Diplomarbeit

Grenzwertsätze für mehrdimensionale Random Walks in stetiger Zeit

Mareike Assink

Juni 2007

Fachbereich Mathematik
der Westfälischen
Wilhelms-Universität
Münster

Betreuer: Prof. Dr. Gerold Alsmeyer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit, deren Grundlage der Artikel „Limit Theorems for Continuous Time Random Walks“ von Mark M. Meerschaert und Hans-Peter Scheffler ([MS2]) ist, beschäftigt sich mit der Einführung des Modells des Random Walk in stetiger Zeit (CTRW, vom englischen „Continuous Time Random Walk“) und der Herleitung eines Grenzwertsatzes für diesen stochastischen Prozess.

Wie der Name bereits vermuten läßt, handelt es sich beim CTRW um einen Random Walk, das heißt um eine Summe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvektoren auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Die Besonderheit des Random Walk in stetiger Zeit besteht nun aber darin, dass die Sprünge nach zufälligen Wartezeiten stattfinden. Um für den geeignet skalierten und transformierten CTRW, bei dem es sich um einen stochastischen Prozess handelt, dessen Pfade rechtsseitig stetige Funktionen auf $[0, \infty)$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ sind, die in jedem $t \in (0, \infty)$ einen linksseitigen Limes besitzen, einen Grenzwertsatz beweisen zu können, muss man sich zunächst einmal klarmachen, welcher Konvergenzbegriff in einer derartigen Situation überhaupt erklärt ist.

Dieser Frage widmet sich das erste Kapitel, das auf dem Buch „Limit Theorems for Stochastic Processes“ von J. Jacod und A.N. Shiryaev ([JS]) basiert. In diesem Kapitel werden Grenzwertsätze hinsichtlich der Verteilungskonvergenz von Zufallselementen des Skorokhod-Raumes D (das ist der Raum aller rechtsseitig stetigen Funktionen auf $[0, \infty)$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$, die in jedem $t \in (0, \infty)$ einen linksseitigen Limes besitzen) bewiesen, die dann im dritten Kapitel auf den geeignet skalierten und transformierten Random Walk in stetiger Zeit angewendet werden. Der Grenzprozess $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ besitzt einige interessante Eigenschaften, er ist zum Beispiel operator-selbstähnlich und seine Zuwächse sind nicht stationär.

Das vierte Kapitel bietet einen interessanten Einblick in die Welt der Theoretischen Chemie. Mein Wunsch war es, nicht ausschließlich mathematisch zu arbeiten, sondern mein Nebenfach Chemie mit in die Diplomarbeit einfließen zu lassen. Entstanden ist eine Zusammenarbeit zwischen Herrn Prof. Dr. G. Alsmeyer und Herrn Prof. Dr. A. Heuer, bei denen ich mich für ihren Mut, sich auf ein solches Projekt einzulassen, und ihr Engagement und ihre Betreuung während der Arbeit bedanken möchte. Auch wenn der mathematische Anteil der Arbeit deutlich überwiegt, war es doch sehr schön, ein konkretes Beispiel eines Random Walk in stetiger Zeit in der Chemie per Computersimulation zu untersuchen.

Schließlich gilt mein Dank dem Arbeitskreis Heuer für die Unterstützung bei computertechnischen Problemen und bei chemischen Fragen und all den Menschen, die mich während des vergangenen Jahres immer wieder emotional unterstützt und motiviert haben.

Münster im Juni 2007

Mareike Assink

Kapitel 1

Skorokhod-Topologie und Konvergenz von Prozessen

Ziel dieses Kapitels, das zum größten Teil auf dem sechsten Kapitel „Skorokhod Topology and Convergence of Processes“ des Buches „Limit Theorems for Stochastic Processes“ von J. Jacod und A.N. Shiryaev ([JS]) basiert, ist es, auf dem Raum $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ der rechtsseitig stetigen Funktionen von $[0,\infty)$ nach $\mathbb{R}^d$, die linksseitige Limiten besitzen, eine Topologie einzuführen, die $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ zu einem polnischen Raum macht. Diese Topologie wird als Skorokhod-Topologie bezeichnet (Abschnitt 1.1).

