t)) = s(F_\Pi(t)) \quad \text{fast sicher}$$

für jedes  $t \geq 0$ . Wir können jetzt die Rückrichtung von Satz 3.10 angeben.

**3.14. Satz.** *Gegeben eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$ , gilt:*

- (a) *Die Intervall-Fragmentierung  $F_\Pi(\cdot) := (F_\Pi(t), t \geq 0)$  ist selbstähnlich mit Index  $\alpha$ , und es gilt  $\Lambda^\downarrow(\Pi(t)) = s(F_\Pi(t))$  fast sicher für jedes  $t \geq 0$ .*
- (b) *Die zu  $F_\Pi(\cdot)$  assoziierte  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi_{F_\Pi}(\cdot)$  hat dieselbe Verteilung wie  $\Pi(\cdot)$ .*

BEWEIS: Zu (a): Es gilt  $F_\Pi(0) = (x_1, x_1 + \lambda_1(0)) = (0, 1)$ . Da  $\Lambda^\downarrow(\Pi(\cdot))$  stetig in Wahrscheinlichkeit ist, gilt Selbiges für  $s \circ F_\Pi(\cdot)$  und damit nach Bemerkung

2.37 (a) auch für  $F_{\Pi}(\cdot)$ . Die Markov-Eigenschaft lässt sich direkt von  $\Pi(\cdot)$  auf  $F_{\Pi}(\cdot)$  übertragen.

Wir überprüfen die Gültigkeit der Fragmentierungs- und entsprechenden Skalierungseigenschaft. Für jedes  $t \geq 0$  sei die Folge  $(I_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  von Intervallen aus der Familie der Partitionen  $(\Pi(u), 0 \leq u \leq t)$  konstruiert. Wir betrachten nun ein Intervall  $I_k(t) \neq \emptyset$  für beliebiges, aber festes  $t \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Wir schreiben zwecks Abkürzung  $g$  anstelle von  $g_{I_k(t)}$ . Wie bereits erwähnt, gilt  $\Lambda(B_k(t)) = \lambda_k(t) = |I_k(t)|$ . Gegeben  $\Pi(t)$  lässt sich  $\Pi(t+r)_{B_k}$ ,  $r \geq 0$ , schreiben als

$$\Pi(t+r)_{B_k} = \tilde{\Pi}(r|I_k(t)|^\alpha) \circ B_k(t). \quad (15)$$

Dabei hat  $\tilde{\Pi}(\cdot)$  gemäß der Skalierungseigenschaft von  $\Pi(\cdot)$  dieselbe Verteilung wie  $\Pi(\cdot)$  und ist stochastisch unabhängig von  $(\Pi(s), s \leq t)$ .  $\tilde{B}_j(u)$  für  $u \geq 0$  und  $j \in \mathbb{N}$  bezeichne den  $j$ -ten Block der Partition  $\tilde{\Pi}(u)$  gemäß der Normierung vor Definition 3.11. Wir setzen ferner  $\tilde{\lambda}_j(u) := \Lambda(\tilde{B}_j(u))$ . Sei  $k =: k_1 < k_2 < \dots$  die aufsteigend geordnete Folge von Elementen des Blocks  $B_k(t)$ .

Wir zeigen, dass  $F(t+r) \cap I_k(t) = \sum_{i \geq 1} I_{k_i}(t+r)$  gegeben wird durch

$$F(t+r) \cap I_k(t) = \sum_{i \geq 1} g(\tilde{I}_i(r|I_k(t)|^\alpha)). \quad (16)$$

Hierbei sei  $\sum_{i \geq 1} \tilde{I}_i(\cdot) := F_{\tilde{\Pi}}(\cdot)$  und somit  $\tilde{I}_i(u) := (\tilde{x}_i, \tilde{x}_i + \tilde{\lambda}_i(u))$  für jedes  $i \geq 1$  und  $u \geq 0$ .

Wir wählen ein festes, aber beliebiges  $i \in \mathbb{N}$ . Der Zeitpunkt

$$t_{k_i} := \inf\{s \geq t : B_{k_i}(s) \neq \emptyset\}$$

kann offenbar umgeschrieben werden zu

$$t_{k_i} = t + |I_k(t)|^{-\alpha} \tilde{t}_i$$

$$\text{mit } \tilde{t}_i := \inf\{s \geq 0 : \tilde{B}_i(s) \neq \emptyset\}.$$

Bezug nehmend auf Darstellung (15) halten wir ferner

$$\lambda_{k_i}(t+u) = \lambda_k(t) \tilde{\lambda}_i(u|I_k(t)|^\alpha)$$

für  $u \geq 0$  fest. Mit Hilfe eines Induktionsarguments können wir nun  $x_{k_i} = g(\tilde{x}_i)$  nachweisen. Der Induktionsanfang  $x_{k_1} = x_k = g(\tilde{x}_1)$  ist wegen  $\tilde{x}_1 = 0$  trivialerweise

gegeben. Wir setzen  $x_{p(k_i)} = g(\tilde{x}_{\tilde{p}(i)})$  mit  $\tilde{p}(i)$  als dem Vorgänger von  $i$  bezüglich der Fragmentierung  $\tilde{\Pi}(\cdot)$  voraus und erhalten

$$\begin{aligned}
x_{k_i} &= x_{p(k_i)} + \lambda_{p(k_i)}(t_{k_i}) \\
&= g(\tilde{x}_{\tilde{p}(i)}) + \lambda_{p(k_i)}(t + |I_k(t)|^{-\alpha} \tilde{t}_i) \\
&= x_{p(k_i)} + \lambda_k(t) \tilde{\lambda}_{\tilde{p}(i)}(|I_k(t)|^{-\alpha} \tilde{t}_i |I_k(t)|^\alpha) \\
&= x_k + \tilde{x}_{\tilde{p}(i)} \lambda_k(t) + \lambda_k(t) \tilde{\lambda}_{\tilde{p}(i)}(\tilde{t}_i) \\
&= x_k + \tilde{x}_i \lambda_k(t) = g(\tilde{x}_i),
\end{aligned}$$

also die Induktionsbehauptung. Es ergibt sich insgesamt die Gleichung (16) vermöge

$$\begin{aligned}
I_{k_i}(t+r) &= (x_{k_i}, x_{k_i} + \lambda_{k_i}(t+r)) \\
&= (g(\tilde{x}_i), g(\tilde{x}_i) + \lambda_k(t) \tilde{\lambda}_i(r |I_k(t)|^\alpha)) \\
&= (g(\tilde{x}_i), g(\tilde{x}_i + \tilde{\lambda}_i(r |I_k(t)|^\alpha))) \\
&= g((\tilde{x}_i, \tilde{x}_i + \tilde{\lambda}_i(r |I_k(t)|^\alpha))) \\
&= g(\tilde{I}_i(r |I_k(t)|^\alpha)).
\end{aligned}$$

Die Fragmentierungseigenschaft der  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$ , d.h. die voneinander unabhängige Zerlegung der einzelnen Blöcke, gewährleistet, dass Gleichung (16) - entsprechend modifiziert - auch für alle anderen Intervalle der Intervallzerlegung  $(I_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  Bestand hat, so dass gegeben  $F_\Pi(t) = \sum_{k \geq 1} I_k(t)$  gilt:

$$F_\Pi(t+r) \stackrel{d}{=} \bigcup_{k \geq 1} g_{I_k(t)}(F^{(k)}(r |I_k(t)|^\alpha).$$

Dabei ist  $(F^{(k)}(\cdot))_{k \geq 1}$  eine Folge stochastisch unabhängiger Kopien von  $F_\Pi(\cdot)$ . Dies verifiziert gemäß Bemerkung 2.34 (b) die Selbstähnlichkeit von  $F_\Pi(\cdot)$  mit Index  $\alpha$  und beschließt den Beweis.

Zu (b): Gemäß Satz 3.10 ist  $\Pi_{F_\Pi}(\cdot)$  eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha$  und es gilt

$$\Lambda^\downarrow(\Pi_{F_\Pi}(t)) = \Lambda^\downarrow(\Pi(t))$$

fast sicher für alle  $t \geq 0$ . Nach Korollar 3.6 (a) haben austauschbare Zufallspartitionen mit denselben geordneten asymptotischen Frequenzen dieselbe Verteilung, d.h. die eindimensionalen Randverteilungen von  $\Pi(\cdot)$  und  $\Pi_{F_\Pi}(\cdot)$  stimmen überein. Bemerkung 2.16 (c) liefert die Behauptung.  $\square$

## 4. Homogene $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen

Homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen erfüllen die starke Markov-Eigenschaft, weisen eine genealogische Struktur auf, liefern zu jedem Zeitpunkt austauschbare Zufallspartitionen und sind deshalb prädestiniert dazu, genauer untersucht zu werden. Dieses Kapitel widmet sich dieser bereits angekündigten Aufgabe. Im ersten Abschnitt geben wir einen Existenzbeweis für homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen. Der zweite Abschnitt deckt auf, dass deren Verteilungen anhand zweier Parameter beschrieben werden können. Damit verbunden ist ein besseres Verständnis der Strukturen homogener Fragmentierungen.

### 4.1 Lévy-Itô-Dekomposition

Wir werden zeigen, dass eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Hilfe eines Poisson-Punkt-Prozesses konstruiert werden kann. Dabei wird dessen Verteilung durch das sogenannte *charakteristische Maß* eindeutig festgelegt. Als Erstes wollen wir dieses charakteristische Maß bestimmen. Dafür führen wir zunächst den Begriff des *austauschbaren Partitionsmaßes* ein.

**4.1. Definition.** Ein Maß  $\kappa$  auf  $(\mathcal{P}, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}})$  wird als *austauschbares Partitionsmaß* bezeichnet, falls gilt

- (1)  $\kappa$  ist austauschbar, d.h.  $\kappa$  ist invariant unter endlichen Permutationen,
- (2)  $\kappa(\{(\mathbb{N}, \emptyset, \dots)\}) = 0$ ,
- (3)  $\kappa(\mathcal{P}_n^*) < \infty$  für jedes  $n \geq 2$ .

Da  $\mathcal{P}_n^*$  (siehe dazu Definition 2.6 (e)) für alle  $n \geq 2$  ein kompakter Unterraum von  $\mathcal{P}$  ist und  $(\bigcup_{n \geq 2} \mathcal{P}_n^*)^c = \{(\mathbb{N}, \emptyset, \dots)\}$  gilt, ist ein austauschbares Partitionsmaß  $\sigma$ -endlich. Es reicht, anstelle von (3) die schwächere Forderung  $\kappa(\mathcal{P}_2^*) < \infty$  zu stellen. Definieren wir  $\{i \not\sim j\} := \{\Gamma \in \mathcal{P} : i \overset{\Gamma}{\not\sim} j\}$  für  $i \neq j$ , so gilt nämlich wegen der Austauschbarkeit  $\kappa(1 \not\sim 3) = \kappa(2 \not\sim 3) = \kappa(1 \not\sim 2) = \kappa(\mathcal{P}_2^*) < \infty$  und damit  $\kappa(\mathcal{P}_3^*) \leq 3\kappa(\mathcal{P}_2^*) < \infty$  oder allgemein  $\kappa(\mathcal{P}_n^*) \leq \frac{(n-1)n}{2}\kappa(\mathcal{P}_2^*) < \infty$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Der folgende Satz legt nun das charakteristische Maß einer homogenen



$\mathcal{P}$ -Fragmentierung fest.

**4.2. Satz.** *Gegeben eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot) = (\Pi(t), t \geq 0)$ , existiert ein (eindeutig bestimmtes) austauschbares Partitionsmaß  $\kappa$  auf  $(\mathcal{P}, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}})$ , so dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und für jede nicht-triviale Partition  $\pi_n \in \mathcal{P}_n$  gilt*

$$\kappa(\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n = \pi_n\}) = \left( \frac{1}{\mathbb{E}T(n)} \right) \mathbb{P}(\Pi_n(T(n)) = \pi_n)$$

mit  $T(n) := \inf\{t \geq 0 : \Pi(t) \in \mathcal{P}_n^*\}$  und  $\Pi_n(\cdot) := (\Pi(\cdot))_{\{1, \dots, n\}}$ .  $\kappa$  determiniert die Verteilung von  $\Pi(\cdot)$ .

**4.3. Definition.** Das soeben eingeführte austauschbare Partitionsmaß  $\kappa$  heißt *charakteristisches Maß* von  $\Pi(\cdot)$ .

BEWEIS VON SATZ 4.2: Wir wählen ein beliebiges  $n \geq 2$  und betrachten den Prozess  $\Pi_n(\cdot)$ . Offenbar ist  $\Pi_n(\cdot)$  wie  $\Pi(\cdot)$  ein zeitlich homogener Markov-Prozess, der die Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft erfüllt. Ferner bleiben càdlàg- und Feller-Eigenschaft bestehen. Es liegt also ein starker Markov-Prozess mit diskreten Sprungzeitpunkten vor. Die Stoppzeit

$$T(n) = \inf\{t \geq 0 : \Pi_n(t) \neq (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)\}$$

beschreibt den Zeitpunkt der ersten Zustandsänderung. Gemäß Bemerkung 2.21 gilt  $T(n) < \infty$  fast sicher. Nach einem Resultat der Wahrscheinlichkeitstheorie (vergleiche z.B. [Fa], S. 106f) besitzt  $T(n)$  eine Exponentialverteilung mit Parameter  $q(n) \in (0, \infty)$ . Mit  $p(n)$  sei die Verteilung von  $\Pi_n(T(n))$  bezeichnet.  $\Pi_n(T(n))$  und  $T(n)$  sind stochastisch unabhängig, denn gemäß der Markov-Eigenschaft und der zeitlichen Homogenität gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Pi_n(s+t) \in \cdot \mid T(n) > s) &= \mathbb{P}(\Pi_n(s+t) \in \cdot \mid \Pi_n(s) = (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_n(t) \in \cdot) \end{aligned}$$

für  $s, t \geq 0$  und damit

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\Pi_n(T(n)) \in \cdot \mid T(n) > s) \\ &= \mathbb{P}(s + \inf\{t \geq 0 : \Pi_n(s+t) \neq (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)\} \in \cdot \mid T(n) > s) \\ &= \mathbb{P}(\inf\{t \geq 0 : \Pi_n(t) \neq (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)\} \in \cdot) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_n(T(n)) \in \cdot) \end{aligned}$$

für  $s \geq 0$ .

Wir zeigen, dass  $q(n)$  und  $p(n)$  zusammen die Verteilung von  $\Pi_n(\cdot)$  eindeutig festlegen, indem wir ausschließlich unter Verwendung von  $q(n)$  und  $p(n)$  einen stochastischen Prozess konstruieren, der dieselbe Verteilung wie  $\Pi_n(\cdot)$  hat. Sei  $t > 0$  fest, aber beliebig und  $(\Pi_n^{(i)}(\cdot))_{i \geq 1}$  eine Folge stochastisch unabhängiger Kopien von  $\Pi_n(\cdot)$ . Wir definieren

$$T_i := \inf\{s \geq 0 : \Pi_n^{(i)}(s) \neq (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)\}$$

für  $i \geq 1$ .  $(T_i)_{i \geq 1}$  und  $(\Pi_n^{(i)}(T_i))_{i \geq 1}$  sind also Folgen stochastisch unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit  $T_1 \stackrel{d}{=} \text{Exp}(q(n))$  bzw.  $\Pi_n^{(1)}(T_1) \stackrel{d}{=} p(n)$ .

Aufgrund der Fragmentierungseigenschaft können wir die Betrachtung auf die Zerlegung eines Blockes beschränken. Zwecks Vereinfachung der Notation wählen wir den Block, der die 1 enthält, und definieren rekursiv

$$\Pi_n^{(1)}(T_1) =: (B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \dots) \quad \text{sowie} \quad \Pi_n^{(k)}(T_k) \circ B_1^{(k-1)} =: (B_1^{(k)}, B_2^{(k)}, \dots)$$

für  $k \geq 2$ . Die jeweiligen Verteilungen hängen offensichtlich nur von  $k$  und  $p(n)$  ab. Es sei  $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$  für  $n \geq 1$ . Nach einem Ergebnis über Poisson-Prozesse (vergleiche z.B. [Als1], S. 145) gilt

$$N_0 := \sum_{n \geq 1} 1_{[0, t]}(S_n) \stackrel{d}{=} \text{Poi}(q(n)t).$$

Unter Berücksichtigung der Skalierungseigenschaft und der starken Markov-Eigenschaft von  $\Pi_n(\cdot)$  erhalten wir folglich

$$B_1(t) \stackrel{d}{=} B_1^{(N_0)}$$

mit  $B_1(t)$  als dem ersten Block von  $\Pi_n(t)$  und  $B_1^0 := (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)$ . Da wir  $B_1^{(k)} = f(\Pi_n^{(1)}, \dots, \Pi_n^{(k)})$ ,  $k \geq 1$ , und  $N_0 = g(T_1, T_2, \dots)$  für geeignete Abbildungen  $f$  und  $g$  schreiben können, gewährleisten die Unabhängigkeitsannahmen und die nachgewiesene stochastische Unabhängigkeit von  $\Pi_n^{(i)}(T_i)$  und  $T_i$  für  $i \geq 1$ , dass  $B_1^{(N_0)}$  und  $N_0$  stochastisch unabhängig sind. Die eindimensionalen Verteilungen von  $\Pi_n(\cdot)$  werden somit durch  $q(n)$  und  $p(n)$  festgelegt. Nach Bemerkung 2.16 (c) ist dies hinreichend für die Fixierung der Verteilung von  $\Pi_n(\cdot)$ . Da  $p(n)(\mathcal{P}) = 1$  gilt, determiniert auch  $q(n)p(n)$  die Verteilung.

Als Nächstes betrachten wir den Fragmentierungsprozess  $\Pi_{n+1}(\cdot)$  der Partitionen von  $\Pi(\cdot)$  eingeschränkt auf  $\{1, \dots, n+1\}$ . Es besteht der Zusammenhang

$$\Pi_{n+1}(T(n+1)) \in \begin{cases} \{(\{1, \dots, n\}, \{n+1\}, \emptyset, \dots)\} & : \text{ falls } T(n+1) < T(n) \\ \mathcal{P}_{n+1}^{(n)*} & : \text{ falls } T(n+1) = T(n) \end{cases}$$

mit

$$\mathcal{P}_{n+1}^{(n)*} := \{\Gamma \in \mathcal{P}_{n+1} : \Gamma_n \neq (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)\}.$$

Die Sprungrate von  $\Pi_{n+1}(\cdot)$  auf  $\mathcal{P}_{n+1}^{(n)*}$  stimmt demnach mit  $q(n)$  überein. Wir behaupten ferner, dass  $p(n)$  der bedingten Verteilung von  $\Pi_{n+1}(T(n+1))$  eingeschränkt auf  $\{1, \dots, n\}$  gegeben  $\Pi_n(T(n+1)) \in \mathcal{P}_n^*$  entspricht. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Pi_n(T(n)) \in \cdot \mid T(n) > T(n+1)) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_n(T(n)) \in \cdot \mid \Pi_n(T(n+1)) = (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots), T(n) > T(n+1)) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_n(\inf\{t \geq T(n+1) : \Pi_n(t) \in \mathcal{P}_n^*\}) \in \cdot \mid \Pi_n(T(n+1)) = (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_n(T(n+1) \\ & \quad + \inf\{t \geq 0 : \Pi_n(T(n+1) + t) \in \mathcal{P}_n^*\}) \in \cdot \mid \Pi_n(T(n+1)) = (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)) \\ &= \mathbb{P}(\Pi_n(T(n)) \in \cdot) \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung haben wir die aufgrund der starken Markov-Eigenschaft gültige Identität

$$\mathbb{P}((\Pi_n(T(n+1) + t))_{t \geq 0} \in \cdot \mid \Pi_n(T(n+1)) = (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)) = \mathbb{P}((\Pi_n(t))_{t \geq 0} \in \cdot)$$

angewandt. Wegen  $\{T(n) > T(n+1)\} = \{\Pi_n(T(n+1)) \in \mathcal{P}_n^*\}^c$  ergibt sich wie behauptet

$$p(n)(\cdot) = \mathbb{P}(\Pi_n(T(n)) \in \cdot) = \mathbb{P}(\Pi_n(T(n+1)) \in \cdot \mid \Pi_n(T(n+1)) \in \mathcal{P}_n^*). \quad (17)$$

Als Nächstes wollen wir

$$\mathbb{P}(T(n) = T(n+1)) \mathbb{E}T(n) = \mathbb{E}T(n+1) \quad (18)$$

zeigen. Die starke Markov-Eigenschaft liefert

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T(n) - T(n+1) \in \cdot \mid T(n) > T(n+1)) \\ &= \mathbb{P}(T(n+1) + \inf\{t \geq 0 : \Pi_n(t + T(n+1)) \in \mathcal{P}_n^*\} \\ & \quad - T(n+1) \in \cdot \mid \Pi_n(T(n+1)) = (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)) \\ &= \mathbb{P}(T(n) \in \cdot). \end{aligned} \quad (19)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}T(n) &= \int_{\{T(n) > T(n+1)\}} T(n) - T(n+1) \, d\mathbb{P} + \int_{\{T(n) > T(n+1)\}} T(n+1) \, d\mathbb{P} + \\
&\quad \int_{\{T(n) = T(n+1)\}} T(n+1) \, d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{P}(T(n) > T(n+1)) \int_{\mathbb{R}} z \, \mathbb{P}(T(n) - T(n+1) \in dz | T(n) > T(n+1)) \\
&\quad + \mathbb{E}T(n+1) \\
&= \mathbb{P}(T(n) > T(n+1)) \mathbb{E}T(n) + \mathbb{E}T(n+1),
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile Identität (19) verwendet wurde. Auflösen nach  $\mathbb{E}T(n+1)$  führt wegen  $\mathbb{P}(T(n) > T(n+1)) = 1 - \mathbb{P}(T(n) = T(n+1))$  zur Gleichung (18). Definieren wir die Projektion

$$h_n^{n+1} : \mathcal{P}_{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n, \quad h_n^{n+1}(\Gamma) := \Gamma_n,$$

so können wir jetzt mit (17) und (18) folgern:

$$\begin{aligned}
q(n)p(n) &= \frac{1}{\mathbb{E}T(n)} \mathbb{P}(\Pi_n(T(n+1)) \in \cdot \mid \Pi_n(T(n+1)) \in \mathcal{P}_{n+1}^{(n)*}) \\
&= \frac{\left(p(n+1) \mathbf{1}_{\mathcal{P}_{n+1}^{(n)*}}\right)^{h_n^{n+1}}}{\mathbb{E}T(n) \mathbb{P}(\Pi_n(T(n+1)) \in \mathcal{P}_n^*)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}T(n+1)} \left(p(n+1) \mathbf{1}_{\mathcal{P}_{n+1}^{(n)*}}\right)^{h_n^{n+1}} \\
&= \left(q(n+1)p(n+1) \mathbf{1}_{\mathcal{P}_{n+1}^{(n)*}}\right)^{h_n^{n+1}}
\end{aligned}$$

Gemäß des Konsistenzsatzes von Kolmogorov (vgl. dazu etwa [Als1], S. 313ff) existiert ein eindeutig bestimmtes Maß  $\kappa$  auf  $(\mathcal{P}, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}})$  mit der Eigenschaft

$$q(n)p(n) = (\kappa \mathbf{1}_{\mathcal{P}_n^*})^{h_n},$$

wobei  $h_n : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_n$ ,  $h_n(\Gamma) := \Gamma_n$  für jedes  $n \geq 2$ , und  $\kappa(\{(\mathbb{N}, \emptyset, \dots)\}) = 0$ .