Der Grund für die Einführung der Skorokhod-Topologie auf $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ besteht darin, dass man mit ihrer Hilfe die Verteilungskonvergenz einer Folge von stochastischen Prozessen gegen einen weiteren stochastischen Prozess definieren kann, wobei die auftretenden Prozesse nicht notwendig stetige Pfade besitzen müssen: Es genügt, dass die Pfade in $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ liegen.

Ein weiteres Ziel dieses Kapitels ist die Herleitung von Grenzwertsätzen hinsichtlich der Verteilungskonvergenz stochastischer Prozesse (Abschnitt 1.3).

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden zunächst nur die Definitionen und Ergebnisse präsentiert, während die Beweise der meisten Sätze im vierten Abschnitt zu finden sind. Dieser ist für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel nicht wichtig und erfüllt lediglich den Zweck, die hier vorgestellte Theorie abzurunden.

1.1 Die Skorokhod-Topologie

Definition 1.1.1.
$D = D\left([0,\infty), \mathbb{R}^d\right)$ sei der Raum aller càdlàg-Funktionen auf $[0,\infty)$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$, das heißt:

$$D = \Big\{ f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d : \text{ Für alle } t \in (0,\infty) \text{ existiert der linksseitige Limes } f(t-) = \lim_{s\uparrow t} f(s) \text{ und für alle } t \in [0,\infty) \text{ existiert der rechtsseitige Limes } f(t+) = \lim_{s\downarrow t} f(s) \text{ und stimmt mit } f(t) \text{ überein.} \Big\}.$$

Die Bezeichnung „càdlàg“ stammt aus dem Französischen: „continue à droite avec limite à gauche“ heißt „rechtsseitig stetig mit linksseitigem Limes“. D wird auch als *Skorokhod-Raum* bezeichnet.

$D'(\mathfrak{X}) = D([0,1],\mathfrak{X})$ sei der Raum aller càdlàg-Funktionen auf $[0,1]$ mit Werten in einem polnischen Raum $\mathfrak{X}$ (siehe Definition 1.1.2).

Wie bereits erwähnt, besteht das erste Ziel darin, auf D eine Topologie einzuführen, die D zu einem polnischen Raum macht.

Definition 1.1.2.
Ein topologischer Raum $(T,\mathfrak{T})$ heißt *polnisch*, wenn es eine $\mathfrak{T}$ induzierende Metrik ρ gibt, die (T,ρ) zu einem vollständigen, separablen metrischen Raum macht. Dabei bezeichnet man einen topologischen Raum als *separabel*, wenn er eine dichte, abzählbare Teilmenge besitzt.

Einen ersten Kandidaten für eine solche Topologie bildet die lokal gleichmäßige Topologie:

Definition 1.1.3.
Die *lokal gleichmäßige Topologie auf D* ist die durch die Metrik

$$\delta_{lu}(f,g) = \sum_{N\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^N} \cdot (1 \wedge \|f-g\|_N) \tag{1.1.1}$$

mit

$$\|f\|_\theta = \sup_{s\le\theta} |f(s)| \tag{1.1.2}$$

definierte Topologie. Hierbei steht „lu“ für „local uniform“.

Dass durch δ_{lu} tatsächlich eine Metrik auf D definiert wird, sieht man sofort: Es seien $f,g,h \in D$. Dann gilt $\delta_{lu}(f,g) = \delta_{lu}(g,f) \ge 0$ aufgrund der Definition und

$$
\begin{aligned}
\delta_{lu}(f,h) &= \sum_{N\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^N}\cdot\left(1\wedge \sup_{s\le N}|f(s)-h(s)|\right)\\
&\le \sum_{N\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^N}\cdot\left(1\wedge \sup_{s\le N}|f(s)-g(s)|\right)\\
&\quad + \sum_{N\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^N}\cdot\left(1\wedge \sup_{s\le N}|g(s)-h(s)|\right)\\
&= \delta_{lu}(f,g)+\delta_{lu}(g,h)
\end{aligned}
$$

wegen der Dreiecksungleichung für den Betrag in $\mathbb{R}^d$. Ferner hat man offensichtlich $\delta_{lu}(f,g)=0$ genau dann, wenn alle Summanden verschwinden, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\|f-g\|_N=0$ für alle $N\in\mathbb{N}^*$ gilt, und dies ist äquivalent zu $f=g$.