Wir behaupten, dass  $\kappa$  ein austauschbares Partitionsmaß ist. Aus der Austauschbarkeit von  $\Pi_n(\cdot)$  folgt die von  $p(n)$  für jedes  $n \geq 1$ . Falls  $\kappa$  nicht austauschbar ist, so existiert eine endliche Permutation  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $\sigma(n) = n$  für  $n \geq N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, mit der Eigenschaft

$$\kappa \mathbf{1}_{\mathcal{P}_N^*} \neq (\kappa \mathbf{1}_{\mathcal{P}_N^*})^\sigma.$$

Dies impliziert  $q(N)p(N) \neq (q(N)p(N))^\sigma$ , was aber im Widerspruch zur Austauschbarkeit von  $p(N)$  steht. Also ist  $\kappa$  austauschbar und in summa ein austauschbares Partitionsmaß.

Wie gezeigt legt  $q(n)p(n)$  die Verteilung des Fragmentierungsprozesses  $\Pi_n(\cdot)$  für jedes  $n \geq 1$  fest. Da

$$\Pi_n(t) \longrightarrow \Pi(t) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

bezüglich  $d_{\mathcal{P}}$  für  $t \geq 0$ , heißt dies, dass  $(q(n)p(n))_{n \geq 1}$  und damit auch  $\kappa$  die Verteilung von  $\Pi(\cdot)$  determiniert. Wegen  $T(n) \stackrel{d}{=} \text{Exp}(q(n))$ , d.h.  $\mathbb{E}T(n) = \frac{1}{q(n)}$ , gilt schließlich

$$\kappa(\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n = \pi_n\}) = q(n)p(n)(\{\pi_n\}) = \frac{1}{\mathbb{E}T(n)} \mathbb{P}(\Pi_n(T(n)) = \pi_n)$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und jede nicht-triviale Partition  $\pi_n$  von  $\{1, \dots, n\}$ .  $\square$

Wir wollen nun untersuchen, wie zu einem gegebenen austauschbaren Partitionsmaß  $\kappa$  eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit charakteristischem Maß  $\kappa$  konstruiert werden kann. Gemäß des vorherigen Satzes ist dies gleichbedeutend mit dem Versuch, eine Konstruktionsanleitung für alle möglichen homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen anzugeben. Ferner beweist es die Isomorphie zwischen der Menge der austauschbaren Partitionsmaße und der Menge der Verteilungen von homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen.

Als Ausgangspunkt wählen wir dafür einen Poisson-Punkt-Prozess (PPP)  $((\Delta_t, k_t), t \geq 0)$  auf  $(\mathcal{P} \times \mathbb{N}, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}} \otimes \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ , wobei  $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$  die Potenzmenge von  $\mathbb{N}$  sei. Er habe die Intensität  $\kappa \otimes \eta$  mit  $\eta$  als dem Zählmaß auf  $\mathbb{N}$ .<sup>2</sup> Das bedeutet insbesondere, dass für ein  $A \in \mathfrak{B}_{\mathcal{P}} \otimes \mathfrak{P}(\mathbb{N})$  mit  $\kappa \otimes \eta(A) < \infty$  der Zählprozess  $(N^A(t), t > 0)$ , definiert durch

$$N^A(t) := |\{s \in [0, t] : (\Delta_s, k_s) \in A\}|,$$

---

<sup>2</sup>Wir halten uns bei der Definition des Poisson-Punkt-Prozesses an [Ber2]. Dabei ist zu beachten, dass es hiervon abweichende Festlegungen gibt. So wird in [Ki2] ein PPP mit Intensität  $\mathfrak{K} \otimes \kappa \otimes \eta$  als Zufallsmaß  $\varphi$  auf  $[0, \infty) \times \mathcal{P} \times \mathbb{N}$  definiert mit  $\varphi([0, t] \times A) \stackrel{d}{=} \text{Poi}(t\kappa \otimes \eta(A)) \stackrel{d}{=} N^A(t)$  für  $t \geq 0$  und  $A \subset \mathcal{P} \times \mathbb{N}$ . Dabei lässt sich  $\varphi$  als  $\varphi = \sum_{i \geq 1} \delta_{\{T_i, \Delta'_i, k'_i\}}$  mit geeigneten Folgen  $(T_i)_{i \geq 1}$ ,  $(\Delta'_i)_{i \geq 1}$  und  $(k'_i)_{i \geq 1}$  von Zufallsvariablen (sogenannte Punkte des Prozesses) schreiben. Setzen wir

$$(\Delta_t, k_t) := \begin{cases} (\Upsilon, \Upsilon) & : \text{ falls } T_i \neq t \quad \forall i \geq 1 \\ (\Delta'_i, k'_i) & : \text{ falls } T_i = t \end{cases},$$

wobei  $(\Upsilon, \Upsilon) \notin \mathcal{P} \times \mathbb{N}$ , so erhalten wir den Poisson-Punkt-Prozess gemäß der von uns gewählten Definition.

ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\kappa \otimes \eta(A)$  ist, d.h.

$$N^A(t) \stackrel{d}{=} \text{Poi}(\kappa \otimes \eta(A)t)$$

für jedes  $t > 0$ . Für zwei disjunkte Mengen sind die zugehörigen Zählprozesse untereinander stochastisch unabhängig.

Wir kommen jetzt zur eigentlichen Konstruktion des Fragmentierungsprozesses. Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest, aber beliebig. Wir definieren einen stochastischen Prozess  $\Pi^{(n)}(\cdot) = (\Pi^{(n)}(t), t \geq 0)$  mit Werten in  $(\mathcal{P}_n, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}_n})$  durch  $\Pi^{(n)}(0) := (\{1, \dots, n\}, \emptyset, \dots)$  und

$$\Pi^{(n)}(t) := \begin{cases} \Delta_t \overset{k_t}{\circ} \Pi^{(n)}(t-) & : \text{ falls der PPP einen Punkt bei } t \text{ hat} \\ \Pi^{(n)}(t-) & : \text{ sonst} \end{cases}$$

für  $t > 0$ .

**4.4. Proposition.** *Es existiert ein in Wahrscheinlichkeit stetiger càdlàg-Prozess  $\Pi(\cdot) = (\Pi(t), t \geq 0)$  mit Werten in  $(\mathcal{P}, \mathfrak{B}_{\mathcal{P}})$ , so dass*

$$\Pi_n(t) = \Pi^{(n)}(t)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $t \geq 0$  gilt. Der Prozess wird gegeben durch  $\Pi(0) := (\mathbb{N}, \emptyset, \dots)$  und

$$\Pi(t) := \begin{cases} \Delta_t \overset{k_t}{\circ} \Pi(t-) & : \text{ falls der PPP einen Punkt bei } t \text{ hat} \\ \Pi(t-) & : \text{ sonst} \end{cases} \quad (20)$$

für  $t > 0$ .

BEWEIS: Im Falle  $\Delta \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_n^*$  oder  $k > n$  gilt

$$\Delta \overset{k}{\circ} \Gamma = \Gamma$$

für jedes  $\Gamma \in \mathcal{P}_n$ . Eigenschaft (2) der austauschbaren Partitionsmaße gewährleistet  $\kappa(\mathcal{P}_n^*) < \infty$  und damit die Diskretheit des Poisson-Punkt-Prozesses beschränkt auf  $\mathcal{P}_n^* \times \{1, \dots, n\}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Dies impliziert

$$\Pi^{(n)}(t) = \Pi^{(n)}(t-)$$

außer für eine diskrete Menge an Zeitpunkten. Dies heißt insbesondere, dass  $\Pi^{(n)}(\cdot)$  ein càdlàg-Prozess ist. Da außerdem  $(\Delta_t, k_t) \notin \mathcal{P}_n^* \times \{1, \dots, n\}$  fast sicher und damit  $\Pi_n(t) = \Pi_n(t-)$  fast sicher für alle  $t \geq 0$  gilt, folgt mit der rechtsseitigen Stetigkeit

von  $\Pi_n(\cdot)$  die Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit von  $\Pi_n(\cdot)$  für alle  $n \geq 1$ .

Wir weisen nach, dass die Familie  $(\Pi^{(n)}(t))_{n \in \mathbb{N}}$  konsistent ist für jedes  $t \geq 0$ . Seien  $0 =: t_0 < t_1 < t_2 < \dots$  die Zeitpunkte, zu denen der PPP einen Punkt in  $\mathcal{P}_{n+1}^* \times \{1, \dots, n+1\}$  hat. Um die Notation einfach zu halten, verzichten wir bei dieser pfadweisen Betrachtung auf die Angabe der Abhängigkeit von  $\omega \in \Omega$ . Mit Hilfe einer Induktion wollen wir

$$(\Pi^{(n+1)}(t_i))_n = \Pi^{(n)}(t_i)$$

für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  zeigen. Dabei liefert die Tatsache, dass die Einschränkung der trivialen Partition von  $\{1, \dots, n+1\}$  auf  $\{1, \dots, n\}$  wieder trivial ist, den Induktionsanfang  $(\Pi^{(n+1)}(t_0))_n = \Pi^{(n)}(t_0)$ . Setzen wir  $(\Pi^{(n+1)}(t_k))_n = \Pi^{(n)}(t_k)$  für  $k \leq K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , voraus, so folgt

$$\begin{aligned} (\Pi^{(n+1)}(t_{K+1}))_n &= (\Delta_{t_{K+1}}^{k_{t_{K+1}}^{K+1}} \Pi^{(n+1)}(t_{K+1}-))_n \\ &= \Delta_{t_{K+1}}^{k_{t_{K+1}}^{K+1}} (\Pi^{(n+1)}(t_{K+1}-))_n \\ &= \Delta_{t_{K+1}}^{k_{t_{K+1}}^{K+1}} (\Pi^{(n+1)}(t_K))_n \\ &= \Delta_{t_{K+1}}^{k_{t_{K+1}}^{K+1}} (\Pi^{(n)}(t_K)) \\ &= \Delta_{t_{K+1}}^{k_{t_{K+1}}^{K+1}} (\Pi^{(n)}(t_{K+1}-)) \\ &= \Pi^{(n)}(t_{K+1}) \end{aligned}$$

und damit die Induktionsbehauptung sowie die Konsistenz der Familie  $(\Pi^{(n)}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $t \geq 0$ . Für  $t \geq 0$  existiert nach Bemerkung 2.7 (b) eine eindeutig bestimmte  $\mathcal{P}$ -wertige Zufallsvariable  $\Pi(t)$  mit der Eigenschaft

$$(\Pi_n(t)) = \Pi^{(n)}(t)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Der Prozess  $(\Pi(t), t \geq 0)$  lässt sich offenbar beschreiben durch  $\Pi(0) = (\mathbb{N}, \emptyset, \dots)$  und Gleichung (20).

Die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{P}}(\Pi(t), \Pi(t+s)) &\leq d_{\mathcal{P}}(\Pi^{(n)}(t), \Pi^{(n)}(t+s)) + 2^{-(n+1)} \\ d_{\mathcal{P}}(\Pi(t-r), \Pi(t-)) &\leq d_{\mathcal{P}}(\Pi^{(n)}(t-r), \Pi^{(n)}(t-)) + 2^{-(n+1)} \end{aligned}$$

für  $t \geq 0$ ,  $s \in [-t, \infty)$  und  $r \in [0, t]$  gewährleistet, dass  $\Pi(\cdot)$  ein in Wahrscheinlichkeit stetiger càdlàg-Prozess ist.  $\square$

Wir haben unter Verwendung eines Poisson-Punkt-Prozesses einen  $\mathcal{P}$ -wertigen càdlàg-Prozess  $\Pi(\cdot)$  konstruiert. Das folgende Theorem wird nun herausstellen, dass dieser Prozess die eingangs intendierten Eigenschaften aufweist.

**4.5. Theorem.** *Der in Proposition 4.4 eingeführte  $\mathcal{P}$ -wertige Prozess  $\Pi(\cdot)$  ist eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit charakteristischem Maß  $\kappa$ .*

BEWEIS: Da die Poisson-Punkt-Prozesse eingeschränkt auf  $\mathcal{P}_n^* \times \{i\}$  und  $\mathcal{P}_n^* \times \{j\}$  für  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i \neq j$ , stochastisch unabhängig sind, erfolgt die Zerlegung der einzelnen Blöcke von  $\Pi_n(\cdot)$  für beliebiges  $n \geq 1$  und damit von  $\Pi(\cdot)$  unabhängig voneinander. Sei  $t \geq 0$  fest, aber beliebig. Wegen der Gedächtnislosigkeit von Poisson-Punkt-Prozessen lässt sich der gemäß Proposition 4.4 aus  $((\Delta_{t+r}, k_{t+r}), r \geq 0)$  konstruierte  $\mathcal{P}$ -wertige Prozess  $\Pi'(\cdot)$  als Kopie von  $\Pi(\cdot)$  auffassen, die stochastisch unabhängig von  $(\Pi(s), s \leq t)$  ist. Gegeben  $\Pi(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots)$  gilt nach Definition von  $\Pi(\cdot)$

$$\Pi'(r) \circ B_i(t) \stackrel{d}{=} (\Pi(r+t))_{B_i(t)}$$

für  $i \geq 1$  und  $r \geq 0$ . Da sich die bei Poisson-Punkt-Prozessen vorliegende Markov-Eigenschaft auf  $\Pi(\cdot)$  überträgt, genügt  $\Pi(\cdot)$  insgesamt der Markov-, Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft.

Unser nächstes Anliegen ist die Überprüfung der Austauschbarkeit von  $\Pi(\cdot)$ . Hierbei reicht es, endliche Permutationen  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  zu betrachten mit  $\sigma(n) := n+1$ ,  $\sigma(n+1) := n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $\sigma(i) := i$  für  $i \notin \{n, n+1\}$ . Zur Vereinfachung der Notation sei  $n = 1$  gewählt. Für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  ist die Argumentation identisch. Es sei  $T(n)$  für  $n \geq 2$  wie in Satz 4.2 definiert. Es gilt dann

$$\begin{aligned} 1, 2 \in B_1(t) & \quad \text{für} \quad t < T(2), \\ 2 \in B_2(t) & \quad \text{für} \quad t \geq T(2). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von  $\Pi(\cdot)$  lässt sich  $T(2)$  auch beschreiben durch

$$T(2) = \inf\{t \geq 0 : \Delta_t \in \mathcal{P}_2^* \text{ und } k_t = 1\}.$$

Wir betrachten nun den Punkt-Prozess  $((\tilde{\Delta}_t, \tilde{k}_t), t \geq 0)$ , definiert durch:

$$\tilde{\Delta}_t := \begin{cases} \Delta_t & : \text{ für } t \neq T(2) \\ \sigma(\Delta_T) & : \text{ für } t = T(2) \end{cases}, \quad \tilde{k}_t := \begin{cases} k_t & : \text{ für } k_t \geq 3 \text{ oder } t \leq T(2) \\ 1 & : \text{ für } k_t = 2 \text{ und } t > T(2) \\ 2 & : \text{ für } k_t = 1 \text{ und } t > T(2) \end{cases}.$$



Aufgrund der Austauschbarkeit von  $\kappa$  hat  $\tilde{\Delta}_{T(2)}$  dieselbe Verteilung wie  $\Delta_{T(2)}$ . Die Austauschbarkeit des Zählmaßes begründet die Verteilungsgleichheit von  $(k_t, t \geq 0)$  und  $(\tilde{k}_t, t \geq 0)$ . Die Unabhängigkeit zwischen  $(\Delta_t, t \geq 0)$  und  $(k_t, t \geq 0)$  bzw.  $(\tilde{\Delta}_t, t \geq 0)$  und  $(\tilde{k}_t, t \geq 0)$  sowie zwischen Punktprozessen beschränkt auf disjunkte Mengen hat zur Konsequenz, dass  $((\tilde{\Delta}_t, \tilde{k}_t), t \geq 0)$  so verteilt ist wie  $((\Delta_t, k_t), t \geq 0)$ . Nach Definition des Prozesses  $((\tilde{\Delta}_t, \tilde{k}_t), t \geq 0)$  gilt

$$\sigma(\Pi(t)) = \begin{cases} \tilde{\Delta}_t \overset{\tilde{k}_t}{\circ} \sigma(\Pi(t-)) & : \text{ falls } ((\tilde{\Delta}_t, \tilde{k}_t), t \geq 0) \text{ einen Punkt in } t \text{ hat} \\ \sigma(\Pi(t-)) & : \text{ sonst} \end{cases}.$$

Also haben  $\Pi(\cdot)$  und  $\sigma(\Pi(\cdot))$  dieselbe Verteilung. Dies beweist die Austauschbarkeit von  $\Pi(\cdot)$ .

Es bleibt nachzuweisen, dass  $\kappa$  das charakteristische Maß von  $\Pi(\cdot)$  ist. Gemäß der Eigenschaft von Poisson-Punkt-Prozessen gilt

$$T(n) \stackrel{d}{=} \text{Exp}(\kappa \otimes \eta(\mathcal{P}_n^* \times \{1\})) = \text{Exp}(\kappa(\mathcal{P}_n^*)),$$

also  $\mathbb{E}T(n) = \frac{1}{\kappa(\mathcal{P}_n^*)}$ . Für eine nicht-triviale Partition  $\pi_n$  von  $\{1, \dots, n\}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Pi_n(T(n)) = \pi_n) &= \mathbb{P}((\Delta_{T(n)}, k_{T(n)}) \in \{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n = \pi_n\} \times \{1\}) \\ &= \frac{\kappa(\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n = \pi_n\})}{\kappa(\mathcal{P}_n^*)} \\ &= \mathbb{E}T(n) \kappa(\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n = \pi_n\}). \end{aligned}$$

Demnach ist  $\kappa$  das charakteristische Maß von  $\Pi(\cdot)$ . □

Die soeben präsentierte Konstruktion von  $\Pi(\cdot)$  kann als Lévy-Itô-Dekomposition von homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen aufgefasst werden. Aufbauend auf der Existenz des Poisson-Punkt-Prozesses  $((\Delta_t, k_t), t \geq 0)$  (vgl. z.B. [Ki2]), können wir als Fazit aus Satz 4.2 und Theorem 4.5 festhalten:

**4.6. Bemerkungen.** (a) Die Existenz homogener  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen ist sichergestellt. Zur Verteilung einer homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung korrespondiert ein austauschbares Partitionsmaß.

(b) Die Eigenschaften (1) und (2) aus Definition 2.14 werden von der konstruierten  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  ebenfalls erfüllt, wie Korollar 6.12 zeigen wird.

(c) Gemäß Lemma 2.15 können wir, anstatt  $\Pi(\cdot)$  durch Gleichung (20) festzulegen, auch  $\Pi(0) := (\mathbb{N}, \emptyset, \dots)$  und

$$\Pi(t)_{B_k(t-)} := \begin{cases} (\Delta_t)_{B_k(t-)} & : \text{ falls der PPP einen Punkt bei } t \text{ hat und } k_t = k \text{ gilt} \\ B_k(t-) & : \text{ sonst} \end{cases}$$

für  $t > 0$  und  $k \in \mathbb{N}$  setzen.

(d) Nach Satz 3.7, 3.8, 3.10 und 3.14 gilt die Aussage von Teil (a) auch für homogene  $S^\downarrow$ -und Intervall-Fragmentierungen.

## 4.2 Zerlegung von austauschbaren Partitionsmaßen

Die anfangs möglicherweise redundant erscheinende Forderung der Austauschbarkeit wird sich in diesem Abschnitt als wesentlich erweisen. Die im vorherigen Abschnitt etablierte Bedeutung austauschbarer Partitionsmaße veranlasst uns dazu, diese Maße genauer zu untersuchen. Da austauschbare Partitionsmaße im Allgemeinen nicht endlich sind, können wir nicht ohne Weiteres auf ein Resultat vergleichbar mit Satz 3.5 hoffen. Wir werden aber sehen, dass insbesondere auf der Basis dieses Satzes, eine generelle einfache Strukturaussage möglich ist. Dafür sollen zunächst zwei Klassen von Partitionsmaßen vorgestellt werden.

**4.7. Definition.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\epsilon_n := [\mathbb{N} \setminus \{n\}, \{n\}, \emptyset, \dots] \in \mathcal{P}$ . Für  $c \geq 0$  sei  $\mu_c$  definiert durch

$$\mu_c := c \sum_{n \geq 1} \delta_{\epsilon_n}.$$

$\mu_c$  wird als *Erosionsmaß* mit *Erosionsrate*  $c$  bezeichnet.

**4.8. Bemerkung.**  $\mu_c$  ist offenbar austauschbar und es gilt  $\mu_c(\{(\mathbb{N}, \emptyset, \dots)\}) = 0$  sowie  $\mu_c(\mathcal{P}_n^*) = cn < \infty$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Also ist  $\mu_c$  ein austauschbares Partitionsmaß.

Im Rahmen der zweiten Klasse von austauschbaren Partitionsmaßen betrachten wir Mischungen von  $s$ -Paintbox-Prozessen mit dem Mischungsmaß  $\nu$ . Dabei sei  $\nu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß auf  $S^* := S^\downarrow \setminus \{(1, 0, \dots)\}$  mit

$$\int_{S^*} 1 - s_1 \nu(ds) < \infty \quad (21)$$

für  $s = (s_1, s_2, \dots)$ .  $\mu_s$  sei die in Abschnitt 3.1 (Definition 3.3) eingeführte Verteilung eines  $s$ -Paintbox-Prozesses. Wir wollen dies hier spezifizieren: Sei  $(X_i^{(s)})_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge stochastisch unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit der Verteilung

$\mathbb{P}(X_1^{(s)} = n) = s_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbb{P}(X_1^{(s)} = 0) = 1 - \sum_{n \geq 1} s_n$ . Eine austauschbare Zufallspartition werde durch die Äquivalenzrelation

$$i \sim j \quad :\Leftrightarrow \quad X_i^{(s)} = X_j^{(s)} > 0$$

für  $i, j \in \mathbb{N}$  definiert.  $\mu_s$  sei die Verteilung dieser Zufallspartition.

**4.9. Definition.**  $\nu$  und  $\mu_s$  für  $s \in S^*$  seien entsprechend obiger Ausführungen gegeben. Dann wird

$$\mu_\nu(\cdot) := \int_{S^*} \mu_s(\cdot) \nu(ds)$$

als *Dislokationsmaß mit Lévy-Maß*  $\nu$  bezeichnet.

Wir weisen darauf hin, dass die Maße  $\mu_s$ ,  $\mu_c$  und  $\mu_\nu$  anhand der Indizierung stets unterscheidbar sein werden. Der Vorteil einer einfachen Notation überwiegt unserer Meinung nach in diesem Fall den Nachteil der Verwechslungsgefahr.

**4.10. Proposition.**  $\mu_\nu$  ist ein austauschbares Partitionsmaß.

BEWEIS: Die Austauschbarkeit von  $\mu_\nu$  ist offensichtlich bzw. nach Satz 3.5 gegeben.

Aus  $\mu_s(\{(\mathbb{N}, \emptyset, \dots)\}) = 0$  für alle  $s \in S^*$  folgt

$$\mu_\nu(\{(\mathbb{N}, \emptyset, \dots)\}) = \int_{S^*} \mu_s(\{(\mathbb{N}, \emptyset, \dots)\}) \nu(ds) = 0.$$

Zu überprüfen ist noch Eigenschaft (3) der austauschbaren Partitionsmaße. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und  $s \in S^*$  gilt

$$\begin{aligned} \mu_s(\mathcal{P}_n^*) &= 1 - \mu_s(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_n^*) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1^{(s)} = \dots = X_n^{(s)}) \\ &= 1 - \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X_1^{(s)} = \dots = X_n^{(s)} = k) \\ &= 1 - \sum_{k \geq 1} s_k^n \\ &\leq 1 - s_1^n \\ &= (1 - s_1)(1 + s_1 + \dots + s_1^{n-1}) \leq (1 - s_1)n. \end{aligned}$$

Daraus resultiert gemäß der Vorgabe (21)

$$\mu_\nu(\mathcal{P}_n^*) \leq n \int_{S^*} 1 - s_1 \nu(ds) < \infty,$$

d.h.  $\mu_\nu$  ist ein austauschbares Partitionsmaß.  $\square$

Das folgende Theorem legt nun die Bedeutung von Erosions- und Dislokationsmaß offen, die darin zum Ausdruck kommt, dass jedes austauschbare Partitionsmaß  $\kappa$  kanonisch in ein Erosionsmaß  $\mu_c$  und ein Dislokationsmaß  $\mu_\nu$  zerlegt werden kann.

**4.11. Theorem.** *Sei  $\kappa$  ein austauschbares Partitionsmaß. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes  $c \geq 0$  und ein eindeutig bestimmtes Lévy-Maß  $\nu$  auf  $S^*$ , so dass  $\kappa = \mu_c + \mu_\nu$  gilt. Es gilt im Einzelnen:*

- (a) *Für  $\kappa$ -fast alle  $\Gamma \in \mathcal{P}$  existieren die geordneten asymptotischen Frequenzen  $\Lambda^\downarrow(\Gamma)$  mit  $\Lambda(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{1 \leq i \leq n : i \in B\}|$  für  $B \subset \mathbb{N}$ .*
- (b) *Die Beschränkung von  $\kappa$  auf die Teilmenge der Partitionen  $\Gamma$  mit  $\Lambda^\downarrow(\Gamma) \neq (1, 0, \dots)$  ist ein Dislokationsmaß  $\mu_\nu$  mit Levy-Maß  $\mathbf{1}_{S^*} \kappa^{\Lambda^\downarrow}$ .*
- (c) *Die Beschränkung von  $\kappa$  auf die Teilmenge der Partitionen  $\Gamma$  mit  $\Lambda^\downarrow(\Gamma) = (1, 0, \dots)$  ist ein Erosionsmaß  $\mu_c$  mit eindeutig bestimmter Erosionsrate  $c \geq 0$ .*

BEWEIS: Zu (a): Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\kappa_n$  die Beschränkung von  $\kappa$  auf  $\mathcal{P}_n^*$ , d.h.  $\kappa_n := \mathbf{1}_{\mathcal{P}_n^*} \kappa$ . Dann ist  $\kappa_n$  ein endliches Maß, invariant unter endlichen Permutationen  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\sigma(i) = i$  für  $i \leq n$ . Wir definieren  $\vec{\kappa}_n$  als  $\kappa_n^{\rho_n}$  mit  $\rho_n : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ , festgelegt durch die Äquivalenzrelation

$$i \stackrel{\rho_n(\Gamma)}{\sim} j \quad :\Leftrightarrow \quad i + n \stackrel{\Gamma}{\sim} j + n$$

für  $i, j \in \mathbb{N}$ . Wir behaupten, dass  $\vec{\kappa}_n$  austauschbar ist. Es sei  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine beliebige endliche Permutation. Wir definieren eine weitere endliche Permutation  $\dot{\sigma} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  durch

$$\dot{\sigma}(i) := \begin{cases} i & : \text{ falls } i \leq n \\ \sigma(i - n) + n & : \text{ falls } i \geq n + 1 \end{cases},$$

für die nach obiger Anmerkung  $\kappa_n^{\dot{\sigma}} = \kappa_n$  gilt. Wir erhalten für  $\Gamma \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \vec{\kappa}_n(\sigma^{-1}(\Gamma)) &= \kappa_n(\{\Gamma' \in \mathcal{P} : i + n \stackrel{\Gamma'}{\sim} j + n \Leftrightarrow i \stackrel{\sigma^{-1}(\Gamma)}{\sim} j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}\}) \\ &= \kappa_n(\{\Gamma' \in \mathcal{P} : \sigma^{-1}(i) + n \stackrel{\Gamma'}{\sim} \sigma^{-1}(j) + n \Leftrightarrow i \stackrel{\Gamma}{\sim} j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa_n(\{\Gamma' \in \mathcal{P} : i+n \stackrel{\dot{\sigma}(\Gamma')}{\sim} j+n \Leftrightarrow i \stackrel{\Gamma}{\sim} j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}\}) \\
&= \kappa_n^{\dot{\sigma}^{-1}}(\{\Gamma' \in \mathcal{P} : i+n \stackrel{\Gamma'}{\sim} j+n \Leftrightarrow i \stackrel{\Gamma}{\sim} j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}\}) \\
&= \kappa_n(\{\Gamma' \in \mathcal{P} : i+n \stackrel{\Gamma'}{\sim} j+n \Leftrightarrow i \stackrel{\Gamma}{\sim} j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}\}) \\
&= \vec{\kappa}_n(\Gamma),
\end{aligned}$$

was die Austauschbarkeit beweist.  $\vec{\kappa}_n$  ist ein austauschbares endliches Maß auf  $\mathcal{P}$  und gemäß Korollar 3.6 (b) haben  $\vec{\kappa}_n$ -fast alle Partitionen geordnete asymptotische Frequenzen. Da offenbar

$$\Lambda^\downarrow(\Gamma) = \Lambda^\downarrow(\rho_n(\Gamma))$$

für alle  $\Gamma \in \mathcal{P}_n^*$  gilt, besitzen auch  $\kappa_n$ -fast alle Partitionen geordnete asymptotische Frequenzen. Wegen  $\mathcal{P} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n^* = \{(\mathbb{N}, \emptyset, \dots)\}$  folgt damit die Behauptung.

Zu (b): Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest, aber beliebig.  $\vec{\kappa}_n$  hat nach Korollar 3.6 (b) die Darstellung

$$\vec{\kappa}_n(d\Gamma) = \int_{S^\downarrow} \mu_s(d\Gamma) \vec{\kappa}_n(\Lambda^\downarrow \in ds) \quad (22)$$

für  $\Gamma \in \mathcal{P}$ . Wir schreiben  $\{i \not\sim j\}$  für das Ereignis, dass  $i$  und  $j$  nicht im selben Block enthalten sind. Es gilt für  $s \in S^\downarrow$

$$\begin{aligned}
\kappa_n(\{n+1 \not\sim n+2\} | \Lambda^\downarrow = s) &= \vec{\kappa}_n(\{1 \not\sim 2\} | \Lambda^\downarrow = s) \\
&= \mu_s(1 \not\sim 2) \\
&= 1 - \sum_{k \geq 1} s_k^2 \\
&\geq 1 - s_1 \left( \sum_{k \geq 1} s_k \right) \\
&\geq 1 - s_1.
\end{aligned}$$

Für  $\nu_n := \mathbf{1}_{S^*} \kappa_n^{\Lambda^\downarrow}$  folgt dann bei Beachtung der Austauschbarkeit und  $\sigma$ -Endlichkeit von  $\kappa$

$$\begin{aligned}
\int_{S^*} (1 - s_1) \nu_n(ds) &\leq \kappa_n(n+1 \not\sim n+2) \leq \kappa(n+1 \not\sim n+2) \\
&= \kappa(1 \not\sim 2) = \kappa(\mathcal{P}_2^*) < \infty.
\end{aligned}$$

Da  $n \in \mathbb{N}$  beliebig gewählt war, ergibt sich damit für  $\nu := \mathbf{1}_{S^*} \kappa^{\Lambda^\downarrow}$  unter Berücksichtigung von  $\mathcal{P}_n^* \uparrow \mathcal{P} \setminus \{(\mathbb{N}, \emptyset, \dots)\}$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\mathbf{1}_{S^*} \Lambda^\downarrow((\mathbb{N}, \emptyset, \dots)) = 0$  sowie durch Anwendung des Funktionserweiterungsarguments

$$\int_{S^*} (1 - s_1) \nu(ds) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S^*} (1 - s_1) \nu_n(ds) \leq \kappa(\mathcal{P}_2^*) < \infty.$$

$\nu$  ist also ein Levy-Maß auf  $S^*$ .

Wir fixieren nun ein  $k \in \mathbb{N}$  und betrachten eine nicht-triviale Partition  $\pi_k$  von  $\{1, \dots, k\}$ . Wegen

$$\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_{\{k+1, \dots, k+n\}} \text{ ist nicht trivial, } \Lambda^\downarrow(\Gamma) \in S^*\} \uparrow \{\Gamma \in \mathcal{P} : \Lambda^\downarrow(\Gamma) \in S^*\}$$

für  $n \rightarrow \infty$  gilt gemäß der Stetigkeit von unten bei Maßen

$$\begin{aligned} & \kappa(\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_k = \pi_k, \Lambda^\downarrow(\Gamma) \in S^*) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_k = \pi_k, \Gamma_{\{k+1, \dots, k+n\}} \text{ ist nicht trivial, } \Lambda^\downarrow(\Gamma) \in S^*). \end{aligned} \quad (23)$$

Sei  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine endliche Permutation, definiert durch

$$\sigma(i) := \begin{cases} n+i & : \quad \text{falls } 1 \leq i \leq k \\ i-k & : \quad \text{falls } k+1 \leq i \leq k+n \\ i & : \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Weil  $\kappa$  austauschbar ist und endliche Permutationen die asymptotischen Frequenzen nicht beeinflussen, gilt

$$\begin{aligned} & \kappa(\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_k = \pi_k, \Gamma_{\{k+1, \dots, k+n\}} \text{ ist nicht trivial, } \Lambda^\downarrow(\Gamma) \in S^*) \\ &= \kappa(\sigma(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{P}, \Gamma_k = \pi_k, \Gamma_{\{k+1, \dots, k+n\}} \text{ ist nicht trivial, } \Lambda^\downarrow(\Gamma) \in S^*) \\ &= \kappa(\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n \in \mathcal{P}_n^*, (\rho_n(\Gamma))_k = \pi_k, \Lambda^\downarrow(\Gamma) \in S^*) \\ &= \vec{\kappa}_n(\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_k = \pi_k, \Lambda^\downarrow(\Gamma) \in S^*). \end{aligned} \quad (24)$$

Insgesamt folgt dann mit den Gleichungen (22), (23) und (24)

$$\begin{aligned} \kappa(\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_k = \pi_k, \Lambda^\downarrow(\Gamma) \in S^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\kappa}_n(\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_k = \pi_k, \Lambda^\downarrow(\Gamma) \in S^*) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S^*} \mu_s(\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_k = \pi_k\}) \nu_n(ds) \\ &= \int_{S^*} \mu_s(\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_k = \pi_k\}) \nu(ds) \end{aligned}$$

und damit aufgrund der Beliebigkeit von  $k$  die Behauptung.

Zu (c): Es sei

$$\kappa' := \mathbf{1}_{\{\Gamma \in \mathcal{P}_2^* : \Lambda^\downarrow(\Gamma) = (1, 0, \dots)\}} \kappa.$$

$\kappa'$  ist endlich wegen  $\kappa(\mathcal{P}_2^*) < \infty$ . Sei  $\vec{\kappa}'$  das Bildmaß von  $\kappa'$  unter der Abbildung  $\rho_2$ .  $\vec{\kappa}'$  ist - wie in Teil (a) gesehen - ein austauschbares endliches Maß auf  $\mathcal{P}$ , und es gilt  $\Lambda^\downarrow(\Gamma) = (1, 0, \dots)$  für  $\vec{\kappa}'$ -fast alle Partitionen. Dies impliziert, dass  $\vec{\kappa}'$  die

Gestalt  $\vec{\kappa}' = d\delta_{\Gamma^t}$  mit  $\Gamma^t$  als trivialer Partition von  $\mathbb{N}$  für ein  $d \geq 0$  besitzen muss. Angewandt auf  $\kappa'$  ergibt sich

$$\kappa' = c_1\delta_{\Gamma'} + c_2\delta_{\Gamma''} + c_3\delta_{\Gamma'''}$$

mit

$$\begin{aligned}\Gamma' &:= (\{1\}, \mathbb{N} \setminus \{1\}, \emptyset, \dots), \\ \Gamma'' &:= (\mathbb{N} \setminus \{2\}, \{2\}, \emptyset, \dots), \\ \Gamma''' &:= (\{1\}, \{2\}, \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}, \emptyset, \dots)\end{aligned}$$

sowie  $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ . Setzen wir  $c_3 > 0$  voraus, so folgt aus

$$\{1 \not\sim 2\} \supset \{(\{1\}, \{n\}, \mathbb{N} \setminus \{1, n\}, \emptyset, \dots) : n \geq 2\}$$

zusammen mit der Austauschbarkeit von  $\kappa$

$$\kappa(1 \not\sim 2) \geq c_3\infty = \infty,$$

was ein Widerspruch zu  $\kappa(\mathcal{P}_2^*) < \infty$  ist. Also gilt  $c_3 = 0$ . Die Austauschbarkeit von  $\kappa$  liefert außerdem  $c_1 = c_2 =: c$ , d.h.  $\kappa' = c\delta_{\Gamma'} + c\delta_{\Gamma''} = c\delta_{\epsilon_1} + c\delta_{\epsilon_2}$ .

Eine erneute Anwendung der Austauschbarkeit begründet  $\kappa(\epsilon_i) = c$  für alle  $i \geq 1$ . Mit analoger Argumentation wie für  $\kappa'$  bzw.  $\Gamma'''$  erhalten wir  $\kappa(\Gamma) = 0$  für  $\Gamma \in \mathcal{P}_n^*$  mit  $\Lambda^\downarrow(\Gamma) = (1, 0, \dots)$  und  $\Gamma \notin \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Insgesamt können wir

$$\mathbf{1}_{\{\Gamma \in \mathcal{P}: \Lambda^\downarrow(\Gamma) = (1, 0, \dots)\}} \kappa = c \sum_{i \geq 1} \delta_{\epsilon_i} = \mu_c$$

schließen. □

**4.12. Bemerkung.** Natürlich ist  $\mu_\nu + \mu_c$  für jedes Lévy-Maß  $\nu$  und jede Erosionsrate  $c$  wieder ein austauschbares Partitionsmaß.

Wir haben gezeigt, dass zu jedem austauschbaren Partitionsmaß ein Paar  $(\nu, c)$  mit  $\nu$  als Lévy-Maß und  $c$  als Erosionsrate korrespondiert. Zusammen mit Satz 4.2 heißt dies, dass die Verteilung einer homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung durch das Paar  $(\nu, c)$  eindeutig festgelegt wird. Gemäß Theorem 4.5 ist es möglich, bei Vorgabe von  $\nu$  und  $c$  eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung zu konstruieren, dessen charakteristisches Maß kanonisch in  $\mu_\nu$  und  $\mu_c$  zerlegt werden kann. Wir halten fest:

**4.13. Korollar.** *Zur Verteilung einer homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung korrespondieren ein Lévy-Maß  $\nu$  und eine Erosionsrate  $c$ , so dass  $\mu_\nu + \mu_c$  das charakteristische Maß der homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung ist.*

Aus Theorem 4.11 wird ferner ersichtlich, dass bei einer homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung nur Partitionen von Belang sind, deren Blöcke entweder unendlich viele Elemente, ein oder kein Element enthalten. Auf die Bedeutung der Begriffe Erosion als kontinuierlicher und Dislokation als abrupter Zerfall wird in Kapitel 6 im Rahmen der Betrachtung asymptotischer Frequenzen noch näher eingegangen.



## 5. Nichthomogene $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen

Im vorangehenden Kapitel haben wir uns ausschließlich mit homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen auseinandergesetzt. Um die dort erzielten Ergebnisse, insbesondere die Charakterisierung der Verteilung durch ein Paar  $(\nu, c)$  mit einem Lévy-Maß  $\nu$  und einer Erosionsrate  $c$  auf nichthomogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen übertragen zu können, bedarf es der Anwendung einer Zeittransformation. Als problematisch erweist sich jedoch, dass die asymptotischen Frequenzen kein stetiges Funktional der Partitionen sind, somit die Feller-Eigenschaft für selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen nicht nachweisbar und die Substitution der Zeit durch geeignete Stoppzeiten nicht durchführbar ist.

Als Ausweg bietet sich der Umweg über selbstähnliche Intervall-Fragmentierungen an, die - wie in Satz 2.39 gezeigt - der Feller-Eigenschaft genügen. Mit Hilfe der sogenannten *erweiterten Fragmentierungseigenschaft* werden wir homogene Intervall-Fragmentierungen in nichthomogene überführen et vice versa. Basierend auf der in Abschnitt 3.3 vorgestellten Möglichkeit, einander entsprechende Intervall- und  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen zu konstruieren, können wir in Abschnitt 5.3 das Hauptresultat dieser Arbeit für selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen vorstellen. Dabei gewährleistet Kapitel 3 die Übertragbarkeit auf  $S^\downarrow$ - und Intervall-Fragmentierungen.

### 5.1 Die erweiterte Fragmentierungseigenschaft bei Intervall-Fragmentierungen

Die *erweiterte Fragmentierungseigenschaft* wird die sogenannten *Frosts* zur Grundlage haben, die aus diesem Grunde zunächst eingeführt werden. Sei im Folgenden  $F(\cdot) = (F(t), t \geq 0)$  eine selbstähnliche Intervall-Fragmentierung. Für  $t \geq 0$  und  $x \in (0, 1)$  werde mit  $I_x(t)$  wieder das  $x$  enthaltende Intervall der Intervallzerlegung von  $F(t)$  bezeichnet, falls  $x \in F(t)$  gilt; ansonsten setzen wir  $I_x(t) = \emptyset$ . Nach Proposition 2.38 haben wir außerdem  $I_x(\infty) = \emptyset$  fast sicher für alle  $x \in (0, 1)$ . Wir schreiben  $(\mathcal{F}_t^x)_{t \geq 0}$  für die natürliche, rechtsseitig stetige Filtration des Prozesses  $(I_x(t), t \geq 0)$ , d.h.  $\mathcal{F}_t^x = \sigma(\mathcal{N} \cup \sigma(I_x(s), s \leq t))$  mit  $\mathcal{N} := \{N \in \mathfrak{A} : \mathbb{P}(N) = 0\}$  für

alle  $t \geq 0$ .

**5.1. Definition.** Eine Zufallsfunktion  $T : (0, 1) \rightarrow [0, \infty]$ , definiert auf  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , wird als *Frost* bezüglich einer Intervall-Fragmentierung  $F(\cdot)$  bezeichnet, falls gilt:

- (1) Für jedes  $x \in (0, 1)$  ist  $T(x)$  eine  $(\mathcal{F}_t^x)_{t \geq 0}$ -Stoppzeit.
- (2) Für jedes  $x \in (0, 1)$  und  $y \in I_x(T(x))$  gilt  $T(x) = T(y)$ .

Ein triviales Beispiel für einen Frost ist eine konstante Funktion. Definieren wir für  $x \in (0, 1)$  und  $l \in (0, 1)$

$$T(x) := \inf\{t \geq 0 : |I_x(t)| < l\},$$

so ist leicht nachprüfbar, dass  $T$  ein Frost ist.

**5.2. Bemerkung.** Es gilt entweder

$$I_x(T(x)) = I_y(T(y)) \quad \text{oder} \quad I_x(T(x)) \cap I_y(T(y)) = \emptyset$$

für  $x, y \in (0, 1)$ ; denn  $I_x(T(x)) \cap I_y(T(y)) \neq \emptyset$  impliziert  $z \in I_x(T(x)) \cap I_y(T(y))$  für ein  $z \in (0, 1)$  und mit Eigenschaft (2) der Frosts erhalten wir  $T(x) = T(z) = T(y)$ , also  $I_x(T(x)) = I_y(T(y))$ .

Bemerkung 5.2 rechtfertigt die folgende Definition.

**5.3. Definition.** Gegeben ein Frost  $T$  bezüglich  $F(\cdot)$ , heißt

$$F(T) := \bigcup_{x \in (0, 1)} I_x(T(x))$$

$F(\cdot)$  gefroren zum Zeitpunkt  $T$ .

Im Gegensatz zur Anwendung einer Stoppzeit handelt es sich bei  $F(T(\omega))(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , um das Konglomerat verschiedener Zeitpunkte. Wie für Stoppzeiten können wir für Frosts festhalten:

**5.4. Lemma.** (a) Gegeben zwei Frosts  $T$  und  $T'$  bezüglich  $F(\cdot)$ , ist  $T \wedge T'$  wieder ein Frost, und es gilt  $F(T) \subset F(T \wedge T')$  fast sicher.

(b) Gegeben ein Frost  $T$  bezüglich  $F(\cdot)$ , ist  $T + t$  für alle  $t \geq 0$  wieder ein Frost, und es gilt  $F(T) \subset F(T + t)$  fast sicher.

(c) Für eine aufsteigende Folge  $(T_n)_{n \geq 1}$  von Frosts bezüglich  $F(\cdot)$  ist  $T := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$  wieder ein Frost.

BEWEIS: Zu (a):  $T(x) \wedge T'(x)$  ist wieder eine Stoppzeit für alle  $x \in (0, 1)$ , da

$$\{T(x) \wedge T'(x) > t\} = \{T(x) > t\} \cap \{T'(x) > t\} \in \mathcal{F}_t^x$$

für  $t \geq 0$ . Sei  $y \in I_x((T \wedge T')(x))$  für  $x, y \in (0, 1)$  und ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $T(x) \leq T'(x)$ . Dann gilt  $y \in I_x(T(x))$  und damit  $T(y) = T(x)$ . Wir behaupten  $T(y) \leq T'(y)$ . Nehmen wir  $T(y) > T'(y)$  an, so folgt aus  $x \in I_y(T(y)) \subset I_y(T'(y))$  die Ungleichung  $T(y) \leq T'(x) = T'(y)$ . Dies ist ein Widerspruch. Also gilt  $T(y) \leq T'(y)$  und somit  $(T \wedge T')(x) = (T \wedge T')(y)$ , d.h. auch Eigenschaft (2) der Frosts wird erfüllt. Mit Definition 2.31 folgt der Zusatz.

Zu (b): Diese Behauptung ist offensichtlich.

Zu (c):  $T(x)$  ist wieder eine Stoppzeit für alle  $x \in (0, 1)$ , da

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) > t \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n(x) > t\} \in \mathcal{F}_t^x$$

für  $t \geq 0$ .  $y \in I_x(T(x))$  für  $x, y \in (0, 1)$  impliziert  $y \in I_x(T_n(x))$  für alle  $n \geq 1$  wegen der wachsenden Monotonie von  $(T_n)_{n \geq 1}$ . Wir folgern  $T_n(y) = T_n(x)$  für alle  $n \geq 1$  und hieraus  $T(y) = T(x)$ , d.h.  $T$  ist ein Frost bezüglich  $F(\cdot)$ .

Aufbauend auf Definition 5.3 und Lemma 5.4 führen wir, bevor wir zur Vorstellung der erweiterten Fragmentierungseigenschaft kommen, noch zwei weitere notwendige Begriffe ein.

**5.5. Definition.** Gegeben ein Frost  $T$  bezüglich  $F(\cdot)$ , heißt

$$F \circ \tau_T(\cdot) := (F(t \wedge T), t \geq 0)$$

*Prä-T-Prozess* bezüglich  $F(\cdot)$  und

$$F \circ \theta_T(\cdot) := (F(T + t), t \geq 0)$$

*Post-T-Prozess* bezüglich  $F(\cdot)$ .