Es stellt sich jedoch heraus, dass D unter δ_{lu} kein polnischer Raum ist:

Satz 1.1.4.
Der Skorokhod-Raum D ist nicht separabel unter der Metrik δ_{lu}.

Um die Skorokhod-Topologie definieren zu können, die, wie der nächste Satz zeigt, D zu einem polnischen Raum macht, wird noch die folgende Notation benötigt:

Definition 1.1.5.
Es sei Λ die Menge aller stetigen und streng monoton wachsenden Funktionen $\lambda:[0,\infty)\to[0,\infty)$, die sowohl $\lambda(0)=0$ als auch $\lambda(t)\to\infty$ für $t\to\infty$ erfüllen. Ein solches $\lambda\in\Lambda$ wird auch als *Zeitwechsel* bezeichnet.

Satz 1.1.6.
Es gibt eine metrisierbare Topologie auf D, genannt Skorokhod-Topologie oder auch J_1-Topologie, unter der D ein polnischer Raum ist. Sie wird folgendermaßen charakterisiert:

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen f, in Zeichen $f_n \xrightarrow{J_1} f$, wenn es eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus Λ gibt, so dass

$$(i)\qquad \sup_{s<\infty}|\lambda_n(s)-s| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{1.1.3a}$$

$$(ii)\qquad \sup_{s\le N}|f_n(\lambda_n(s))-f(s)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ für alle } N\in\mathbb{N}^*. \tag{1.1.3b}$$

Dieser Satz, der das Hauptresultat des ersten Abschnitts ist, wird mittels mehrerer Sätze und Lemmata bewiesen, die zum Teil auch für sich von Interesse sind. Der erste Schritt besteht darin, eine Metrik zu definieren, die mit der Konvergenz in (1.1.3) kompatibel ist. Zu diesem Zweck wird für jedes $N \in \mathbb{N}^*$ die Funktion $k_N : [0, \infty) \to [0, \infty)$ wie folgt definiert:

$$k_N(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t \leq N + \frac{1}{2}, \\ 2 \cdot (N + 1 - t) & \text{falls } N + \frac{1}{2} < t < N + 1, \\ 0 & \text{falls } t \geq N + 1. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Definition 1.1.7.
Für $f, g \in D$ sei

$$\delta(f, g) = \sum_{N \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^N} \cdot (1 \wedge \delta_N(f, g)), \tag{1.1.5}$$

wobei

$$\delta_N(f, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} (\ell(\lambda) + \|(k_N f) \circ \lambda - k_N g\|_\infty) \tag{1.1.6}$$

und

$$\ell(\lambda) = \sup_{s<t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|. \tag{1.1.7}$$

(Es sei $\|f\|_\infty := \sup \{|f(s)| : s < \infty\}$ und $k_N f$ bezeichne das Produkt der reellwertigen Funktion k_N mit der $\mathbb{R}^d$-wertigen Funktion f.)

Um beweisen zu können, dass es sich bei δ tatsächlich um eine Metrik auf D handelt, benötigt man sowohl die folgenden Rechenregeln als auch die Tatsache, dass aus $\delta(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ für Funktionen $f_n, f \in D$ $(n \in \mathbb{N})$ stets (1.1.3) für eine geeignete Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus Λ folgt:

Lemma 1.1.8.
Es seien $\lambda, \mu \in \Lambda$ (das heißt auch $\lambda^{-1} \in \Lambda$ und $\lambda \circ \mu \in \Lambda$) und $I \in \Lambda$ sei die Identität. Außerdem seien $f, g \in D$. Dann gilt für alle $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \ell(\lambda) &= \ell(\lambda^{-1}), && \text{(1.1.8a)} \\ \ell(\lambda \circ \mu) &\leq \ell(\lambda) + \ell(\mu), && \text{(1.1.8b)} \\ \|\lambda - I\|_t &\leq t \cdot (e^{\ell(\lambda)} - 1), && \text{(1.1.8c)} \\ \|\mu \circ (\lambda - I)\|_t &\leq \|\lambda - I\|_t \cdot e^{\ell(\mu)}, && \text{(1.1.8d)} \\ \|(k_N f) \circ \lambda \circ \mu - (k_N g) \circ \mu\|_\infty &= \|(k_N f) \circ \lambda - k_N g\|_\infty. && \text{(1.1.8e)} \end{aligned}$$

Lemma 1.1.9.
Es seien $f_n, f \in D$ $(n \in \mathbb{N})$. Gilt $\delta(f_n, f) \to 0$ für $n \to \infty$, so gibt es eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Λ, die (1.1.3) erfüllt.

Wie bereits angekündigt, erhält man nun:

Satz 1.1.10.
δ ist eine Metrik auf D.

Eine zentrale Rolle im Beweis des vorangehenden Satzes spielen die Stetigkeitspunkte der Funktion $f \in D$. Die folgende Definition dient der Vereinfachung der Notation:

Definition 1.1.11.
Für $f \in D$ seien

$$J(f) = \{t > 0 : f(t) - f(t-) \neq 0\} \tag{1.1.9}$$

die Menge der Unstetigkeitsstellen von f und

$$U(f) = \{u > 0 : |f(t) - f(t-)| = u \text{ für irgendein } t > 0\} \tag{1.1.10}$$

die Menge der Sprunghöhen von f.

$J(f)$ und damit auch $U(f)$ sind abzählbar.

Für den Beweis von Satz 1.1.6 bleibt noch zu zeigen, dass die Gültigkeit von (1.1.3) $\delta(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ impliziert, und dass D unter δ vollständig und separabel ist. Die Vollständigkeit liefert der folgende Satz:

Satz 1.1.12.
Der Skorokhod-Raum D ist vollständig unter δ.

Bevor die beiden letzten noch zu zeigenden Aussagen bewiesen werden können, ist einiges an Vorarbeit nötig. Begonnen wird mit einer Definition:

Definition 1.1.13.
Es seien $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ eine beliebige Funktion, $I \subset [0, \infty)$ ein Intervall, $N \in \mathbb{N}^*$ und $\theta > 0$. Dann sei

$$w(f, I) := \sup_{s,t \in I} |f(s) - f(t)|$$

sowie

$$w_N(f, \theta) := \inf \left\{ \max_{i \le r} w(f, [t_{i-1}, t_i)) : 0 = t_0 < \ldots < t_r = N, \inf_{i<r} (t_i - t_{i-1}) \geq \theta \right\}.$$

Für alle $f \in D$ gilt:
(i) $\theta \mapsto w_N(f, \theta)$ ist monoton wachsend.
(ii) $N \mapsto w_N(f, \theta)$ ist monoton wachsend.

In manchen Situationen kann es durchaus sinnvoll sein, eine andere Darstellung für $w_N(f, \theta)$ zu benutzen:

Satz 1.1.14.
Für eine Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$*,* $N \in \mathbb{N}^*$ *und* $\theta > 0$ *gilt*

$$w_N(f,\theta) = \inf \Big\{ \max_{i\le r} w(f,[t_{i-1},t_i)) : 0 = t_0 < \ldots < t_r = N, \\ \theta \le t_i - t_{i-1} \le 2\theta \text{ für } i < r \text{ und } t_r - t_{r-1} \le 2\theta \Big\}.$$

Mittels des Modulus $w_N(f,\theta)$ kann nun entschieden werden, ob eine beliebige Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ in D liegt oder nicht:

Satz 1.1.15.
Eine Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ *liegt genau dann in* D*, wenn für alle* $N \in \mathbb{N}^*$ *die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

$$(i) \qquad \|f\|_N < \infty \tag{1.1.11a}$$

$$(ii) \qquad \lim_{\theta\to 0} w_N(f,\theta) = 0. \tag{1.1.11b}$$

Der vorherige Satz ermöglicht schließlich den Beweis der Separabilität von D. Es wird lediglich noch die folgende Hilfaussage benötigt:

Lemma 1.1.16.
Es seien $N \in \mathbb{N}^*$*,* $k \in \mathbb{N}^*$ *und* $\theta > 0$*.* $C_{\theta,k}$ *sei irgendeine endliche Teilmenge von* $\mathbb{R}^d$ *mit der Eigenschaft, dass alle Elemente der Kugel*

$$\overline{K_\theta(0)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |x| \le \theta \right\}$$

einen Abstand von $C_{\theta,k}$ *haben, der höchstens* $\frac{1}{k}$ *beträgt.* $\mathfrak{A}(N,\theta,k)$ *sei die endliche Teilmenge von* D*, die aus allen càdlàg-Funktionen auf* $[0,\infty)$ *mit Werten in* $C_{\theta,k}$ *besteht, die stückweise konstant sind und genau in den* $\frac{i}{k}$ *mit* $1 \le i \le kN$ *Sprünge aufweisen. Sei nun speziell* $k \ge 4$*. Wenn für* $f \in D$ *die Bedingungen*

$$\|f\|_{N+3} \le \theta \quad \text{und} \quad w_{N+3}\left(f, \frac{1}{k}\right) \le \frac{1}{k}$$

erfüllt sind, dann existiert eine Funktion $g \in \mathfrak{A}(N+3,\theta,k^2)$ *mit*

$$\delta_{N'}(f,g) \le \frac{6}{k} \quad \text{für alle} \quad N' \le N.$$

Korollar 1.1.17.
Der Skorokhod-Raum D *ist separabel für die durch* δ *induzierte Topologie.*

Um zu guter Letzt beweisen zu können, dass (1.1.3) $\delta(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ impliziert, müssen der Begriff der relativen Kompaktheit eingeführt und ein hinreichendes Kriterium für die relative Kompaktheit einer Teilmenge A von D angegeben werden.

Definition 1.1.18.
Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes heißt *relativ kompakt*, wenn sie einen kompakten Abschluss besitzt.

Das ist äquivalent dazu, dass jede Folge von Elementen aus A eine konvergente Teilfolge besitzt.

Korollar 1.1.19.
Es sei A eine Teilmenge von D mit den folgenden beiden Eigenschaften:

$$(i) \qquad \sup_{f \in A} \|f\|_N < \infty \text{ für alle } N \in \mathbb{N}^* \tag{1.1.12a}$$

$$(ii) \qquad \lim_{\theta \to 0} \sup_{f \in A} w_N(f, \theta) = 0 \text{ für alle } N \in \mathbb{N}^*. \tag{1.1.12b}$$

Dann ist A relativ kompakt für die durch δ induzierte Topologie.

Der Beweis von Satz 1.1.6 findet nun seinen Abschluss mittels des folgenden Lemmas:

Lemma 1.1.20.
Es seien $f_n, f \in D$ $(n \in \mathbb{N})$. Wenn es eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Λ gibt, die (1.1.3) *erfüllt, dann gilt $\delta(f_n, f) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.*

Im Anschluss folgen einige interessante Ergebnisse im Zusammenhang mit der Skorokhod-Topologie, die zum Teil ohne Beweis angegeben werden. Korollar 1.1.19 lieferte ein hinreichendes Kriterium für die relative Kompaktheit einer Menge $A \subset D$ unter der Skorokhod-Topologie. Der folgende Satz zeigt, dass dieses Kriterium auch notwendig ist:

Satz 1.1.21.
Alle Teilmengen A von D, die unter der Skorokhod-Topologie relativ kompakt sind, erfüllen die Bedingung (1.1.12).

Der folgende Satz beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen der lokal gleichmäßigen Topologie auf D und der Skorokhod-Topologie.

Satz 1.1.22.