**5.6. Theorem (Erweiterte Fragmentierungseigenschaft).** *Sei  $T$  ein Frost bezüglich  $F(\cdot)$ . Bedingt unter  $F(T) = V' \in \mathcal{V}$  sind  $F \circ \tau_T(\cdot)$  und  $F \circ \theta_T(\cdot)$  stochastisch unabhängig und  $F \circ \theta_T(\cdot)$  hat die Verteilung  $\mathbb{P}_{V'}^{F(\cdot)}$ . Dieser Zusammenhang ist ebenfalls gültig für den Prozess  $F(\cdot)$  unter der Verteilung  $\mathbb{P}_V$ ,  $V \in \mathcal{V}$ . Er wird als die erweiterte Fragmentierungseigenschaft von  $F(\cdot)$  bezeichnet.*

BEWEIS: Als Erstes wollen wir mittels Induktion die Behauptung für den Fall beweisen, dass  $T$  nur endlich viele Werte annimmt. Der Induktionsanfang mit  $T$  als konstanter Funktion wird trivialerweise durch die Markov-Eigenschaft von  $F(\cdot)$  gegeben. Sei jetzt vorausgesetzt, dass die erweiterte Fragmentierungseigenschaft für Frosts mit maximal  $n$ -elementiger Wertemenge erfüllt werde. Wir betrachten einen Frost  $T$ , der die Werte  $t_1, \dots, t_{n+1}$  annimmt mit  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \leq \infty$ . Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf den Frost  $T \wedge t_n$  an: Bedingt unter  $F(T \wedge t_n) = V'$  sind  $F \circ \tau_{T \wedge t_n}(\cdot)$  und  $F \circ \theta_{T \wedge t_n}(\cdot)$  stochastisch unabhängig und  $F \circ \theta_{T \wedge t_n}(\cdot)$  hat die Verteilung  $\mathbb{P}_{V'}^{F(\cdot)}$ .

Es sei  $(I_k)_{k \geq 1}$  die Intervallzerlegung von  $V'$ . Wir definieren

$$M(I_k) := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } T(x) \leq t_n \text{ für } x \in I_k \text{ (nach Def. 5.1 (2) unabhängig von } x) \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

für  $k \geq 1$ . Berücksichtigen wir  $\{T(x) \leq t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n}^x$  für alle  $x \in (0, 1)$  gemäß Eigenschaft (1) der Definition 5.1, so sehen wir, dass  $M(I_k)$  für jedes  $k \geq 1$  messbar bezüglich  $\sigma(\mathcal{N} \cup \sigma(F \circ \tau_{T \wedge t_n}(t), t \geq 0))$  ist. Wir setzen

$$V_0 := \bigcup_{k \in \mathcal{M}} I_k \subset V' \quad \text{mit } \mathcal{M} := \{k \geq 1 : M(I_k) = 0\}$$

und  $V_1 := V' \setminus V_0$ .  $F \circ \theta_{T \wedge t_n}(\cdot)$  beschränkt auf  $V_0$  bzw.  $V_1$  sei durch  $F_0(\cdot)$  bzw.  $F_1(\cdot)$  abgekürzt. Mit der Fragmentierungseigenschaft für Intervall-Fragmentierungen folgt: Bedingt unter  $F(T \wedge t_n) = V'$  und  $(M(I_k))_{k \geq 1} = s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  sind  $F \circ \tau_{T \wedge t_n}(\cdot)$ ,  $F_0(\cdot)$  und  $F_1(\cdot)$  stochastisch unabhängig.  $F_0(\cdot)$  und  $F_1(\cdot)$  haben die Verteilung  $\mathbb{P}_{V_0}^{F(\cdot)}$  bzw.  $\mathbb{P}_{V_1}^{F(\cdot)}$ . Bei zusätzlichem Bedingen unter  $F_1(t_{n+1} - t_n) = V'_1 \subset V_1$ , was insgesamt gleichbedeutend ist mit Bedingen unter  $F(T \wedge t_n) = V'$ ,  $(M(I_k))_{k \geq 1} = s$  und  $F(T) = V'' := V_0 \cup V'_1$ , erhalten wir schließlich mit der Markov-Eigenschaft von  $F_1(\cdot)$  die bedingte stochastische Unabhängigkeit von  $F \circ \tau_T(\cdot)$  und  $F \circ \theta_T(\cdot)$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((F \circ \theta_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot \mid F(T) = V'', (M(I_k))_{k \geq 1} = s, F(T \wedge t_n) = V') \\ &= \mathbb{P}_{V''}((F(t))_{t \geq 0} \in \cdot). \end{aligned}$$

Da  $V' \in \mathcal{V}$  beliebig gewählt war und  $(M(I_k))_{k \geq 1}$  durch  $F(T)$  und  $F(T \wedge t_n)$  eindeutig festgelegt wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((F \circ \theta_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot, (F \circ \tau_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot | F(T), F(T \wedge t_n)) \\ = & \mathbb{P}((F \circ \theta_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot | F(T), F(T \wedge t_n)) \mathbb{P}((F \circ \tau_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot | F(T), F(T \wedge t_n)) \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{P}((F \circ \theta_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot | F(T), F(T \wedge t_n)) = \mathbb{P}((F \circ \theta_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot | F(T)).$$

Hieraus folgt unter Verwendung der Iterationsregel für bedingte Erwartungswerte

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((F \circ \theta_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot, (F \circ \tau_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot | F(T)) \\ = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{(F \circ \theta_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot\}} \mathbf{1}_{\{(F \circ \tau_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot\}} | F(T), F(T \wedge t_n)) | F(T)) \\ = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{(F \circ \theta_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot\}} | F(T), F(T \wedge t_n)) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{(F \circ \tau_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot\}} | F(T), F(T \wedge t_n)) | F(T)) \\ = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{(F \circ \theta_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot\}} | F(T)) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{(F \circ \tau_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot\}} | F(T), F(T \wedge t_n)) | F(T)) \\ = & \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{(F \circ \theta_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot\}} | F(T)) \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{(F \circ \tau_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot\}} | F(T), F(T \wedge t_n)) | F(T)) \\ = & \mathbb{P}((F \circ \theta_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot | F(T)) \mathbb{P}((F \circ \tau_T(t))_{t \geq 0} \in \cdot | F(T)). \end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung gezeigt.

Für einen beliebigen Frost  $T$  betrachten wir eine Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Frosts, die jeweils nur endlich viele Werte annehmen, mit  $T_n(x) \downarrow T(x)$  fast sicher für  $n \rightarrow \infty$ , etwa

$$T_n(x) := \begin{cases} 2^{-n} \lfloor 2^n T(x) + 1 \rfloor & : \text{ falls } T(x) \leq 2^n \\ \infty & : \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle  $x \in (0, 1)$ , wobei  $\lfloor x \rfloor := \sup\{z \in \mathbb{Z} : x \geq z\}$  sei. Wir orientieren uns beim Nachweis der erweiterten Fragmentierungseigenschaft für  $T$  an Breiman [Br], S. 357. Sei  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, beschränkte Funktion,  $t \geq 0$  und  $V \in \mathcal{V}$  fest, aber beliebig. Wir haben

$$\int_C \varphi(F \circ \theta_{T_n}(t)) \, d\mathbb{P}_V = \int_C \mathbb{E}_V(\varphi(F \circ \theta_{T_n}(t)) | F(T_n)) \, d\mathbb{P}_V \quad (25)$$

für

$$C \in \sigma(F \circ \tau_T(s), s \geq 0) \subset \sigma(F \circ \tau_{T_n}(s), s \geq 0), \quad n \geq 1,$$

gezeigt. Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Pfade, der Stetigkeit von  $\varphi$  und gemäß der Lemmata 2.28, 2.29 gilt

$$\varphi(F \circ \theta_{T_n}(t)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(F \circ \theta_T(t)) \quad \text{fast sicher} \quad (26)$$

und

$$F(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(T) \quad \text{fast sicher.} \quad (27)$$

Mit der Feller-Eigenschaft (Satz 2.39) und Gleichung (27) folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_V(\varphi(F \circ \theta_{T_n}(t)) | F(T_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{F(T_n)} \varphi(F(t)) \\ &= \mathbb{E}_{F(T)} \varphi(F(t)) \quad \text{fast sicher} \\ &= \mathbb{E}_V(\varphi(F \circ \theta_T(t)) | F(T)) \quad \text{fast sicher.} \end{aligned} \quad (28)$$

Die Gleichungen (25), (26) und (28) implizieren bei Beachtung des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} \int_C \varphi(F \circ \theta_T(t)) \, d\mathbb{P}_V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \varphi(F \circ \theta_{T_n}(t)) \, d\mathbb{P}_V \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \mathbb{E}_V(\varphi(F \circ \theta_{T_n}(t)) | F(T_n)) \, d\mathbb{P}_V \\ &= \int_C \mathbb{E}_V(\varphi(F \circ \theta_T(t)) | F(T)) \, d\mathbb{P}_V \end{aligned}$$

für alle  $C \in \sigma(F \circ \tau_T(s), s \geq 0)$ . Aus der daraus resultierenden Gleichung

$$\int \varphi \, d\mathbb{P}_V(F \circ \theta_T(t) \in \cdot | F \circ \tau_T(s), s \geq 0) = \int \varphi \, d\mathbb{P}_V(F \circ \theta_T(t) \in \cdot | F(T))$$

können wir aufgrund der Trennungseigenschaft stetiger, beschränkter Funktionen

$$\mathbb{P}_V(F \circ \theta_T(t) \in \cdot | F \circ \tau_T(s), s \geq 0) = \mathbb{P}_V(F \circ \theta_T(t) \in \cdot | F(T))$$

schließen. Führen wir dieselbe Argumentation für  $\varphi : \mathcal{V}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(V_1, \dots, V_k) = \varphi_1(V_1) \cdot \dots \cdot \varphi_k(V_k)$  mit  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  stetig und beschränkt,  $k \in \mathbb{N}$  fest, aber beliebig, durch, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_V(F \circ \theta_T(t_1) \in \cdot, \dots, F \circ \theta_T(t_k) \in \cdot | F \circ \tau_T(s), s \geq 0) \\ &= \mathbb{P}_V(F \circ \theta_T(t_1) \in \cdot, \dots, F \circ \theta_T(t_k) \in \cdot | F(T)) \end{aligned}$$

für  $0 \leq t_1 < \dots < t_k$ . Für  $F(T) = V'$  liefert dies die Behauptung, da  $F(\cdot)$  ein càdlàg-Prozess ist.  $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnitts geben wir eine weitere Eigenschaft der Intervall-Fragmentierung  $F(\cdot)$  im Zusammenhang mit Frosts an. Die sogenannte

*Quasi-Linksstetigkeit* wird uns beim Nachweis von Theorem 5.10 dienlich sein. Der Beweis folgt der Argumentationslinie von [Ber1], S. 21.

**5.7. Proposition (Quasi-Linksstetigkeit).** *Gegeben eine aufsteigende Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Frosts bezüglich  $F(\cdot)$  und  $T := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ , gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(T_n(x)) = F(T)$  fast sicher.*

BEWEIS: Nach Lemma 5.4 (c) ist  $T$  wieder ein Frost. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $T(x) < \infty$  und  $T_n(x) < T(x)$  für alle  $x \in (0, 1)$  und  $n \geq 1$ . Gemäß Lemma 2.28 und aufgrund der Existenz linksseitiger Limiten (Proposition 2.36) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(T_n) = \bigcup_{x \in (0, 1)} I_x(T(x)-) =: F(T-) \quad \text{fast sicher.}$$

Seien  $f$  und  $g$  stetige, beschränkte Funktionen von  $\mathcal{V}$  nach  $\mathbb{R}$ . Für jedes  $x \in (0, 1)$  und  $t > 0$  konvergiert  $T_n(x) + t$  fast sicher gegen  $T(x) + t$  für  $n \rightarrow \infty$ . Mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}f(F(T_n))g(F \circ \theta_{T_n}(t)) = \mathbb{E}f(F(T-))g(F \circ \theta_T(t-)).$$

Aufgrund der rechtsseitigen Stetigkeit der Pfade und gemäß der Lemmata 2.28, 2.29 folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \mathbb{E}f(F(T-))g(F \circ \theta_T(t-)) = \mathbb{E}f(F(T-))g(F(T)).$$

Gleichzeitig gilt für bedingte Erwartungswerte

$$\mathbb{E}f(F(T_n))g(F \circ \theta_{T_n}(t)) = \mathbb{E}(f(F(T_n))\mathbb{E}(g(F \circ \theta_{T_n}(t))|F(T_n))).$$

Wegen der Existenz linksseitiger Limiten und gemäß der Lemmata 2.28, 2.29 sowie der Feller-Eigenschaft (Satz 2.39) können wir folgern

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(F(T_n))\mathbb{E}(g(F \circ \theta_{T_n}(t))|F(T_n))) \\ &= \mathbb{E}(f(F(T-))\mathbb{E}(g(F \circ \theta_{T-}(t))|(F(T-)))). \end{aligned}$$

Eine weitere Anwendung der Feller-Eigenschaft liefert

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \mathbb{E}(f(F(T-))\mathbb{E}(g(F \circ \theta_{T-}(t))|F(T-))) = \mathbb{E}f(F(T-))g(F(T-)).$$

Insgesamt erhalten wir also die Gleichung

$$\mathbb{E}f(F(T-))g(F(T-)) = \mathbb{E}f(F(T-))g(F(T)).$$

Wegen der Trennungseigenschaft der Funktionen  $h : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(V_1, V_2) := f(V_1)g(V_2)$  gilt

$$\mathbb{P}^{(F(T-), F(T-))} = \mathbb{P}^{(F(T-), F(T))}$$

und damit schließlich  $F(T-) = F(T)$  fast sicher, was die Behauptung beweist.  $\square$

## 5.2 Transformation des Selbstähnlichkeitsindex bei Intervall-Fragmentierungen

Wir werden jetzt auf der Basis spezieller Frosts selbstähnliche Intervall-Fragmentierungen mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$  in solche mit Index  $\alpha + \beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  beliebig, überführen. Dafür sei  $F(\cdot) = (F(t), t \geq 0)$  weiterhin eine selbstähnliche Intervall-Fragmentierung mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wir definieren für beliebiges  $\beta \in \mathbb{R}$  und  $t \geq 0$  die Zufallsfunktion  $T_t^{(\beta)} : (0, 1) \rightarrow [0, \infty]$  durch

$$T_t^{(\beta)}(x) := \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u 1_{\{I_x(r) \neq \emptyset\}} |I_x(r)|^{-\beta} dr > t \right\},$$

wobei  $\inf \emptyset := \infty$ .

**5.8. Bemerkung.** Das Riemann-Integral  $H_x(u) := \int_0^u 1_{\{I_x(r) \neq \emptyset\}} |I_x(r)|^{-\beta} dr$  existiert für alle  $u \geq 0$ , da eine Realisierung der Abbildung  $r \mapsto |I_x(r)|^{-\beta}$  auf jedem Kompaktum beschränkt ist und höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt. Damit ist  $T_t^{(\beta)}$  wohldefiniert.

**5.9. Proposition.** (a) Die Abbildung  $t \mapsto T_t^{(\beta)}(x)$ ,  $t \in (0, \infty)$ , ist rechtsseitig stetig und es gilt  $\lim_{r \uparrow t} T_r^{(\beta)}(x) = T_t^{(\beta)}(x)$ , falls  $T_t^{(\beta)}(x) < \infty$ , für alle  $x \in (0, 1)$  und  $\beta \in \mathbb{R}$ .

(b)  $T_t^{(\beta)}$  ist ein Frost bezüglich  $F(\cdot)$  für alle  $t \geq 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$ .

BEWEIS: Zu (a): Die rechtsseitige Stetigkeit ist offensichtlich. Aus  $T_t^{(\beta)}(x) < \infty$  folgt  $I_x(T_t^{(\beta)}(x)) \neq \emptyset$ . Also verläuft  $u \mapsto H_x(u)$  streng monoton wachsend für  $u \leq T_t^{(\beta)}(x)$ . Dies impliziert die linksseitige Stetigkeit.

Zu (b)  $H_x(u)$  ist messbar bezüglich  $\mathcal{F}_u^x$  für jedes  $u \geq 0$  und  $u \mapsto H_x(u)$  ist rechtsseitig stetig. Da die Filtration  $(\mathcal{F}_s^x)_{s \geq 0}$  rechtsseitig stetig ist, wird durch



$\inf\{u \geq 0 : H_x(u) \in (t, \infty)\}$  eine Stoppzeit festgelegt (siehe z.B. [Ir], S. 119).

Zum Nachweis der 2. Eigenschaft wählen wir ein  $y \in I_x(T_t^{(\beta)}(x))$  für  $x \in (0, 1)$ . Wegen  $F(t) \rightarrow \emptyset$  für  $t \rightarrow \infty$  (Proposition 2.38) gilt dann  $T_t^{(\beta)}(x) < \infty$ . Aus  $I_x(r) = I_y(r)$  für alle  $r \leq T_t^{(\beta)}(x)$  und damit  $T_r^{(\beta)}(x) = T_r^{(\beta)}(y)$  für alle  $r \leq t$  folgt mit Teil (1) die Identität  $T_t^{(\beta)}(x) = T_t^{(\beta)}(y)$ .  $\square$

Für beliebiges  $\beta \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$F^{(\beta)}(\cdot) := (F(T_t^{(\beta)}), t \geq 0)$$

als den *Prozess der gefrorenen Fragmentierungen*. Wie wir gleich sehen werden, ist  $F^{(\beta)}(\cdot)$  wiederum eine selbstähnliche Intervall-Fragmentierung. Mit Hilfe der erweiterten Fragmentierungseigenschaft werden wir die Markov-Eigenschaft nachweisen. Das zufriedenstellende Ergebnis zur Zeittransformation stellt sich nun folgendermaßen dar:

**5.10. Theorem.** *Der Prozess der gefrorenen Fragmentierungen  $F^{(\beta)}(\cdot)$  ist eine selbstähnliche Intervall-Fragmentierung mit Index  $\alpha + \beta$ .*

BEWEIS: Aus  $T_0^{(\beta)}(\cdot) \equiv 0$  folgt  $F^{(\beta)}(0) = (0, 1)$  fast sicher. Da die Abbildung  $t \mapsto T_t^{(\beta)}(x)$  monoton wachsend ist für alle  $x \in (0, 1)$ , ist  $F^{(\beta)}(\cdot)$  eine Intervall-Fragmentierung. An dieser Stelle sei noch einmal auf  $F(\infty) = \emptyset$  gemäß Proposition 2.38 hingewiesen. Aus der Quasi-Linksstetigkeit (Proposition 5.7) und Proposition 5.9 folgt sofort, dass mit  $F^{(\beta)}(\cdot)$  ein in Wahrscheinlichkeit stetiger càdlàg-Prozess vorliegt.

Wir kommen jetzt zur Markov-Eigenschaft. Für  $u < t$  ist  $F^{(\beta)}(u) = F(T_u^{(\beta)})$  messbar bezüglich  $\sigma(\sigma(F \circ \tau_{T_t^{(\beta)}}(s), s \geq 0) \cup \mathcal{N})$ . Wir schreiben  $\tilde{F}(\cdot)$  für den Post- $T_t^{(\beta)}$ -Prozess  $F \circ \theta_{T_t^{(\beta)}}(\cdot)$ . Es gilt für  $r \geq 0$

$$T_{t+r}^{(\beta)}(x) = T_t^{(\beta)}(x) + \tilde{T}_r^{(\beta)}(x)$$

mit

$$\tilde{T}_r^{(\beta)}(x) := \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u 1_{\{I_x(s+T_t^{(\beta)}(x)) \neq \emptyset\}} |I_x(s+T_t^{(\beta)}(x))|^{-\beta} ds > r \right\},$$

d.h.

$$F(T_{t+r}^{(\beta)}) = \tilde{F}(\tilde{T}_r^{(\beta)}).$$

Also ist  $F(T_{t+r}^{(\beta)})$  messbar bezüglich  $\sigma(\sigma(\tilde{F}_s, s \geq 0) \cup \mathcal{N})$ . Nach der erweiterten Fragmentierungseigenschaft (Theorem 5.6) gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_V \left( \tilde{F}(s) \in \cdot, s \geq 0 \mid \sigma(F \circ \tau_{T_t^{(\beta)}}(s), s \geq 0) \right) \\ &= \mathbb{P}_V \left( \tilde{F}(s) \in \cdot, s \geq 0 \mid F(T_t^{(\beta)}) \right) \end{aligned}$$

und damit aufgrund der aufgezeigten Messbarkeitseigenschaften insbesondere

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_V \left( F^{(\beta)}(t+r) \in \cdot \mid F^{(\beta)}(u), u \leq t \right) \\ &= \mathbb{P}_V \left( F^{(\beta)}(t+r) \in \cdot \mid F^{(\beta)}(t) \right). \end{aligned}$$

$F^{(\beta)}(\cdot)$  ist also ein Markov-Prozess. Die Fragmentierungseigenschaft von  $F(\cdot)$ , d.h. die voneinander unabhängige Zerlegung disjunkter Intervalle, überträgt sich ohne Weiteres auf  $F^{(\beta)}(\cdot)$ , da  $T_t^{(\beta)}(x)$  allein durch den Prozess  $I_x(\cdot)$  determiniert wird und nach Bemerkung 5.2 entweder  $I_x(T(x)) = I_y(T(y))$  oder  $I_x(T(x)) \cap I_y(T(y)) = \emptyset$  für  $x, y \in (0, 1)$  gilt.

Dies eröffnet uns die Möglichkeit, beim Nachweis der Selbstähnlichkeit die Betrachtung auf ein Intervall zu reduzieren. Es sei  $I \subset [0, 1]$  ein beliebiges nichtleeres offenes Intervall.  $g_I$  bezeichne wieder die affine Abbildung gemäß den Ausführungen vor Definition 2.33. Für  $t \geq 0$  und  $y \in (0, 1)$  definieren wir

$$\dot{T}_t^{(\beta)}(y) := \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u 1_{\{J_y(|I|^{\alpha r}) \neq \emptyset\}} |J_y(|I|^{\alpha r})|^{-\beta} dr > t \right\}.$$

Hierbei sei  $J_y(t)$  das Intervall von  $g_I(F(t))$ , das  $y$  enthält, falls  $y \in g_I(F(t))$ , ansonsten setzen wir  $J_y(t) := \emptyset$ . Wir zeigen jetzt

$$\mathbb{P} \left( g_I \circ F^{(\beta)}(t | I|^{\alpha+\beta}) \in \cdot \right) = \mathbb{P}_I \left( F^{(\beta)}(t) \right). \quad (29)$$

Es sei  $y = g_I(x)$ . Dann gilt  $J_y(\cdot) = g_I(I_x(\cdot))$  und damit

$$|J_y(|I|^{\alpha r})| = |I| |I_x(|I|^{\alpha r})|. \quad (30)$$

Gemäß Bemerkung 2.34 (b) haben wir außerdem

$$\mathbb{P} \left( g_I \circ F(t | I|^{\alpha}) \in \cdot \right) = \mathbb{P}_I \left( F(t) \in \cdot \right). \quad (31)$$

Zusätzlich sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $I_x(s) \neq \emptyset$  für alle  $s \geq 0$  voraus-

gesetzt. Mit Gleichung (30) folgt

$$\begin{aligned}
\dot{T}_t^{(\beta)}(x) &= \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u |J_y(|I|^\alpha r)|^{-\beta} dr > t \right\} \\
&= \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u |I|^{-\beta} |I_x(|I|^\alpha r)|^{-\beta} dr > t \right\} \\
&= \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u |g_I \circ I_x(|I|^\alpha r)|^{-\beta} dr > t \right\}.
\end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt

$$\begin{aligned}
|I|^\alpha \dot{T}_t^{(\beta)}(y) &= \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u |I|^{-\beta} |I_x(|I|^\alpha r)|^{-\beta} dr > t \right\} |I|^\alpha \\
&= \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^{\frac{u}{|I|^\alpha}} |I|^{-\beta} |I_x(|I|^\alpha r)|^{-\beta} \frac{1}{|I|^\alpha} |I|^\alpha dr > t \right\} \\
&= \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u |I|^{-\beta} |I|^{-\alpha} |I_x(z)|^{-\beta} dz > t \right\} \\
&= T_{t|I|^{\alpha+\beta}}^{(\beta)}(x),
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile  $|I|^\alpha r$  durch  $z$  substituiert wurde. Wir erhalten insgesamt mit der Gleichung (31)

$$\mathbb{P} \left( g_I \circ F(T_{t|I|^{\alpha+\beta}}^{(\beta)}) \in \cdot \right) = \mathbb{P}_I \left( F(T_t^{(\beta)}) \in \cdot \right),$$

d.h. die Gleichung (29) ist gezeigt. Die  $t$ -Schritt-Übergangskerne sind aufgrund der Fragmentierungseigenschaft Fragmentierungskerne, und für die induzierenden stochastischen Kerne  $Q^t$  gilt

$$\begin{aligned}
Q^t(I, \cdot) &= \mathbb{P}_I \left( F^{(\beta)}(t) \in \cdot \right) \\
&= \mathbb{P} \left( g_I \circ F^{(\beta)}(t|I|^{\alpha+\beta}) \in \cdot \right) = Q^{t|I|^{\alpha+\beta}}((0, 1), \cdot)^{g_I},
\end{aligned}$$

d.h. die Skalierungseigenschaft wird erfüllt.  $F^{(\beta)}(\cdot)$  ist also eine selbstähnliche Intervall-Fragmentierung mit Index  $\alpha + \beta$ .  $\square$

Aus Theorem 5.10 folgt sofort, dass der stochastische Prozess

$$(F^{(\beta)})^{(-\beta)}(\cdot) := (F^{(\beta)}(\tilde{T}_t^{(-\beta)}), t \geq 0)$$

mit

$$\tilde{T}_t^{(\beta)}(x) := \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u 1_{\{I_x(T_r^{(\beta)}) \neq \emptyset\}} |I_x(T_r^{(\beta)})|^{-\beta} dr > t \right\}, \quad x \in (0, 1),$$

als Frost bezüglich  $F_t^{(\beta)}(\cdot)$  genauso wie  $F(\cdot)$  eine selbstähnliche Intervall-Fragmentierung mit Index  $\alpha$  ist. Die folgende Proposition verschärft diese Aussage.

**5.11. Proposition.** *Es gilt  $(F^{(\beta)})^{(-\beta)}(\cdot) = F(\cdot)$ , d.h.  $F(\cdot)$  kann aus  $F^{(\beta)}(\cdot)$  zurückgewonnen werden.*

BEWEIS: Da

$$F^{(\beta)}(\tilde{T}_t^{(-\beta)}) = F\left(T_{\tilde{T}_t^{(-\beta)}}^{(\beta)}\right),$$

reicht es

$$T_{\tilde{T}_t^{(-\beta)}}^{(\beta)} = t$$

für alle  $t \geq 0$  zu zeigen. Es sei  $x \in (0, 1)$  fest, aber beliebig. Im Falle  $I_x(t) \neq \emptyset$  existiert aufgrund der rechtsseitigen Stetigkeit von  $F(\cdot)$  sowie der Lemmata 2.28, 2.29 und der Offenheit der Intervalle ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $I_x(t + s) \neq \emptyset$  für alle  $s \in (0, \epsilon)$ . Dann hat  $H_x$  (siehe Bemerkung 5.8) eingeschränkt auf  $(0, t + \epsilon)$  eine Umkehrfunktion  $H_x^{-1} : (0, H_x(t)) \rightarrow (0, t + \epsilon)$  mit  $H_x(r)^{-1} = T_r^{(\beta)}(x)$ . Es gilt ferner  $\frac{\partial}{\partial r} H_x^{-1}(r_0) = |I_x(g_x^{-1}(r_0))|^\beta$  für  $r_0 \in (0, H_x(t))$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} T_t^{(-\beta)}(x) &= \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u |I_x(T_r^{(\beta)}(x))|^\beta dr > t \right\} \\ &= \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u \frac{\partial}{\partial r} H_x^{-1}(r) dr > t \right\} \\ &= \inf \{ u \geq 0 : H_x^{-1}(u) > t \} = H_x(t), \end{aligned}$$

und dies führt zu

$$\begin{aligned} T_{\tilde{T}_t^{(-\beta)}(x)}^{(\beta)}(x) &= \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u |I_x(s)|^{-\beta} ds > H_x(t) \right\} \\ &= H_x^{-1}(H_x(t)) = t. \end{aligned}$$

Im Falle  $I_x(t) = \emptyset$  gilt  $T_l^{(\beta)}(x) = \infty$  für  $l \geq H_x(t)$ . Aus obigen Ausführungen folgt leicht  $\tilde{T}_t^{(-\beta)}(x) \geq H_x(t)$ , so dass wir mit Proposition 2.38

$$I_x(T_{\tilde{T}_t^{(-\beta)}}^{(\beta)}) = \emptyset = I_x(t)$$

schließen können. □

## 5.3 Anwendung der Transformation bei $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen

Wir sind jetzt in der Lage, das Hauptresultat dieser Arbeit vorzustellen. Die soeben für selbstähnliche Intervall-Fragmentierungen dargelegte Indextransformation übertragen wir auf selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen. Dafür sei im Folgenden  $\Pi(\cdot) = (\Pi(t), t \geq 0)$  eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Für jedes  $t \geq 0$  bezeichne  $B_k(t)$  wie in Abschnitt 3.3 den Block von  $\Pi(t)$  mit  $k = \min B_k(t)$  und  $\lambda_k(t)$  dessen asymptotische Frequenz. Für jedes  $i \in \mathbb{N}$  und  $t \geq 0$  sei  $l_i(t) := \lambda_k(t)$ , falls  $i \in B_k(t)$ . Wir definieren nun analog zur Intervall-Fragmentierung für  $\beta \in \mathbb{R}$

$$T_t^{(\beta)}(i) := \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u 1_{\{l_i(r) \neq 0\}} l_i(r)^{-\beta} dr > t \right\}.$$

**5.12. Bemerkung.**  $T_t^{(\beta)}$  ist wohldefiniert (vergleiche Bemerkung 5.8) und in Anlehnung an Proposition 5.9 ist  $r \mapsto T_r^{(\beta)}(i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , stetig für  $s \leq t$  und  $T_t^{(\beta)}(i) < \infty$ .

**5.13. Lemma.** Für  $i, j \in \mathbb{N}$  gilt

$$i \stackrel{\Pi(T_t^{(\beta)}(i))}{\sim} j \iff i \stackrel{\Pi(T_t^{(\beta)}(j))}{\sim} j.$$

BEWEIS: Aus  $i \stackrel{\Pi(T_t^{(\beta)}(i))}{\sim} j$  folgt  $l_i(r) = l_j(r)$  für  $r \leq T_t^{(\beta)}(i)$  und damit  $T_r^{(\beta)}(i) = T_r^{(\beta)}(j)$  für  $r < t$ . Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $T_t^{(\beta)}(i) < \infty$  voraussetzen, so dass wir mit Bemerkung 5.12  $T_t^{(\beta)}(i) = T_t^{(\beta)}(j)$  erhalten.  $\square$

Wir können also eine Zufallspartition  $\Pi^{(\beta)}(t)$ ,  $t \geq 0$ , durch die Äquivalenzrelation

$$i \stackrel{\Pi^{(\beta)}(t)}{\sim} j \iff i \stackrel{\Pi(T_t^{(\beta)}(i))}{\sim} j$$

festlegen. Das anschließende zentrale Theorem basiert auf folgenden Resultaten:

- gemäß Kapitel 3 können wir einander entsprechende Intervall- und  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen konstruieren,

- gemäß Kapitel 4 wird die Verteilung einer homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung durch ein Lévy-Maß und eine Erosionsrate determiniert,
- gemäß Abschnitt 5.2 können wir eine Indextransformation für selbstähnliche Intervall-Fragmentierungen durchführen.

**5.14. Theorem.** (a)  $\Pi^{(\beta)}(\cdot) = (\Pi^{(\beta)}(t), t \geq 0)$  ist eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha + \beta$ . Außerdem gilt  $\Pi(\cdot) = (\Pi^{(\beta)})^{(-\beta)}(\cdot)$ .

(b) Die Verteilung einer selbstähnlichen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung wird eindeutig bestimmt durch ihren Index  $\alpha \in \mathbb{R}$  sowie die Erosionsrate  $c \geq 0$  und das Lévy-Maß  $\nu$  der homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi^{(-\alpha)}(\cdot)$ . Wir bezeichnen das Tripel  $(\alpha, \nu, c)$  als die Parameter von  $\Pi(\cdot)$ .

BEWEIS: Zu (a): Es sei

$$F_{\Pi}(\cdot) = \bigcup_{x \in (0,1)} I_x(\cdot)$$

die Intervall-Fragmentierung, die wir gemäß Proposition 3.13 aus  $\Pi(\cdot)$  erhalten. Es bezeichne  $(U_i)_{i \geq 1}$  eine Folge stochastisch unabhängiger identisch  $R(0,1)$ -verteilter Zufallsgrößen. Auf Basis dieser Zufallsgrößen konstruieren wir gemäß Abschnitt 3.3  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen assoziiert zu den Intervall-Fragmentierungen  $F(\cdot) := F_{\Pi}(\cdot)$  und  $F^{(\beta)}(\cdot) := F_{\Pi}^{(\beta)}(\cdot)$ .

$\Pi_{F^{(\beta)}}(\cdot)$  ist laut Satz 3.10, 3.14 und Theorem 5.10 eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha + \beta$ . Nach Satz 3.14 gilt außerdem

$$\Pi_F(\cdot) \stackrel{d}{=} \Pi(\cdot).$$

Für  $t \geq 0$  sei  $T_t^{(\beta)}$  der Frost bezüglich  $F(\cdot)$  aus Abschnitt 5.2. Es gilt dann

$$\begin{aligned} i \stackrel{\Pi_F^{(\beta)}(t)}{\sim} j &\Leftrightarrow i \text{ und } j \text{ liegen im selben Block der Partition } \Pi_F(T_t^{(\beta)}(i)) \\ &\Leftrightarrow (U_i \in I_x(T_t^{(\beta)}(i))) \wedge (U_j \in I_x(T_t^{(\beta)}(i))) \text{ für ein } x \in (0,1) \\ &\Leftrightarrow (U_i \in I_x(T_t^{(\beta)}(x))) \wedge (U_j \in I_x(T_t^{(\beta)}(x))) \text{ für ein } x \in (0,1) \\ &\Leftrightarrow i \stackrel{\Pi_F^{(\beta)}(t)}{\sim} j. \end{aligned}$$

Die vorletzte Umformung folgt aus Satz 3.10, nach dem  $l_i(r) = |I_x(r)|$  für  $r \leq T_t^{(\beta)}(i)$  gilt, was mit Proposition 5.9 und Bemerkung 5.12  $T_t^{(\beta)}(i) = T_t^{(\beta)}(x)$  liefert. Wir

haben

$$\Pi_F^{(\beta)}(t) = \Pi_{F^{(\beta)}}(t) \quad (32)$$

für jedes  $t \geq 0$  gezeigt und damit

$$\Pi^{(\beta)}(\cdot) \stackrel{d}{=} \Pi_{F^{(\beta)}}(\cdot),$$

d.h.  $\Pi^{(\beta)}(\cdot)$  ist eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha + \beta$ .

Der Nachweis der Identität  $\Pi(\cdot) = (\Pi^{(\beta)})^{(-\beta)}(\cdot)$  ist analog zu dem von  $F(\cdot) = (F^{(\beta)})^{(-\beta)}(\cdot)$  aus Proposition 5.11 vorzunehmen. Wir verzichten hierauf und leiten unter Verwendung der Gleichung (32) mit

$$\Pi(\cdot) \stackrel{d}{=} \Pi_F(\cdot) = \Pi_{(F^{(\beta)})^{(-\beta)}}(\cdot) = (\Pi_{F^{(\beta)}})^{(-\beta)}(\cdot) \stackrel{d}{=} (\Pi^{(\beta)})^{(-\beta)}(\cdot)$$

lediglich die Verteilungsgleichheit her.

Zu (b): Nach Korollar 4.13 wird die Verteilung der homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi^{(-\alpha)}(\cdot)$  eindeutig durch ihr Erosionsmaß  $\mu_c$  und Dislokationsmaß  $\mu_\nu$  mit  $c \geq 0$  als Erosionsrate und  $\nu$  als Lévy-Maß auf  $S^*$  charakterisiert. Gemäß Teil (a) gilt  $\Pi(\cdot) \stackrel{d}{=} (\Pi^{(-\alpha)})^{(\alpha)}(\cdot)$ , d.h. die Verteilung von  $\Pi(\cdot)$  wird durch das Tripel  $(\alpha, \nu, c)$  eindeutig festgelegt.  $\square$

Die Verteilung einer selbstähnlichen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung lässt sich also durch die Angabe der Parameter Lévy-Maß  $\nu$ , Erosionsrate  $c$  und Index  $\alpha$  fixieren. Umgekehrt kann bei Vorgabe von  $(\alpha, \nu, c)$  eine entsprechende  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  konstruiert werden. Zunächst konstruiert man - wie in Abschnitt 4.1 dargestellt - eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\tilde{\Pi}(\cdot)$  mit Erosionsrate  $c$  und Lévy-Maß  $\nu$ , d.h.  $\tilde{\Pi}(\cdot)$  hat das charakteristische Maß  $\mu_c + \mu_\nu$ . Anschließend führt man mit Hilfe der Familie  $(T_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$  eine Zeittransformation durch und wählt  $\Pi(\cdot) = \tilde{\Pi}^{(\alpha)}(\cdot)$ .

Die in Kapitel 3 aufgezeigten Beziehungen zwischen  $S^\downarrow$ -, Intervall- und  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung lassen ferner folgenden verallgemeinernden Schluss zu:

**5.15. Korollar.** *Die Existenz selbstähnlicher  $S^\downarrow$ -, Intervall- und  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen ist sichergestellt. Zur Verteilung einer selbstähnlichen  $S^\downarrow$ -, Intervall- oder  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$  korrespondieren ein Lévy-Maß und eine Erosionsrate in kanonischer Weise.*

## 6. Weitere Untersuchungen

Der Nachweis, dass die asymptotischen Frequenzen betreffenden Forderungen (Regularität, Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit des assoziierten Prozesses geordneter asymptotischer Frequenzen) bei homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen entfallen können (Bemerkung 2.16 (d)), steht noch aus. Wir werden im Rahmen der Analyse asymptotischer Frequenzen darauf zurückkommen und das Resultat verifizieren. Hauptsächlich wollen wir in diesem Abschnitt der Frage nachgehen, ob sich die Verteilung des Prozesses asymptotischer Frequenzen eines Blockes, der ein gewisses Element enthält, durch die Parameter  $\alpha$ ,  $\nu$  und  $c$  beschreiben lässt. Mit Hilfe der Lévy-Khintchine-Formel für Subordinatoren können wir eine positive Antwort geben. Da Erosionsrate und Lévy-Maß zusammen mit dem Selbstähnlichkeitsindex alle Verteilungseigenschaften der selbstähnlichen Fragmentierungen erfassen und ihnen deshalb besondere Bedeutung zugesprochen werden muss, widmen wir uns ihnen im Abschnitt 6.2 und stellen jeweils deren Einfluss auf den Prozess der asymptotischen Frequenzen heraus. Beschließen werden wir diese Arbeit mit einem einfachen Beispiel. Hierbei werden einige der zentralen Resultate noch einmal zum Einsatz kommen.

### 6.1. Asymptotische Frequenzen

Wie in Kapitel 4 beschränken wir uns auch hier zunächst auf die Betrachtung einer homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot) = (\Pi(t), t \geq 0)$  mit der natürlichen Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .  $\Pi(\cdot)$  habe die Parameter  $(\nu, c)$ , d.h. das charakteristische Maß  $\mu_\nu + \mu_c$ .

**6.1. Bemerkung.** Wir verzichten bei  $\Pi(\cdot)$  auf Eigenschaft (1) (Regularität) und (2) (Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit des Prozesses  $\Lambda^\downarrow(\Pi(\cdot))$ ) aus Definition 2.14.

Wir wollen in diesem Abschnitt den Prozess untersuchen, der durch die asymptotische Frequenz eines Blockes, der ein gewisses Element enthält, beschrieben wird. Wir wählen im Folgenden mit  $B_1(t)$  den ersten Block der Zufallspartition  $\Pi(t)$



für  $t \geq 0$ . Es seien

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1(t) &:= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |B_1 \cap \{1, \dots, n\}|, \\ \underline{\lambda}_1(t) &:= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |B_1 \cap \{1, \dots, n\}|\end{aligned}$$

als dessen obere bzw. untere asymptotische Frequenz definiert. Falls  $\bar{\lambda}_1(t)$  und  $\underline{\lambda}_1(t)$  übereinstimmen, existiert die asymptotische Frequenz  $\lambda_1(t)$  von  $B_1(t)$ .

**6.2. Bemerkungen.** (a) Konstruiert man die  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  gemäß den Ausführungen vor Definition 3.9 aus der Intervall-Fragmentierung  $F(\cdot) = \bigcup_{x \in (0,1)} I_x(\cdot)$ , so entspricht nach Satz 3.10 die Betrachtung des Prozesses  $(\lambda_1(t), t \geq 0)$  der von  $|I_{U_1}(\cdot)| = (|I_{U_1}(t)|, t \geq 0)$ , wobei  $U_1$  eine von  $F(\cdot)$  unabhängige  $R(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable bezeichnet.

(b) Für festes  $t \geq 0$ ,  $\Lambda^\downarrow(\Pi(t)) =: (\Lambda_1^\downarrow(\Pi(t)), \Lambda_2^\downarrow(\Pi(t)), \dots)$  und  $\Lambda_0^\downarrow(\Pi(t)) := 1 - \sum_{i \geq 1} \Lambda_i^\downarrow(\Pi(t))$  gilt

$$\lambda_1(t) \stackrel{d}{=} \mathbf{1}_{\{N \geq 1\}} \Lambda_N^\downarrow(\Pi(t)),$$

wobei  $N$  eine  $\mathbb{N}_0$ -wertige Zufallsvariable sei, deren bedingte Verteilungen gegeben werden durch

$$\mathbb{P}(N = k \mid \Lambda_N^\downarrow(\Pi(t))) = \Lambda_k^\downarrow(\Pi(t))$$

für  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Unser Ziel ist es, mit Hilfe der Parameter  $\nu$  und  $c$  die Verteilung des stochastischen Prozesses  $\lambda_1(\cdot) = (\lambda_1(t), t \geq 0)$  festzulegen. Dabei ist aufgrund von Bemerkung 6.1 auch die Klärung der Existenz erforderlich. Für die Analyse des Prozesses gehen wir kurz auf die Theorie der sogenannten *Subordinatoren* ein. Wir orientieren uns dabei an [Ber2].

**6.3. Definition.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer rechtsseitig stetigen, vollständigen Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Ein  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptierter stochastischer Prozess  $X(\cdot) = (X(t), t \geq 0)$  auf  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  mit Werten in  $[0, \infty]$  wird als *Subordinator* bezeichnet, falls er folgende Eigenschaften besitzt:

- (1)  $X(0) = 0$  fast sicher.
- (2)  $X(\cdot)$  ist ein monoton wachsender Prozess.
- (3)  $X(\cdot)$  hat stochastisch unabhängige und zeitlich homogene Zuwächse auf  $[0, \xi)$  mit  $\xi := \inf\{t \geq 0 : X(t) = \infty\}$ , d.h. für  $s, t \geq 0$  ist  $X(t + s) - X(t)$  bedingt

unter  $\{t < \xi\}$  stochastisch unabhängig von  $\mathcal{F}_t$ , und es gilt  $X(t+s) - X(t) \stackrel{d}{=} X(s)$ .

(4)  $X(\cdot)$  besitzt fast sicher rechtsseitig stetige Pfade.

Subordinatoren sind spezielle Lévy-Prozesse, nämlich solche mit monoton wachsenden Pfaden und Zustandsraum  $[0, \infty]$ . Ein Beispiel für einen Subordinator ist  $(\tau(t), t \geq 0)$  mit  $\tau(t) := \inf\{s \geq 0 : B_s > t\}$  für eine Brownsche Bewegung  $(B_t, t \geq 0)$ .

**6.4. Bemerkungen.** (a)  $X(\cdot)$  ist ein càdlàg-Prozess gemäß der Eigenschaften (2) und (4).

(b) Die Eigenschaften (3) und (4) bedingen die Gültigkeit der starken Markov-Eigenschaft.

(c) Die Eigenschaften (1) und (3) implizieren, dass die  $t$ -Schritt-Übergangskerne durch die eindimensionalen Randverteilungen fixiert sind. Die Nicht-Negativität des Prozesses garantiert die Existenz der Laplace-Transformierten zu jedem Zeitpunkt. Die Verteilung eines Subordinators wird also festgelegt durch die Laplace-Transformierten der eindimensionalen Randverteilungen.

Die Laplace-Transformierte zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\mathbb{E}(\exp(-\lambda X(t))) = \exp(-t\Phi(\lambda)), \quad \lambda \geq 0,$$

wobei die Abbildung  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  *Laplace-Exponent* von  $X(\cdot)$  genannt wird. Der Laplace-Exponent legt die Verteilung eines Subordinators eindeutig fest. Ein wichtiges Ergebnis in diesem Zusammenhang ist die *Lévy-Khintchine-Formel* für Subordinatoren.

**6.5. Satz (Lévy-Khintchine-Formel).** (a) Sei  $\Phi$  Laplace-Exponent eines Subordinators  $X(\cdot) = (X(t), t \geq 0)$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Paar  $(k, d)$ ,  $k, d \geq 0$ , und ein eindeutig bestimmtes Maß  $L$  auf  $(0, \infty)$  mit  $\int (1 \wedge x) L(dx) < \infty$ , so dass für alle  $\lambda \geq 0$  gilt:

$$\Phi(\lambda) = k + d\lambda + \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-\lambda x}) L(dx). \quad (33)$$

(b) Jede Abbildung von  $[0, \infty)$  nach  $(0, \infty)$ , die die Gestalt (33) besitzt, ist Laplace-Exponent eines Subordinators.

BEWEIS: Siehe [Ber2], S. 7f.

$k$  heißt *Killing-Rate*,  $d$  *Drift-Koeffizient* und  $L$  *Lévy-Maß* von  $X(\cdot)$ . Diese kurze Darstellung soll für unsere Zwecke genügen. Wir stellen nun das Hauptresultat dieses Abschnittes vor.

**6.6. Theorem.** *Gegeben eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot) = (B_1(\cdot), B_2(\cdot), \dots)$  gemäß Bemerkung 6.1, gilt:*

- (a) *Mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert für alle  $t \geq 0$  die asymptotische Frequenz  $\lambda_1(t)$  des Blockes  $B_1(t)$ .*
- (b) *Der Prozess  $(-\log(\lambda_1(t)), t \geq 0)$  mit  $-\log(0) := \infty$  ist ein  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Subordinator. Der Drift-Koeffizient  $d$  wird durch die Erosionsrate  $c$ , die Killing-Rate  $k$  durch*

$$k = c + \int_{S^*} (1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j) \nu(ds)$$

*und das Lévy-Maß  $L$  durch*

$$L(dx) = e^{-x} \sum_{j=1}^{\infty} \nu(-\log s_j \in dx), \quad x \in (0, \infty),$$

*gegeben.*

Zum Beweis von Theorem 6.5 fügen wir drei Lemmata ein. Zunächst halten wir aber fest:

**6.7. Bemerkungen.** (a) Für festes, aber beliebiges  $t \geq 0$  ist  $\Pi(t)$  eine austauschbare Zufallspartition, und damit gilt nach Satz 3.5

$$\underline{\lambda}_1(t) = \lambda_1(t) = \overline{\lambda}_1(t) \quad \text{fast sicher,}$$

d.h.  $\lambda_1(t)$  ist eine wohldefinierte Zufallsvariable.

(b) Wegen der Verfeinerungseigenschaft von  $\Pi(\cdot)$  existiert eine Nullmenge  $N \in \mathfrak{A}$ , so dass für  $\omega \in N^c$  und  $s, t \in \mathbb{Q}^+$  gilt

$$\lambda_1(t)(\omega) \leq \lambda_1(s)(\omega), \quad \text{falls } s \leq t.$$

(c) Wegen der Verfeinerungseigenschaft von  $\Pi(\cdot)$  existiert eine Nullmenge  $\dot{N} \in \mathfrak{A}$ , so dass für  $\omega \in \dot{N}^c$  und  $s, t \geq 0$  gilt

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_1(t)(\omega) &\leq \underline{\lambda}_1(s)(\omega) \quad \text{sowie} \\ \overline{\lambda}_1(t)(\omega) &\leq \overline{\lambda}_1(s)(\omega), \quad \text{falls } s \leq t. \end{aligned}$$

Wir geben jetzt eine elementare Formel für die Momente der asymptotischen Frequenzen an.

**6.8. Lemma.** *Für jedes  $t \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$  gilt*

$$\mathbb{E}\lambda_1(t)^k = \exp \left\{ -t \left( c(k+1) + \int_{S^*} 1 - \sum_{n=1}^{\infty} s_n^{k+1} \nu(ds) \right) \right\}.$$

BEWEIS: Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $t \geq 0$  fest, aber beliebig. Wir behaupten

$$\mathbb{E}\lambda_1(t)^k = \mathbb{P}(\Pi_{k+1}(t) \text{ ist trivial}). \quad (34)$$

Wir benutzen die Darstellung

$$\lambda_1(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{B_1(t)}(j).$$

Wegen der (fast sicheren) absoluten Konvergenz gilt

$$\begin{aligned} \lambda_1^k(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{B_1(t)}(j) \right)^k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} k! \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_1) \dots \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_k) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} (k-1)! \sum_{1=i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_1) \dots \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_k) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} (k-1)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_1) \dots \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_{k-1}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} 2! \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_1) \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_2) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} 1! \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} k! \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_1) \dots \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_k). \end{aligned}$$

Die Austauschbarkeit von  $\Pi(\cdot)$  garantiert gemäß Korollar 3.6 (c)

$$\mathbb{P}(i_1 \in B_1(t), \dots, i_k \in B_1(t)) = \mathbb{P}(2 \in B_1(t), \dots, k+1 \in B_1(t))$$

für  $2 \leq i_1 < \dots < i_k < \infty$ . Insgesamt erhalten wir dann mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\lambda_1(t)^k &= \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{B_1(t)}(j)\right)^k \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n^k} k! \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_1) \dots \mathbf{1}_{B_1(t)}(i_k)\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} k! \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(i_1 \in B_1(t), \dots, i_k \in B_1(t)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} k! \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(2 \in B_1(t), \dots, k+1 \in B_1(t)) \\
&= \mathbb{P}(2 \in B_1(t), \dots, k+1 \in B_1(t)) \\
&= \mathbb{P}(\Pi_{k+1}(t) \text{ ist trivial})
\end{aligned}$$

und damit die Gleichung (34).

$((\Delta_t, k_t), t \geq 0)$  bezeichne den Poisson-Punkt-Prozess, der in Abschnitt 4.1 zur Konstruktion von  $\Pi(\cdot)$  eingesetzt wurde, d.h.  $((\Delta_t, k_t), t \geq 0)$  besitzt die Intensität  $\kappa \otimes \eta$  mit  $\kappa := \mu_\nu + \mu_c$  und  $\eta$  als dem Zählmaß auf  $\mathbb{N}$ . Wir schreiben  $(\Delta_t^{(1)}, t \geq 0)$  für die Einschränkung von  $((\Delta_t, k_t), t \geq 0)$  auf  $\mathcal{P} \times \{1\}$ .  $(\Delta_t^{(1)}, t \geq 0)$  ist also ein Poisson-Punkt-Prozess auf  $\mathcal{P}$  mit Intensität  $\kappa$ . Es besteht gemäß Konstruktionsalgorithmus aus Abschnitt 4.1 die Beziehung:

$$\Pi_{k+1}(t) \text{ ist trivial} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_s^{(1)} \notin \mathcal{P}_{k+1}^* \text{ für alle } s \in [0, t].$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Pi_{k+1}(t) \text{ ist trivial}) &= N^{\mathcal{P}_{k+1}^*}(t)(\{0\}) \\
&= \text{Poi}(\kappa(\mathcal{P}_{k+1}^*)t)(\{0\}) \\
&= \exp(-\kappa(\mathcal{P}_{k+1}^*)t),
\end{aligned}$$

wobei  $N^{\mathcal{P}_{k+1}^*}(\cdot)$  den zu  $(\Delta_t^{(1)}, t \geq 0)$  gehörigen Zählprozess bezeichnet. Aus

$$\begin{aligned}
\kappa(\mathcal{P}_{k+1}^*) &= \mu_c(\mathcal{P}_{k+1}^*) + \mu_\nu(\mathcal{P}_{k+1}^*) \\
&= c(k+1) + \int_{S^*} 1 - \sum_{n=1}^{\infty} s_n^{k+1} \nu(ds)
\end{aligned}$$

folgt schließlich mit der Gleichung (34) die Behauptung.  $\square$

$\lambda_1(t)$  nimmt für jedes  $t \geq 0$  Werte in  $[0, 1]$  an. Gemäß Bemerkung 6.7 ist folglich  $(\tau(t), t \geq 0)$  mit

$$\tau(t) := \lim_{\mathbb{Q} \ni t' \downarrow t} \log \left( \frac{1}{\lambda_1(t')} \right)$$

ein wohldefinierter rechtsseitig stetiger und monoton wachsender Prozess mit Werten in  $[0, \infty]$ .

**6.9. Lemma.**  $\tau(\cdot)$  ist ein  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Subordinator.

BEWEIS: Die rechtsseitige Stetigkeit der Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  (Lemma 2.22) impliziert, dass  $\tau(\cdot)$  diesbezüglich adaptiert ist. Nach Lemma 6.8 gilt  $\mathbb{E}\lambda_1(t) \rightarrow 1$  für  $\mathbb{Q} \ni t \downarrow 0$ . Für beliebiges  $\epsilon > 0$  folgt dann wegen  $0 \leq \lambda_1(\cdot) \leq 1$  mit der Markov-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|\lambda_1(t) - 1| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}|\lambda_1(t) - 1| = \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}(1 - \lambda_1(t)) \rightarrow 0$$

für  $\mathbb{Q} \ni t \downarrow 0$ , d.h.  $\lambda_1(t)$  konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen 1 für  $\mathbb{Q} \ni t \downarrow 0$ . Mit Bemerkung 6.7 (b) resultiert daraus offensichtlich  $\lambda_1(t) \rightarrow 1$  fast sicher für  $\mathbb{Q} \ni t \downarrow 0$ , also  $\tau(0) = 0$  fast sicher. An späterer Stelle werden wir die mit Bemerkung 6.7 (c) hier ableitbare Gleichung

$$\mathbb{P} \left( \lim_{t \downarrow 0} \bar{\lambda}_1(t) = \lim_{t \downarrow 0} \lambda_1(t) = 1 \right) = 1 \quad (35)$$

wieder aufgreifen.

Zum Nachweis der Eigenschaft (3) von Subordinatoren nutzen wir die Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft von  $\Pi(\cdot)$  gemäß Bemerkung 2.16 (a). Wir erhalten für  $s, t \geq 0$  die Darstellung

$$\lambda_1(t + s) \stackrel{d}{=} \lambda_1(t) \lambda'_1(s),$$

wobei sich  $\lambda'_1(\cdot)$  auf eine Kopie von  $\Pi(\cdot)$  bezieht, die stochastisch unabhängig von  $\mathcal{F}_t$  ist. Damit gilt

$$\tau(t + s) - \tau(t) \stackrel{d}{=} -\log \lambda'_1(s) \stackrel{d}{=} \tau(s)$$

und  $\tau(t + s) - \tau(t)$  ist stochastisch unabhängig von  $\mathcal{F}_t$ . □

Bislang ist noch ungeklärt, ob die asymptotische Frequenz gleichzeitig für alle Zeitpunkte fast sicher existiert. Das anschließende Lemma widmet sich dieser Frage.

**6.10. Lemma.** *Mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert für alle  $t \geq 0$  die asymptotische Frequenz des Blockes  $B_1(t)$ . Es gilt  $\lambda_1(\cdot) = \exp(-\tau(\cdot))$  fast sicher.*

BEWEIS: Nach Bemerkung 6.7 (b) gilt mit Ausnahme einer Nullmenge  $N \in \mathfrak{A}$  für jedes  $t \geq 0$

$$\exp(-\tau(t)) = \lim_{\mathbb{Q} \ni t' \downarrow t} \lambda_1(t') \leq \underline{\lambda}_1(t)$$

sowie

$$\bar{\lambda}_1(t) \leq \inf_{s < t} \lim_{\mathbb{Q} \ni t' \downarrow s} \lambda_1(t') = \exp(-\tau(t-)).$$

Damit erhalten wir für  $\omega \in N^c$

$$\underline{\lambda}_1(t)(\omega) = \lambda_1(t)(\omega) = \bar{\lambda}_1(t)(\omega) \quad (36)$$

und  $\lambda_1(t)(\omega) = \exp(-\tau(t)(\omega))$ , falls  $s \mapsto \tau(s)(\omega)$  in  $t$  stetig ist.

Es bleiben die Unstetigkeitsstellen von  $\tau(\cdot)$  zu überprüfen. Wir definieren für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\epsilon > 0$

$$T(k, \epsilon) := \inf \{t \geq T(k-1, \epsilon) : \tau(t) \in (\tau(t-) + \epsilon, \infty]\}$$

mit  $T(0, \epsilon) := 0$ . Da  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  rechtsseitig stetig ist, folgt mit Bemerkung 6.4 (a), dass  $T(k, \epsilon)$  eine  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Stoppzeit ist (vergleiche wiederum [Irle], S. 118f).  $T(k, \epsilon)$  ist der Zeitpunkt, zu dem  $\tau(\cdot)$  den  $k$ -ten Sprung größer als  $\epsilon$  vollzieht. Wir setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $T(k, \epsilon) < \infty$  voraus. Den  $\mathcal{P}$ -wertigen Prozess  $\Pi'(\cdot) = (\Pi'(t), t \geq 0)$  legen wir fest für  $t \geq 0$  durch

$$\Pi(T(k, \epsilon) + t)_{B_1(T(k, \epsilon))} = \Pi'(t) \circ B_1(T(k, \epsilon)).$$

Die starke Markov-Eigenschaft und die Fragmentierungs- und Skalierungseigenschaft von  $\Pi(\cdot)$  (siehe Bemerkung 2.16 (a)) implizieren, dass  $\Pi'(\cdot)$  eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung ist. Bezeichnen wir mit  $\bar{\lambda}'_1(\cdot)$  und  $\underline{\lambda}'_1(\cdot)$  die obere bzw. untere asymptotische Frequenz des ersten Blockes von  $\Pi'(\cdot)$ , so erhalten wir für jedes  $t \geq 0$

$$\underline{\lambda}_1(T(k, \epsilon)) \underline{\lambda}'_1(t) \leq \underline{\lambda}_1(T(k, \epsilon) + t) \leq \underline{\lambda}_1(T(k, \epsilon)) \bar{\lambda}'_1(t) \quad (37)$$

und

$$\bar{\lambda}_1(T(k, \epsilon)) \underline{\lambda}'_1(t) \leq \bar{\lambda}_1(T(k, \epsilon) + t) \leq \bar{\lambda}_1(T(k, \epsilon)) \bar{\lambda}'_1(t). \quad (38)$$

Gemäß der Gleichung (35) aus dem Beweis von Lemma 6.10 folgt mit (37)

$$\lim_{t \downarrow 0} \underline{\lambda}_1(T(k, \epsilon) + t) = \underline{\lambda}_1(T(k, \epsilon)) \quad \text{fast sicher} \quad (39)$$

und mit (38)

$$\lim_{t \downarrow 0} \bar{\lambda}_1(T(k, \epsilon) + t) = \bar{\lambda}_1(T(k, \epsilon)) \quad \text{fast sicher.} \quad (40)$$

Da  $\tau(\cdot)$  nach Definition pfadweise fast sicher höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt, können wir mit Hilfe der rechtsseitigen Stetigkeit von  $\tau(\cdot)$  aus den Gleichungen (36), (39) und (40) schließen

$$\lambda_1(T(k, \epsilon)) = \bar{\lambda}_1(T(k, \epsilon)) = \exp(-\tau(T(k, \epsilon))) \quad \text{fast sicher.}$$

Diese Identität ist mit Ausnahme einer Nullmenge gleichzeitig für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\epsilon \in \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$  erfüllt und damit für alle Unstetigkeitsstellen von  $\tau(\cdot)$ .  $\square$

Wir führen jetzt den Beweis von Theorem 6.6 zu Ende.

BEWEIS VON THEOREM 6.6: Teil (a) ist mit Lemma 6.10 gezeigt. Aus Lemma 6.9 und Lemma 6.10 folgt ferner, dass  $\tau(\cdot) = (-\log \lambda_1(t), t \geq 0)$  ein  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Subordinator ist. Es müssen noch die Spezifikationen des Drift-Koeffizienten, der Killing-Rate und des Lévy-Maßes nachvollzogen werden. Gemäß Lemma 6.8 gilt für alle  $q \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} \exp(-q\tau(t)) = \mathbb{E} \lambda_1(t)^q = \exp \left\{ -t \left( c(q+1) + \int_{S^*} 1 - \sum_{n=1}^{\infty} s_n^{q+1} \nu(ds) \right) \right\}.$$

Um den letzten Term in der Gestalt der Lévy-Khintchine-Formel aufzubereiten, setzen wir  $d := c \geq 0$ ,

$$k := c + \int_{S^*} 1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j \nu(ds) \geq 0 \quad (41)$$

$$\text{und } L(dx) := e^{-x} \sum_{j=1}^{\infty} \nu(-\log s_j \in dx) \quad \text{für } x \in (0, \infty).$$

Wir prüfen

$$\int_{(0, \infty)} (1 \wedge x) L(dx) = \underbrace{\int_{(0, \log 2)} (1 \wedge x) L(dx)}_{=: A_1} + \underbrace{\int_{[\log 2, \infty)} (1 \wedge x) L(dx)}_{=: A_2} < \infty$$



nach. Es gilt wegen  $s_i \leq \frac{1}{2}$  für  $i \geq 2$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{(0, \log 2)} (1 \wedge x) e^{-x} \sum_{j=1}^{\infty} \nu(-\log s_j \in dx) \\
&= \int_{(0, \log 2)} (1 \wedge x) e^{-x} \nu(-\log s_1 \in dx) \\
&\leq \int_{S^*} (-\log s_1) s_1 \mathbf{1}_{(\frac{1}{2}, 1)}(s_1) \nu(ds) \\
&\leq \int_{S^*} 1 - s_1 \nu(ds) < \infty
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{[\log 2, \infty)} (1 \wedge x) e^{-x} \sum_{j=1}^{\infty} \nu(-\log s_j \in dx) \\
&\leq \int_{S^*} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(0, \frac{1}{2}]}(s_j) s_j \nu(ds) \\
&\leq 2 \int_{S^*} 1 - s_1 \nu(ds) < \infty.
\end{aligned}$$

Der Laplace-Exponent  $\Phi$  von  $\tau(\cdot)$  wird dann für  $q \in \mathbb{N}$  gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Phi(q) &= c(q+1) + \int_{S^*} 1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j^{q+1} \nu(ds) \\
&= c(q+1) + \int_{S^*} 1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j \nu(ds) + \int_{S^*} \sum_{j=1}^{\infty} (1 - s_j^q) s_j \nu(ds) \\
&= c(q+1) + \int_{S^*} 1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j \nu(ds) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{[0, \infty]} (1 - e^{-qx}) e^{-x} \nu^{-\log s_j}(dx) \\
&= c + \int_{S^*} 1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j \nu(ds) + cq + \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-qx}) e^{-x} \sum_{j=1}^{\infty} \nu(-\log s_j \in dx) \\
&= k + dq + \int_{(0, \infty)} 1 - e^{-qx} L(dx).
\end{aligned} \tag{42}$$

Wir erhalten insgesamt

$$\mathbb{E} \exp(-q\tau(t)) = \exp(-t\Phi(q)), \quad q \in \mathbb{N}, \tag{43}$$

$$\text{mit } \Phi(r) = k + dr + \int_{(0,\infty)} 1 - e^{-rx} L(dx), \quad r \in (0, \infty). \quad (44)$$

Nach dem Satz von Stone-Weierstrass (siehe dazu Anhang im Anschluss an dieses Kapitel) lässt sich  $x \mapsto \exp(-rx)$ ,  $r \geq 0$ , gleichmäßig approximieren durch Linearkombinationen der Abbildungen  $x \mapsto \exp(-qx)$  mit  $q \in \mathbb{N}$ , d.h. es existiert eine Folge  $(a_k)_{k \geq 1}$  reeller Zahlen, so dass  $\omega \mapsto \exp(-r\tau(t)(\omega))$  approximiert wird durch

$$\omega \mapsto \sum_{k \geq 1} a_k \exp(-k\tau(t)(\omega)).$$

Es folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\mathbb{E} \exp(-r\tau(t)) = \mathbb{E} \sum_{k \geq 1} a_k \exp(-k\tau(t)) = \sum_{k \geq 1} a_k \exp(-t\Phi(k)).$$

Also wird durch die Gleichung (43) die Verteilung von  $\tau(\cdot)$  eindeutig festgelegt. Gemäß Satz 6.4 (b) existiert ein (eindeutig bestimmter) Subordinator mit dem Laplace-Exponenten  $\Phi$  aus der Gleichung (44). Damit ist  $\Phi$  der Laplace-Exponent von  $\tau(\cdot)$  für alle  $r \in (0, \infty)$ , und der Beweis ist abgeschlossen.  $\square$

**6.11. Bemerkungen.** (a) Der Laplace-Exponent  $\Phi$  bzw. die Verteilung des Prozesses  $(-\log(\lambda_1(t)), t \geq 0)$  determiniert im Allgemeinen nicht die Verteilung von  $\Pi(\cdot)$  bzw.  $\Lambda^\downarrow(\Pi(\cdot))$ , wie folgendes Beispiel verdeutlicht: Gegeben zwei homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen  $\Pi^{(1)}(\cdot)$  und  $\Pi^{(2)}(\cdot)$  mit Parametern  $(\nu_1, 0)$  bzw.  $(\nu_2, 0)$ , wobei

$$\begin{aligned} \nu_1(ds) &:= \frac{5}{6} \delta_{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots)}(ds) + \frac{1}{6} \delta_{(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \dots)}(ds), \\ \nu_2(ds) &:= \frac{1}{2} \delta_{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots)}(ds) + \frac{1}{2} \delta_{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \dots)}(ds), \end{aligned}$$

stimmen deren Laplace-Exponenten überein, obwohl  $\Pi^{(1)}(\cdot)$  und  $\Pi^{(2)}(\cdot)$  verschiedene Verteilungen haben. Es gilt nämlich gemäß der Gleichung (42)

$$\begin{aligned} \Phi_1(r) &= c(r+1) + \int_{S^*} 1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j^{r+1} \nu(ds) \\ &= \frac{5}{6} \left( 1 - 3 \left( \frac{1}{3} \right)^{r+1} \right) + \frac{1}{6} \left( 1 - 6 \left( \frac{1}{6} \right)^{r+1} \right) \\ &= 1 - \frac{5}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^{r+1} - \left( \frac{1}{6} \right)^{r+1}. \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\Phi_2(r) = 1 - \frac{5}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^{r+1} - \left( \frac{1}{6} \right)^{r+1},$$

d.h.  $\Phi_1(r) = \Phi_2(r)$ .

(b) Gemäß der Gleichung (41) wird die Killing-Rate durch zwei Phänomene bestimmt. Zum einen ist die Erosionsrate als Rate der kontinuierlichen Zerlegung entscheidend. Zum anderen müssen wir den Term  $k' = \int_{S^*} 1 - \sum_{j \geq 1} s_j \nu(ds)$  in Betracht ziehen. Für ein  $s \in S^*$  mit  $1 - \sum_{j \geq 1} s_j := s_0 > 0$  hat die Familie der Eielement-Blöcke einer austauschbaren Zufallspartition mit Verteilung  $\mu_s$  fast sicher die asymptotische Frequenz  $s_0$ . Also gibt  $k'$  die Rate an, mit der ein gegebenes Element durch einen abrupten, d.h. durch  $\mu_\nu$  bewirkten Zerfall des betreffenden Blockes in unendlich viele Eielement-Blöcke vom Block separiert wird.

(c) Nach einem Ergebnis für Subordinatoren (vergleiche z.B. [Ber2], S. 7) gilt

$$\zeta := \inf\{t \geq 0 : \tau(t) = \infty\} \stackrel{d}{=} \text{Exp}(k).$$

Für  $k > 0$  ist damit fast sicher nach endlicher Zeit  $t \geq 0$  die asymptotische Frequenz  $\lambda_1(t)$  gleich 0. Der Fall  $k = 0$  liegt vor, falls  $c = 0$  und  $\nu(\sum_{i \geq 1} s_i < 1) = 0$ . Hier gilt  $\mathbb{P}(\zeta = \infty) = 1$ .

In Kapitel 4 und 5 haben wir Ergebnisse präsentiert, die vorausgesetzt haben, dass bei homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen auf die Bedingungen (1) und (2) aus Definition 2.14 verzichtet werden kann. An dieser Stelle wollen wir mit Hilfe des Theorems 6.6 diese Lücke schließen.

**6.12. Korollar.** *Eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  gemäß Bemerkung 6.1 ist automatisch regulär, und der Prozess  $(\Lambda^\downarrow(\Pi(t)), t \geq 0)$  ist stetig in Wahrscheinlichkeit, d.h. die Forderung der Eigenschaften (1) und (2) aus Definition 2.14 ist für homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen redundant.*

BEWEIS: Nach Theorem 6.6 (a) existiert die asymptotische Frequenz von  $B_1(t)$  fast sicher gleichzeitig für alle  $t \geq 0$ . Aufgrund der Fragmentierungseigenschaft ist dies für sämtliche Blöcke von  $\Pi(\cdot)$  der Fall, d.h.  $\Pi(\cdot)$  ist regulär.

Wie in Abschnitt 3.3 bezeichne  $B_k(\cdot)$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  den Block von  $\Pi(\cdot)$ , der  $k$  als das kleinste Element enthält. Wegen der Verfeinerungseigenschaft von  $\Pi(\cdot)$  ist  $t \mapsto \lambda_k(t)$  monoton fallend für  $t \geq t_k := \inf\{s \geq 0 : B_k(s) \neq \emptyset\}$ . Da

$$\mathbb{P}(B_k(t-) \neq B_k(t+)) = 0$$

für jedes  $t \geq 0$  gemäß Bemerkung 2.18 und  $\lambda_k(t) = 0$  für  $t < t_k$ , ist  $\lambda_k(\cdot)$  insgesamt stetig in Wahrscheinlichkeit für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Bemerkung 2.1 (b) impliziert daraufhin

die Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit für  $\Lambda^\downarrow(\Pi(\cdot))$ .  $\square$

Die Betrachtung hat sich in diesem Abschnitt bislang auf homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen beschränkt. Der Schlüssel zu einem entsprechenden Resultat für selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen mit beliebigem Index  $\alpha$  ist die in Abschnitt 5.3 vorgestellte Indextransformation.

**6.13. Korollar.** *Sei  $\Pi(\cdot)$  eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit Parametern  $(\alpha, \nu, c)$  und  $\xi(\cdot) = (\xi_t, t \geq 0)$  ein Subordinator mit Laplace-Exponent  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , gegeben durch*

$$\Phi(q) := c(q+1) + \int_{S^*} 1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j^{q+1} \nu(ds).$$

Setzen wir

$$p(t) := \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u 1_{\{\xi_r < \infty\}} \exp(\alpha \xi_r) dr > t \right\}$$

und  $Z_t := \exp(-\xi_{p(t)})$  für  $t \geq 0$  (mit der Konvention  $Z_t = 0$ , falls  $p(t) = \infty$ ), so haben  $(Z_t, t \geq 0)$  und  $(\lambda_1(t), t \geq 0)$  dieselbe Verteilung.

BEWEIS: Es sei  $(\lambda_1^{(-\alpha)}(t), t \geq 0)$  der Prozess der asymptotischen Frequenzen des ersten Blockes von  $\Pi^{(-\alpha)}(\cdot)$ . Gemäß Theorem 5.14 und Theorem 6.6 gilt

$$(\xi_t, t \geq 0) \stackrel{d}{=} (-\log \lambda_1^{(-\alpha)}(t), t \geq 0).$$

Wir erhalten weiter nach Theorem 5.14

$$\begin{aligned} \exp(-\xi_{p(\cdot)}) &\stackrel{d}{=} \lambda_1^{(-\alpha)} \left( \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u 1_{\{\lambda_1^{(-\alpha)}(r) > 0\}} \exp(-\alpha \log \lambda_1^{(-\alpha)}(r)) dr > \cdot \right\} \right) \\ &= (\lambda_1^{(-\alpha)})^{(\alpha)}(\cdot) \\ &= \lambda_1(\cdot), \end{aligned}$$

d.h. die Behauptung.  $\square$

**6.14. Bemerkung.** Bei dem Prozess  $\left(\frac{1}{\lambda_1(t)}, t \geq 0\right)$  handelt es sich gemäß der von Lamperti [La] eingeführten Terminologie um einen monoton wachsenden selbstähnlichen bzw. semi-stabilen Markov-Prozess mit Index  $\frac{1}{\alpha}$  und Startwert 1 für

$\alpha > 0$ . Für  $l > 0$  haben  $\left(l \frac{1}{\lambda_1(l-\alpha t)}, t \geq 0\right)$  unter  $\mathbb{P}_x$  und  $\left(\frac{1}{\lambda_1(t)}, t \geq 0\right)$  unter  $\mathbb{P}_{lx}$  dieselbe Verteilung. Dabei bezeichnet  $\mathbb{P}_x$  für  $x > 0$  die Verteilung von  $\frac{1}{\lambda_1(\cdot)}$ , bedingt unter  $\frac{1}{\lambda_1(0)} = x$ .

Wir notieren, dass der erste Augenblick, zu dem die Masse des betrachteten Fragments verschwunden ist,

$$\zeta := \inf\{t \geq 0 : \lambda_1(t) = 0\},$$

offenbar dieselbe Verteilung hat wie das sogenannte Exponentialfunktional

$$\zeta' := \int_0^\infty \exp(\alpha \xi(r)) \, dr,$$

das u.a. von Carmona, Petit und Yor ([Ca]) genauer untersucht wurde. Wir beschränken uns auf folgendes Ergebnis, das auf Haas ([Ha]) zurückgeht.

**6.15. Proposition.** *Es gilt  $\mathbb{P}(\zeta = \infty) = 0$  oder 1, d.h. das betrachtete Fragment verschwindet entweder fast sicher nach endlicher Zeit oder hat für endliche Zeiten fast sicher Masse  $> 0$ .*

BEWEIS: Eine Folge  $X_{\mathbb{N}} = (X_n)_{n \geq 1}$  identisch verteilter stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen sei definiert durch  $X_n := (\xi(n+t) - \xi(n))_{0 \leq t \leq 1}$  für jedes  $n \geq 1$ . Es ist klar, dass  $\zeta'$  als Funktion der Zufallsvariablen  $X_n$ ,  $n \geq 1$ , ausgedrückt werden kann, etwa  $\zeta' = f(X_1, X_2, \dots)$ . Da

$$\{\zeta' = \infty\} = \left\{ \int_n^\infty \exp(\alpha \xi(r)) \, dr = \infty \right\}$$

für alle  $n \geq 1$  erfüllt ist, erhalten wir

$$\{f(X_{\sigma(\mathbb{N})}) = \infty\} = \{f(X_{\mathbb{N}}) = \infty\}$$

für jede endliche Permutation  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , d.h.  $\{\zeta' = \infty\}$  ist invariant unter endlichen Permutationen der Zufallsvariablen  $X_n$ ,  $n \geq 1$ . Mit dem 0-1-Gesetz von Hewitt/Savage (siehe z.B. [Als1], S. 162ff) folgt die Behauptung.  $\square$

In den Arbeiten [Be], [Ber5] und [Ha] finden sich detaillierte Ausarbeitungen über das asymptotische Verhalten des Prozesses  $\lambda_1(\cdot)$ . Hierbei werden insbesondere

die Fälle „ $k = 0$ “, „ $k > 0$ “ sowie „ $\alpha < 0$ “, „ $\alpha = 0$ “ und „ $\alpha > 0$ “ mit  $k$  als Killing-Rate und  $\alpha$  als Selbstähnlichkeitsindex unterschieden.

## 6.2 Anmerkungen zur Erosionsrate und dem Lévy-Maß

Erosionsrate und Lévy-Maß bestimmen die Verteilung einer homogenen Fragmentierung. Die Erosionsrate steht für die stetige, schleichende Zerlegung, wie wir bereits in Abschnitt 4.2 erwähnt haben. Wir wollen dies nun präzisieren.

**6.16. Proposition.** *Gegeben homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen  $\Pi(\cdot)$  und  $\dot{\Pi}(\cdot)$  mit den Parametern  $(\nu, c)$  bzw.  $(\nu, 0)$ , gilt*

$$(\Lambda^\downarrow(\Pi(t)), t \geq 0) \stackrel{d}{=} (e^{-ct} \Lambda^\downarrow(\dot{\Pi}(t)), t \geq 0).$$

BEWEIS: Wir betrachten zunächst eine von  $\dot{\Pi}(\cdot)$  stochastisch unabhängige homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\ddot{\Pi}(\cdot) = (\ddot{\Pi}(t), t \geq 0)$  mit den Parametern  $(0, c)$  und behaupten

$$\Lambda^\downarrow(\ddot{\Pi}(\cdot)) = (e^{-c}, 0, \dots) \quad \text{fast sicher.} \quad (45)$$

Es bezeichne  $((\Delta_t, k_t), t \geq 0)$  einen Poisson-Punkt-Prozess mit Intensität  $\mu_c \otimes \eta$ , der in diesem Fall gemäß der Bemerkung 4.6 (c) zur Konstruktion der homogenen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\ddot{\Pi}(\cdot)$  eingesetzt werde. Für eine beliebige Sprungzeit  $t \geq 0$  des Poisson-Punkt-Prozesses gilt

$$\Delta_t \in \{\epsilon_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Wie in Abschnitt 4.2 sei dabei  $\epsilon_n := [\mathbb{N} \setminus \{n\}, \{n\}, \emptyset, \dots]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Falls der  $k_t$ -te Block von  $\ddot{\Pi}(t)$  mehr als ein Element enthält, wird demnach genau ein Element abgespalten, andernfalls findet keine Zerlegung statt, d.h. es existiert genau ein Block zum Zeitpunkt  $t$ , der mehr als ein Element enthält. Wir bezeichnen ihn mit  $B(t)$ . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass dieser Block die 1 enthält. Fokussieren wir uns auf den Prozess  $\ddot{\Pi}_n(\cdot)$  für ein  $n \geq 2$ ,

so sind bei der Konstruktion lediglich die Sprungzeiten  $t \geq 0$  des Poisson-Punkt-Prozesses zu berücksichtigen, für die  $k_t = 1$  und  $\Delta_t \in \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  gilt. Wegen  $\mu_c \otimes \eta(\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\} \times \{1\}) < \infty$  hat dieser eingeschränkte Punkt-Prozess diskrete Sprungzeiten. Die Zufallsvariablen

$$Z_i := \inf\{s \geq 0 : k_s = 1 \text{ und } \Delta_s = \epsilon_i\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

die die Wartezeit bis zum Ausschluss des  $i$ -ten Elements angeben, sind gemäß der Eigenschaften von Poisson-Punkt-Prozessen stochastisch unabhängig, und es gilt  $Z_i \stackrel{d}{=} \text{Exp}(c)$  für  $1 \leq i \leq n$ . Für die Anzahl  $Y_n(t)$  der bis zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  ausgeschlossenen Elemente ergibt sich damit

$$Y_n \stackrel{d}{=} \text{Bin}(n, 1 - e^{-tc}).$$

Mit dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\frac{1}{n} Y_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-tc} \quad \text{fast sicher,}$$

d.h.

$$\Lambda(B(t)) = e^{-tc} \quad \text{fast sicher}$$

für alle  $t \geq 0$ . Also gilt

$$\Lambda^\downarrow(\ddot{\Pi}(t)) = (e^{-tc}, 0, \dots) \quad \text{fast sicher}$$

gleichzeitig für alle  $t \in \mathbb{Q}^+$  und aufgrund der Monotonie lässt sich daraus Gleichung (45) schließen.

Als Nächstes verifizieren wir die Verteilungsgleichheit von  $\Pi(\cdot)$  und  $\ddot{\Pi} \cap \dot{\Pi}(\cdot)$ , wobei  $\ddot{\Pi} \cap \dot{\Pi}(t)$  für  $t \geq 0$  und  $i, j \in \mathbb{N}$  durch die Äquivalenzrelation

$$i \stackrel{\ddot{\Pi} \cap \dot{\Pi}(\cdot)}{\sim} j \quad :\Leftrightarrow \quad (i \stackrel{\ddot{\Pi}(\cdot)}{\sim} j) \text{ und } (i \stackrel{\dot{\Pi}(\cdot)}{\sim} j)$$

definiert werde. Offenbar ist  $\ddot{\Pi} \cap \dot{\Pi}(t)$  für jedes  $t \geq 0$  eine austauschbare Zufallspartition. Mit Lemma 2.15 folgt leicht, dass es sich bei  $\ddot{\Pi} \cap \dot{\Pi}(\cdot)$  um eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung handelt. Sei  $n \geq 2$  fest, aber beliebig. Aus

$$T_1(n) := \inf\{t \geq 0 : \dot{\Pi}(t) \in \mathcal{P}_n^*\} \quad \text{und} \quad T_1(n) \stackrel{d}{=} \text{Exp}(\mu_\nu(\mathcal{P}_n^*))$$

sowie

$$T_2(n) := \inf\{t \geq 0 : \ddot{\Pi}(t) \in \mathcal{P}_n^*\} \quad \text{und} \quad T_2(n) \stackrel{d}{=} \text{Exp}(\mu_c(\mathcal{P}_n^*))$$

ergibt sich

$$T_1(n) \wedge T_2(n) = \inf\{t \geq 0 : \ddot{\Pi}(t) \cap \dot{\Pi}(t) \in \mathcal{P}_n^*\}$$

und

$$T_1(n) \wedge T_2(n) \stackrel{d}{=} \text{Exp}((\mu_c + \mu_\nu)(\mathcal{P}_n^*)).$$

Für eine nicht-triviale Partition  $\pi_n$  von  $\{1, \dots, n\}$  gilt dann gemäß Satz 4.2

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\dot{\Pi}_n \cap \ddot{\Pi}_n(T_1(n) \wedge T_2(n)) = \pi_n) \\ &= \mathbb{P}(\dot{\Pi}_n(T_1(n)) = \pi_n | T_1(n) < T_2(n)) \mathbb{P}(T_1(n) < T_2(n)) + \\ & \quad \mathbb{P}(\ddot{\Pi}_n(T_2(n)) = \pi_n | T_2(n) < T_1(n)) \mathbb{P}(T_2(n) < T_1(n)) \\ &= \mathbb{E}T_1(n) \mu_\nu(\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n = \pi_n\}) \mathbb{P}(T_1(n) < T_2(n)) + \\ & \quad \mathbb{E}T_2(n) \mu_c(\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n = \pi_n\}) \mathbb{P}(T_2(n) < T_1(n)) \\ &= \frac{1}{\mu_\nu(\mathcal{P}_n^*)} \mu_\nu(\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n = \pi_n\}) \frac{\mu_\nu(\mathcal{P}_n^*)}{(\mu_\nu + \mu_c)(\mathcal{P}_n^*)} + \\ & \quad \frac{1}{\mu_c(\mathcal{P}_n^*)} \mu_c(\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n = \pi_n\}) \frac{\mu_c(\mathcal{P}_n^*)}{(\mu_\nu + \mu_c)(\mathcal{P}_n^*)} \\ &= \mathbb{E}(T_1(n) \wedge T_2(n)) (\mu_\nu + \mu_c)(\{\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n = \pi_n\}). \end{aligned}$$

Somit ist  $\mu_\nu + \mu_c$  nach Satz 4.2 das charakteristische Maß von  $\dot{\Pi} \cap \ddot{\Pi}(\cdot)$ , d.h.  $\dot{\Pi} \cap \ddot{\Pi}(\cdot)$  hat die Parameter  $(\nu, c)$  und demnach dieselbe Verteilung wie  $\Pi(\cdot)$ .

Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von  $\dot{\Pi}(\cdot)$  und  $\ddot{\Pi}(\cdot)$  gilt gemäß der Gleichung (45)

$$\Lambda^\downarrow((\dot{\Pi} \cap \ddot{\Pi})(t)) = e^{-ct} \Lambda^\downarrow(\dot{\Pi}(t)) \quad \text{fast sicher}$$

gleichzeitig für alle  $t \geq 0$ , so dass

$$(\Lambda^\downarrow(\Pi(t)), t \geq 0) \stackrel{d}{=} (e^{-ct} \Lambda^\downarrow(\dot{\Pi}(t)), t \geq 0)$$

folgt. □

Die Erosionsrate  $c$ , also die Rate, mit der ein einzelnes Element von ihrem Block getrennt wird, führt - wie gezeigt - zu einer ständigen Reduktion der asymptotischen Frequenzen, falls  $c > 0$ . Für eine homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $(\Pi(t), t \geq 0) = ((B_1(t), B_2(t), \dots), t \geq 0)$  mit den Parametern  $(\nu, c)$  gilt ferner

$$\sum_{k \geq 1} \Lambda^\downarrow(B_k(t)) \leq e^{-tc} \quad \text{fast sicher}$$

für alle  $t \geq 0$ . Für nichthomogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen halten wir folgendes Resultat fest:



**6.17. Korollar.** *Gegeben eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  mit den Parametern  $(\alpha, 0, c)$  und  $\alpha \neq 0$ , gilt*

$$\Lambda^\downarrow(\Pi(t)) = \begin{cases} ((1 + tc\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}, 0, \dots) & : \text{ falls } 1 + tc\alpha > 0 \\ (0, 0, \dots) & : \text{ sonst} \end{cases}$$

*fast sicher für alle  $t \geq 0$*

BEWEIS: Wir wenden die Gleichung (45) auf  $\Pi^{(-\alpha)}(\cdot)$  an und führen anschließend die Zeittransformation aus Abschnitt 5.3 durch.  $\square$

Wir widmen uns jetzt dem Lévy-Maß und betrachten dafür eine selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  mit den Parametern  $(\alpha, \nu, 0)$ . Es sei  $\Xi(\cdot) = (\Xi(t), t \geq 0)$  ein Punkt-Prozess mit Werten in  $S^*$ , definiert durch

$$\Xi(t) := \begin{cases} (1, 0, \dots) & : \text{ falls } \lambda_1(t) = \lambda_1(t-) \\ s_t & : \text{ falls } \Lambda^\downarrow(\Pi(t)_{B_1(t-)}) = \lambda_1(t-)s_t \text{ für ein } s_t \in S^* \end{cases}.$$

**6.18. Proposition.** *Die Intensität des Punkt-Prozesses  $\Xi(\cdot)$  wird gegeben durch*

$$\mathbf{1}_{\{\lambda_1(t-) > 0\}} \lambda_1(t-)^{\alpha} \nu(ds) dt$$

*für  $s \in S^*$  und  $t \geq 0$ .*

BEWEIS: Sei zunächst  $\alpha = 0$  angenommen. Wir greifen auf den Poisson-Punkt-Prozess  $((\Delta_t, k_t), t \geq 0)$  mit Intensität  $\nu \otimes \eta$  zurück, der gemäß Abschnitt 4.1 zur Konstruktion von  $\Pi(\cdot)$  verwendet werden kann. Es sei  $\Delta^{(1)}(\cdot) = (\Delta_t^{(1)}, t \geq 0)$  die Einschränkung auf  $\mathcal{P} \times \{1\}$  und  $D(\cdot) = (D_t, t \geq 0)$  der Poisson-Punkt-Prozess mit  $D_t := \Lambda^\downarrow(\Delta_t^{(1)})$ .  $D(\cdot)$  hat demnach das charakteristische Maß  $\nu$ . Falls  $\Delta^{(1)}(\cdot)$  und damit auch  $D(\cdot)$  zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  einen Punkt annehmen, hat

$$\Pi(t)_{B_1(t-)} = \Delta_t \circ B_1(t-) \quad \text{und} \quad \Lambda^\downarrow(\Pi(t)_{B_1(t-)}) = D_t \lambda_1(t-)$$

Gültigkeit. Solange  $\lambda_1(t-) > 0$  für  $t \geq 0$  gilt, nimmt  $D(\cdot)$  in Stetigkeitsstellen von  $(\lambda_1(s), s \leq t)$  keinen Punkt an, d.h. wir erhalten  $\Xi_t = D_t$  für  $\lambda_1(t-) > 0$ . Die Behauptung für  $\alpha = 0$  ist hiermit gezeigt.

Für den Fall  $\alpha \neq 0$  betrachten wir die homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi^{(-\alpha)}(\cdot) = (\Pi(T_t^{(-\alpha)}), t \geq 0)$  mit  $\lambda_1^{(-\alpha)}(\cdot) = (\lambda_1(T_t^{(-\alpha)}(1)), t \geq 0)$ . Die Behauptung folgt nun

sofort aus dem Ergebnis für homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen, wenn wir

$$\lambda_1(t) = \lambda_1^{(-\alpha)} \left( \int_0^t \lambda_1(s)^\alpha ds \right), \quad \text{falls } \lambda_1(t-) > 0,$$

berücksichtigen (vergleiche z.B. [Co], S. 48).  $\square$

Die Bedeutung der Erosionsrate und des Lévy-Maßes für selbstähnliche Fragmentierungen manifestiert sich also insbesondere über deren Auswirkungen auf den assoziierten Prozess der asymptotischen Frequenzen bzw. Intervalllängen (siehe Bemerkung 6.2 (a)): Der permanenten stetigen Abnahme der asymptotischen Frequenz oder Intervalllänge steht die abrupte unstetige Reduktion gegenüber. Gemäß Abschnitt 3.2 bzw. Bemerkung 6.2 (b) sind diese beiden Phänomene auch für  $S^\downarrow$ -Fragmentierungen charakterisierend.

Zum Abschluss des theoretischen Teils dieser Arbeit wollen wir in Anlehnung an [Mi], S. 10f, ein Resultat angeben, das noch einmal aufzeigt, wie sehr reglementiert die Verteilung einer selbstähnlichen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  ist. Dabei sei an

$$T(n) := \inf\{t \geq 0 : \Pi(t) \in \mathcal{P}_n^*\}$$

und  $p(n) := \mathbb{P}^{\Pi_n(T(n))}$  für  $n \in \mathbb{N}$  erinnert.

**6.19. Proposition.** *Das charakteristische Maß  $\kappa$  und damit auch das Lévy-Maß  $\nu$  einer selbstähnlichen  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot)$  mit unbekanntem Index  $\alpha \in \mathbb{R}$  werden durch die Folge  $(p(n), n \geq 2)$  von Verteilungen bis auf eine multiplikative Konstante festgelegt.*

BEWEIS: Für den Fall  $\alpha = 0$  entnehmen wir dem Beweis von Satz 4.2 die Gleichung

$$\frac{\mathbb{E}T(n+1)}{\mathbb{E}T(n)} = p(n+1)(\mathcal{P}_{n+1}^{(n)*})$$

für alle  $n \geq 2$  sowie die Tatsache, dass das charakteristische Maß von  $\Pi(\cdot)$  durch  $\left(\frac{1}{\mathbb{E}T(n)}p(n)\right)_{n \geq 2}$  fixiert wird. Dies ist ausreichend für den Nachweis der Behauptung im homogenen Fall.

Sei jetzt  $\alpha \neq 0$  und  $n \geq 2$  fest, aber beliebig. Für die gemäß Theorem 5.14 homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi^{(-\alpha)}(\cdot) = (\Pi(T_t^{(-\alpha)}), t \geq 0)$  setzen wir  $T'(n) := \inf\{t \geq 0 : \Pi^{(-\alpha)}(t) \in \mathcal{P}_n^*\}$ . Es gilt

$$T_t^{(-\alpha)}(1) = \dots = T_t^{(-\alpha)}(n) < T(n) \quad \text{für } t < T'(n) < \infty.$$

Für  $t \geq T'(n)$  haben wir offenbar  $T_t^{(-\alpha)}(i) \geq T(n)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Mit der Stetigkeit und der Monotonie von  $t \mapsto T_t^{(-\alpha)}(i)$  für  $1 \leq i \leq n$  folgt

$$T_{T'(n)}^{(-\alpha)}(i) = T(n),$$

falls  $T_{T'(n)}^{(-\alpha)}(i) < \infty$  für jedes  $1 \leq i \leq n$ . Im Falle  $T_{T'(n)}^{(-\alpha)}(i) = \infty$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  bildet  $\{i\}$  bezüglich  $\Pi(\cdot)$  zum Zeitpunkt  $T(n)$  einen Enelement-Block. Wir erhalten insgesamt mit Bemerkung 2.21

$$\Pi_n^{(-\alpha)}(T'(n)) = \Pi_n(T(n)), \quad (46)$$

und damit die Behauptung, indem wir auf das Resultat für den homogenen Fall zurückgreifen.

Nach Theorem 4.11 (b) ist mit  $\kappa$  auch  $\nu = \mathbf{1}_{S^*} \kappa^{\Lambda^\downarrow}$  bis auf eine multiplikative Konstante festgelegt.  $\square$

**6.20. Bemerkung.** Proposition 6.19 lässt sich auch folgendermaßen formulieren: Gegeben zwei selbstähnliche  $\mathcal{P}$ -Fragmentierungen  $\Pi(\cdot)$  und  $\Pi'(\cdot)$  mit demselben Index  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $p(n) = p'(n)$  für jedes  $n \geq 2$ , existiert ein  $r > 0$  mit  $\mathbb{E}T(n) = r\mathbb{E}T'(n)$  für jedes  $n \geq 2$ . Dann haben  $(\Pi(rt), t \geq 0)$  und  $(\Pi'(t), t \geq 0)$  dieselbe Verteilung.

## 6.3 Beispiel

Wie angekündigt wollen wir diese Arbeit mit einem einfachen Beispiel für eine selbstähnliche Fragmentierung beschließen. Dabei soll die Äquivalenz der drei Prozesstypen, die Fixierung der Verteilung durch ein Lévy-Maß und eine Erosionsrate sowie die Verteilung des Prozesses der asymptotischen Frequenzen thematisch behandelt werden. Wir beginnen mit der Vorstellung der

### AUSGANGSSITUATION

Wir betrachten einen Stab der Länge 1, den wir mit dem Einheitsintervall  $[0, 1]$  identifizieren. Es sei  $U_1, U_2, \dots$  eine Folge stochastisch unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen mit  $U_1 \stackrel{d}{=} R(0, 1)$ . Ferner bezeichne  $Y(\cdot) = (Y(t), t \geq 0)$  einen von  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  stochastisch unabhängigen Poisson-Prozess mit Parameter  $\vartheta \in (0, \infty)$ .

Für  $n = 1, 2, \dots$  durchtrennen wir nun mit einem „scharfen Messer“ den Stab an der Stelle  $U_n$  zum Zeitpunkt des  $n$ -ten Sprunges von  $Y(\cdot)$ . Anders formuliert heißt dies: Nach jeweils  $\text{Exp}(\vartheta)$ -verteilten Wartezeiten teilen wir den Stab an einer zufällig gewählten Stelle und zwar unabhängig von den vorherigen Teilungen.

Wir könnten jetzt den Prozess der absteigend geordneten Längen der Stabfragmente im Zeitablauf betrachten, d.h. einen  $S^\downarrow$ -wertigen Fragmentierungsprozess. Wir entscheiden uns aber für die von uns genauer untersuchte Darstellung als Intervall-Fragmentierung und definieren den  $\mathcal{V}$ -wertigen Prozess  $F(\cdot) = (F(t), t \geq 0)$  durch

$$F(t) := \bigcup_{x \in (0,1)} I_x(t)$$

mit

$$I_x(t) := \left( \max_{0 \leq i \leq Y(t)} \{U_i : U_i \leq x\}, \min_{-1 \leq i \leq Y(t)} \{U_i : U_i \geq x\} \right)$$

für alle  $x \in (0, 1)$ , wobei  $U_0 := 0$  und  $U_{-1} := 1$ .  $F(\cdot)$  ist also der Prozess, der die Stabfragmente als offene Intervalle ( $\subset [0, 1]$ ) wiedergibt.

## NACHWEIS DER SELBSTÄHNLICHKEIT

Wir behaupten, dass  $F(\cdot)$  eine selbstähnliche Intervall-Fragmentierung mit Index 1 ist.

Nach Definition gilt  $F(0) = (0, 1)$ .  $F(\cdot)$  ist ein verfeinernder Prozess. Da  $Y(\cdot)$  ein Prozess mit diskreten Sprungzeiten ist, liegt Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit vor. Die Unabhängigkeitsannahmen gewährleisten außerdem die unabhängige Zerlegung der einzelnen Intervalle und die Gültigkeit der Markov-Eigenschaft. Die zeitliche Homogenität ist eine Konsequenz der Gedächtnislosigkeit der  $\text{Exp}(\vartheta)$ -Verteilungen.

Es bleibt die Skalierungseigenschaft nachzuweisen. Wir greifen ein beliebiges Intervall  $I(t) \neq \emptyset$  der Intervallzerlegung von  $F(t)$ ,  $t \geq 0$ , heraus. Es sei  $\tilde{F}(\cdot)$  eine stochastisch unabhängige Kopie von  $F(\cdot)$ . Wir müssen zeigen, dass gegeben  $F(t)$

$$F(t+r) \cap I(t) \stackrel{d}{=} g_{I(t)} \circ \tilde{F}(|I(t)|r) \quad (47)$$

für  $r \geq 0$  gilt. Beide Seiten der Gleichung (47) beschreiben Zerlegungen des Intervalls  $I(t)$  zum Zeitpunkt  $t+r$ . Nach Definition werden demnach die beiden bedingten Verteilungen durch die Verteilung der Anzahl der Teilungen von  $I(t)$  während des Zeitraums  $[t, t+r]$  und die Verteilung der entsprechenden Teilungspunkte auf  $I(t)$  eindeutig festgelegt. Wir betrachten zunächst die linke Seite. Die Anzahl  $\dot{Y} := Y(t+r) - Y(t)$  der Sprünge von  $Y(\cdot)$  während des Zeitraums  $[t, t+r]$  ist

Poi( $\vartheta r$ )-verteilt. Wir definieren

$$\ddot{Y} = \sum_{i=Y(t)}^{Y(t+r)} \mathbf{1}_{\{U_i \in I(t)\}}$$

als die Anzahl der Teilungen im relevanten Zeitabschnitt. Es gilt

$$\ddot{Y} \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\dot{Y}} \mathbf{1}_{\{U_i \in I(t)\}}.$$

Wegen  $\mathbf{1}_{\{U_i \in I(t)\}} \stackrel{d}{=} \text{Bin}(1, |I(t)|)$  für  $i \geq 1$  erhalten wir nach einem elementaren Ergebnis aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

$$\ddot{Y} \stackrel{d}{=} \text{Poi}(\vartheta r |I(t)|).$$

Gegeben  $U_i \in I(t)$  ist  $U_i$  offensichtlich gleichverteilt auf  $I(t)$ . Wenden wir uns der rechten Seite zu, so beschreibt  $\tilde{F}(|I(t)|r)$  gerade die Situation nach  $\text{Poi}(r|I(t)|)$ -verteilter Anzahl von Teilungen, die zufällig auf  $(0, 1)$  anfallen. Nach Anwendung der affinen Abbildung  $g_{I(t)}$  sind diese  $R(I(t))$ -verteilt. Damit stimmen auf linker und rechter Seite die fixierenden Verteilungen überein, d.h.  $F(\cdot)$  ist in summa eine selbstähnliche Intervall-Fragmentierung mit Index 1.

## BESTIMMUNG DER PARAMETER

Wir wollen jetzt Lévy-Maß  $\nu$  und Erosionsrate  $c$  von  $F(\cdot)$  ermitteln (siehe dazu Abschnitt 4.2). Dafür führen wir die zu  $F(\cdot)$  assoziierte  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung  $\Pi(\cdot) = \Pi_F(\cdot) = (\Pi_F(t), t \geq 0)$  ein (siehe dazu Definition 3.9). Wir definieren

$$T := \inf\{t \geq 0 : \Pi(t) \in \mathcal{P}^*\}$$

und wie gewohnt

$$T(n) := \inf\{t \geq 0 : \Pi(t) \in \mathcal{P}_n^*\}$$

für jedes  $n \geq 2$ . Gemäß Abschnitt 5.3 bezeichnet  $\Pi^{(-1)}(\cdot)$  die homogene  $\mathcal{P}$ -Fragmentierung mit denselben Parametern wie  $\Pi(\cdot)$ , die wir durch die Zeittransformation mittels der Frosts  $T_t^{(-1)}$ ,  $t \geq 0$ , aus  $\Pi(\cdot)$  erhalten. Es sei  $\kappa$  das charakteristische Maß von  $\Pi^{(-1)}(\cdot)$  (siehe dazu Satz 4.2 und Definition 4.3) und

$$T'(n) := \inf\{t \geq 0 : \Pi^{(-1)}(t) \in \mathcal{P}_n^*\}$$

für  $n \geq 2$ . Wir zeigen nun

$$\kappa(\cdot) = \frac{1}{\mathbb{E}T} \mathbb{P}(\Pi(T) \in \cdot). \quad (48)$$

Nach Satz 4.2 gilt

$$\kappa(\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_n = \pi_n) = \frac{1}{\mathbb{E}T'(n)} \mathbb{P}(\Pi_n^{(-1)}(T'(n)) = \pi_n), \quad n \geq 2,$$

für jede nicht-triviale Partition  $\pi_n \in \mathcal{P}_n$ . In diesem Fall haben wir  $T_t^{(-1)}(i) = t$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $t < T'(n)$ . Wegen  $T_{T'(n)}^{(-1)}(i) < \infty$  fast sicher für  $1 \leq i \leq n$  folgt hieraus mit der Stetigkeit (Bemerkung 5.12) unmittelbar  $T'(n) = T(n)$  fast sicher. Aus  $T(n) \downarrow T$  fast sicher für  $n \rightarrow \infty$  können wir mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}T'(n) = \mathbb{E}T$$

schließen. Gemäß der Gleichung (46) aus dem Beweis von Proposition 6.19 gilt

$$\mathbb{P}(\Pi_n^{(-1)}(T'(n)) \in \cdot) = \mathbb{P}(\Pi_n(T(n)) \in \cdot)$$

für jedes  $n \geq 2$ . Es sei jetzt  $n \geq 2$  fest, aber beliebig. Wählen wir  $A \subset \mathcal{P}_n^*$  und definieren für  $i \geq 0$

$$C_{n+i} := \{\Pi_{n+i}(T(n+i)) \in A_{n+i}\},$$

wobei

$$A_{n+i} := \{\pi_n \in \mathcal{P}_n : \exists \Gamma \in A \text{ mit } \Gamma_n = \pi_n\},$$

so bildet  $C_n, C_{n+1}, \dots$  eine antitone Mengenfolge mit  $C_{n+i} \downarrow C := \{\Pi(T) \in A\}$  für  $i \rightarrow \infty$ . Die Stetigkeit von oben bei Maßen garantiert

$$\mathbb{P}(\Pi(T) \in A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Pi_{n+i}(T(n+i)) \in A_{n+i}).$$

Ebenso können wir

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \kappa(\Gamma \in \mathcal{P} : \Gamma_{n+i} \in A_{n+i}) = \kappa(A)$$

folgern. Wir erhalten insgesamt

$$\kappa(A) = \frac{1}{\mathbb{E}T} \mathbb{P}(\Pi(T) \in A).$$

Wegen  $\mathcal{P}_n^* \uparrow \mathcal{P}^*$  für  $n \rightarrow \infty$  ist damit die Gleichung (48) gezeigt.

Zum ersten Sprungzeitpunkt ist eine zufällige Teilung in zwei Intervalle, ein sogenanntes binäres Splitting, zu beobachten, d.h.

$$\mathbb{P}(\Pi(T) \in \cdot) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \mu_{(x, 1-x, 0, \dots)}(\cdot) \, dx,$$

wobei  $\mu_{(\cdot)}$  für die Paintbox-Verteilung steht (siehe dazu Definition 3.3). Aus der Gleichung (48) ergibt sich wegen  $\mathbb{E}T = \frac{1}{\vartheta}$

$$\kappa(\cdot) = 2\vartheta \int_{\frac{1}{2}}^1 \mu_{(x, 1-x, 0, \dots)}(\cdot) \, dx.$$

$\Pi(\cdot)$  hat also die Parameter  $(1, \nu, 0)$ , und  $\nu$  wird eindeutig festgelegt durch  $\nu(s_1 \in dx) = 2\vartheta \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]} dx$  für  $x \in [0, 1]$  sowie  $\nu(s_1 + s_2 < 1) = 0$ .

### BERECHNUNG DES LAPLACE-EXPONENTEN

Abschließend wollen wir die Ergebnisse aus Abschnitt 6.1 anwenden. Es sei  $\lambda_1(t)$  die asymptotische Frequenz des ersten Blockes von  $\Pi(t)$  für jedes  $t \geq 0$ .  $\lambda_1(t)$  hat dieselbe Verteilung wie die Länge des Intervalls  $I_X(t)$  der Intervallzerlegung von  $F(t)$ , wobei  $X$  eine von  $F(\cdot)$  stochastisch unabhängige  $R(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable bezeichnet. Setzen wir

$$p(t) := \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u \mathbf{1}_{\{\lambda_1(r) > 0\}} \lambda_1(r) \, dr > t \right\},$$

so ist  $\xi(\cdot) = (\xi(t), t \geq 0)$ , definiert durch

$$\xi(t) := -\log \lambda_1(p(t)),$$

ein Subordinator gemäß Korollar 6.13. Die Killing-Rate  $k$  und der Drift-Koeffizient  $d$  von  $\xi(\cdot)$  werden nach Theorem 6.6 gegeben durch

$$k = c + \int_{S^*} 1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j \, \nu(ds)$$

bzw.  $d = c$ . Wir erhalten also  $k = 0$  und  $d = 0$ . Gemäß Bemerkung 6.11 (c) gilt  $\inf\{t \geq 0 : \xi(t) = \infty\} = \infty$  fast sicher. Der Laplace-Exponent  $\Phi$  von  $\xi(\cdot)$  berechnet sich nach der Gleichung (42) für  $r \geq 0$  zu

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= c(r+1) + \int_{S^*} 1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j^{r+1} \, \nu(ds) \\ &= \int_{S^*} 1 - s_1^{r+1} - (1 - s_1)^{r+1} \, \nu(ds) \\ &= 2\vartheta \int_{\frac{1}{2}}^1 1 - x^{r+1} - (1 - x)^{r+1} \, dx \\ &= \vartheta \left( 1 - \frac{2}{r+2} \right). \end{aligned}$$

Wählen wir z.B.  $r = 1$ , erhalten wir für jedes  $t \geq 0$

$$\mathbb{E}|I_X(p(t))| = \mathbb{E}\lambda_1(p(t)) = \exp(-t\Phi(1)) = \exp\left(-\frac{1}{3}\vartheta t\right).$$

Wegen  $\Phi(2) = \frac{1}{2}\vartheta$  gilt dann

$$\text{Var}\lambda_1(p(t)) = \exp\left(-\frac{1}{2}\vartheta t\right) - \exp\left(-\frac{2}{3}\vartheta t\right)$$

für  $t \geq 0$ , d.h. die Varianz steigt bis zum Zeitpunkt  $t = \frac{6}{\vartheta} \log\left(\frac{4}{3}\right)$  und strebt anschließend monoton fallend gegen 0. Nach anfangs steigender Ungewissheit über die Länge eines zufällig ausgewählten Stabfragmentes verringert sich - wie erwartet - die Schwankung im weiteren Zeitablauf.

Wir wollen nicht versäumen, auf ein weiteres interessantes Beispiel hinzuweisen. Miermont beschreibt, ausgehend von einem gewissen Typ des stetigen Zufallbaumes, die Konstruktion einer selbstähnlichen Fragmentierung  $(F(t), t \geq 0)$  mit negativem Index. Vereinfachend gesagt, gibt  $F(t)$  dabei die Folge der Massen der zusammenhängenden Baumkomponenten an, die man erhält, wenn man den Baum unterhalb der Höhe  $t$  abtrennt. Für eine ausführliche Behandlung dieses Prozesses verweisen wir auf die Arbeit [Mi], bei der im Anschluss an die Einführung des geeigneten stetigen Zufallbaumes und der Fragmentierung der Nachweis der Selbstähnlichkeit und die Ermittlung des Dislokationsmaßes im Vordergrund stehen.



## 6.4 Anhang

Die mögliche Approximation der Exponentialfunktionen im Beweis von Theorem 6.6 ist Thema dieses kurzen Anhangs. Sie ist - wie wir sehen werden - eine unmittelbare Folgerung aus dem ohne Beweis notierten Satz von Stone-Weierstrass.

**6.21. Satz (Satz von Stone-Weierstrass).** *Sei  $T$  ein kompakter Raum und  $A \subset C(T)$  eine Unteralgebra, d.h. in diesem Fall ein bezüglich Multiplikation abgeschlossener Untervektorraum, mit den Eigenschaften:*

- (1)  *$A$  enthält die konstanten Funktionen.*
- (2)  *$A$  ist punktetrennend, d.h. zu  $s, t \in T$ ,  $s \neq t$ , existiert ein  $f \in A$  mit  $f(s) \neq f(t)$ .*

*Dann ist  $A$  dicht in  $C(T)$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$ .*

BEWEIS: Siehe [We], S. 396f.

Wir betrachten  $D := \{f \in C([0, \infty)) : \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) < \infty\}$ . Identifizieren wir  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  mit  $f(\infty)$  und setzen  $T := [0, \infty]$  als kompakten Raum, so gilt  $D \subset C(T)$ .

**6.22. Korollar.** *Die Menge*

$$A := \left\{ f \in D : x \mapsto f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k \exp(-kx), a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

*ist dicht in  $C(T)$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$ . Insbesondere lässt sich eine Funktion  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \exp(-rx)$ ,  $r \geq 0$  beliebig, durch Elemente aus  $A$  gleichmäßig approximieren.*

BEWEIS: Offensichtlich ist  $A \subset C(T)$  eine Unter-Algebra. Wählen wir  $a_0 = c$  für  $c \in \mathbb{R}$  und  $a_i = 0$  für alle  $i \geq 1$ , so gilt  $f \equiv c$ , d.h. Bedingung (1) wird erfüllt. Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \exp(-x)$  ist streng monoton fallend und damit injektiv. Der erste Teil des Korollars ist gezeigt. Der Zusatz folgt wegen  $\{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-rx) : r \geq 0\} \subset D \subset C(T)$ .  $\square$

## Verzeichnis ausgewählter Symbole

$\text{Bin}(n, \beta)$	Binomialverteilung mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $\beta \in (0, 1)$
$\delta_x$	Dirac-Verteilung in $x$
$\text{Exp}(\beta)$	Exponentialverteilung mit Parameter $\beta \in [0, \infty)$
$\text{Poi}(\beta)$	Poisson-Verteilung mit Parameter $\beta \in [0, \infty)$
$R(0, 1)$	Rechteckverteilung auf $[0, 1]$
$R(I(t))$	Rechteckverteilung auf dem Intervall $I(t)$
$\eta$	Zählmaß auf $\mathbb{N}$
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	konvergent in Wahrscheinlichkeit
$X \stackrel{d}{=} Y$	$X$ hat dieselbe Verteilung wie $Y$
$\forall$	für alle
$\exists$	es existiert
$C(T)$	Raum der stetigen Funktionen von $T$ nach $\mathbb{R}$
$\ \cdot\ _\infty$	Supremumsnorm
$S^\downarrow$	Menge der geordneten Massefolgen kleiner 1
$S^*$	$S^\downarrow \setminus \{(1, 0, \dots)\}$
$\mathcal{P}$	Menge der Partitionen von $\mathbb{N}$
$\mathcal{P}_n$	Menge der Partitionen von $\{1, \dots, n\}$
$\mathcal{P}_n^*$	Menge der auf $\{1, \dots, n\}$ nicht-trivialen Partitionen von $\mathbb{N}$
$\mathcal{V}$	Menge der offenen Teilmengen von $[0, 1]$
$\Lambda(B)$	asymptotische Frequenz von $B \subset \mathbb{N}$
$\Lambda^\downarrow(\Gamma)$	geordnete asymptotische Frequenz von $\Gamma \in \mathcal{P}$
$\bar{\lambda}_1(t)$	obere asymptotische Frequenz des ersten Blockes zum Zeitpunkt $t$
$\underline{\lambda}_1(t)$	untere asymptotische Frequenz des ersten Blockes zum Zeitpunkt $t$
$\kappa$	charakteristisches Maß
$\nu$	Lévy-Maß auf $S^*$
$c$	Erosionsrate
$\mu_\nu$	Dislokationsmaß mit Lévy-Maß $\nu$
$\mu_c$	Erosionsmaß mit Rate $c$
$\nu_s$	Verteilung eines $s$ -Paintbox-Prozesses
$\Phi$	Laplace-Exponent

## Literatur

- [Al1] Aldous, D.J. Exchangeability and related topics. In: Hennequin, P.L. (Herausgeber). Lectures on probability theory and statistics, école d'été de probabilités de Saint-Flour XIII. Lecture Notes in Maths, Springer, Berlin (1985)
- [Al2] Aldous, D.J. The continuum random tree II: an overview. In: Barlow, M.T., Bingham, N.H. (Herausgeber). Stochastic Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 23-70 (1991)
- [Al3] Aldous, D.J. The continuum random tree III. Ann. Probab., 21, 248-289 (1993)
- [Al4] Aldous, D.J. Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation, coagulation): a review of the mean-field theory for probabilists. Bernoulli, 5, 3-48 (1999)
- [AlPi] Aldous, D.J., Pitman, J. The standard additive coalescent. Ann. Probab., 26, 1703-1726 (1998)
- [Als1] Alsmeyer, G. Wahrscheinlichkeitstheorie (2.Auflage). Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 30, Universität Münster (2000)
- [Als2] Alsmeyer, G. Stochastische Prozesse Teil 1. Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 33, Universität Münster (2000)
- [Be] Berestycki, J. Ranked fragmentations. ESAIM P&S, 6, 157-175 (2002)
- [Ber1] Bertoin, J. Lévy-Processes. Cambridge University Press, Cambridge (1996)
- [Ber2] Bertoin, J. Subordinators, Lévy processes with no negative jumps. Lecture Notes Concentrated Adv. Course Lévy Processes, 8, MaPhySto, University of Aarhus (2000)
- [Ber3] Bertoin, J. A fragmentation process connected to Brownian motion. Probab. Theory Relat. Fields, 117, 289-301 (2000)
- [Ber4] Bertoin, J. Homogeneous fragmentation processes. Probab. Theory Relat. Fields, 121, 301-318 (2001)
- [Ber5] Bertoin, J. The asymptotic behavior of fragmentation processes. J. Eur. Math. Soc., 5, 395-416 (2003)

- [Ber6] Bertoin, J. Self-similar fragmentations. *Ann. I. H. Poincaré*, 38, Nr. 3, 319-340 (2002)
- [Ber7] Bertoin, J. On small masses in self-similar fragmentations. *Stoch. Proc. App.*, 109, 13-22 (2004)
- [Br] Breiman, L. *Probability*. Addison-Wesley, Reading, Mass. (1968)
- [Ca] Carmona, Ph., Petit, F. und Yor, M. On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. In: Yor, M. (Herausgeber). *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*, Biblioteca de la revista Matematica Iberoamericana, 73-126 (1997)
- [Co] Cox, D.R., Isham, V. *Point processes*. Chapman and Hall, London (1980)
- [Ed] Edgar, G.A. *Measure, topology and fractal geometry*, Springer, Berlin (1990)
- [EvPi] Evans, S.N., Pitman, J. Construction of Markovian coalescents. *Ann. I. H. Poincaré*, B 34, 339-383 (1998)
- [Fa] Fahrmeir, L., Kaufmann, H.L., Ost, F. *Stochastische Prozesse*. Hanser, München (1981)
- [Ha] Haas, B. Loss of mass in deterministic and random fragmentation. *Stoch. Proc. App.*, 106, 245-277 (2003)
- [Ir] Irle, A. *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten*. Teubner, Stuttgart (1998)
- [Ki1] Kingman, J.F.C. The coalescent. *Stoch. Proc. App.*, 13, 235-248 (1982)
- [Ki2] Kingman, J.F.C. *Poisson Processes*. Oxford University Press, New York (1993)
- [La] Lamperti, J. Semi-stable Markov processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 22, 205-225 (1972)
- [Mi] Miermont, G. Self-similar fragmentations derived from the stable tree I: splitting at heights. *Probab. Theory Relat. Fields*, 127, 423-454 (2003)
- [MiSc] Miermont, G., Schweinsberg, J. Self-similar fragmentations and stable subordinators. *Séminaire de Probabilités XXXVII. Lecture Notes in Maths*, 1832, Springer, Berlin, 333-359 (2003)

- [Pi] Pitman, J. Coalescents with multiple collisions. Ann. Probab., 27, 1870-1902 (1999)
- [We] Werner, D. Funktionalanalysis. Springer, Berlin (2000)

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt habe und keine weiteren Hilfsmittel als die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen verwendet habe.

Münster, den 6. September 2004