(a) *Die Skorokhod-Topologie ist schwächer als die lokal gleichmäßige Topologie, das heißt: Für* $f_n, f \in D$ $(n \in \mathbb{N})$ *impliziert* $\delta_{lu}(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ *die Gültigkeit von*

$$f_n \xrightarrow{J_1} f.$$

(b) *Es seien* $f_n, f \in D$ $(n \in \mathbb{N})$, *wobei* f *stetig sei. Dann gilt* $f_n \xrightarrow{J_1} f$ *genau dann, wenn* f_n *lokal gleichmäßig gegen* f *konvergiert.*

Der letzte Satz dieses Abschnitts klärt die Frage, ob aus der J_1-Konvergenz zweier Folgen von Elementen aus D auch die Konvergenz ihrer Summe folgt. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall:

Satz 1.1.23.

(a) *Es seien* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei Folgen von Elementen aus* D *sowie* $f, g \in D$. *Dann implizieren* $f_n \xrightarrow{J_1} f$ *und* $g_n \xrightarrow{J_1} g$ *im Allgemeinen nicht* $f_n + g_n \xrightarrow{J_1} f + g$.

(b) *Ist* g *jedoch stetig, so folgt die Gültigkeit von* $f_n + g_n \xrightarrow{J_1} f + g$ *aus* $f_n \xrightarrow{J_1} f$ *und* $g_n \xrightarrow{J_1} g$.

Bemerkung 1.1.24.
In diesem Abschnitt wurden einige Aussagen über den Skorokhod-Raum D und die auf ihm definierte Skorokhod-Topologie getroffen. Seien nun $\mathfrak{X}$ ein beliebiger polnischer Raum mit Metrik ρ und $D'(\mathfrak{X})$ wie in Definition 1.1.1 der Raum aller càdlàg-Funktionen auf $[0, 1]$ mit Werten in $\mathfrak{X}$. Für $D'(\mathfrak{X})$ können ähnliche Ergebnisse wie für D bewiesen werden; einige davon werden hier ohne Begründung aufgelistet, da sie für den Beweis einiger in Abschnitt 1.3 auftretender Grenzwertsätze unverzichtbar sind.

(a) Die *Skorokhod-Topologie* auf $D'(\mathfrak{X})$ wird wie folgt charakterisiert (vgl. [Sk], Definition 2.2.2): Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $D'(\mathfrak{X})$ konvergiert gegen ein $f \in D'(\mathfrak{X})$, in Zeichen

$$f_n \xrightarrow{J_1'} f,$$

wenn es eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus

$$\Lambda' := \{\, \lambda : [0, 1] \to [0, 1] : \lambda \text{ stetig und streng monoton wachsend mit } \lambda(0) = 0 \text{ und } \lambda(1) = 1\}$$

gibt, so dass

$$(i) \qquad \sup_{0\le s\le 1} |\lambda_n(s) - s| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{1.1.13a}$$

$$(ii) \qquad \sup_{0\le s\le 1} \rho(f_n(s), f(\lambda_n(s)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1.1.13b}$$

(b) Die Bedingung (1.1.13) ist äquivalent dazu, dass es eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus Λ' gibt, so dass

$$(i) \qquad \sup_{0\le s\le 1} |\lambda_n(s) - s| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{1.1.14a}$$

$$(ii) \qquad \sup_{0\le s\le 1} \rho(f_n(\lambda_n(s)), f(s)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{1.1.14b}$$

erfüllt ist.

(c) Es seien $f_n, f \in D'(\mathfrak{X})$ $(n \in \mathbb{N})$. Genau dann gilt $f_n \xrightarrow{J_1'} f$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind (vgl. [Sk], 2.6.1):

(i) Es gilt $f_n(t) \to f(t)$ $(n \to \infty)$ für alle t aus einer dichten Teilmenge von $[0,1]$, die sowohl die 0 als auch die 1 enthält.

(ii) Es gilt

$$\lim_{c\downarrow 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\substack{t-c<t_1<t\le t_2<t+c \\ 0\le t_1<t_2\le 1}} \min\{\rho(f_n(t_1), f_n(t)),\ \rho(f_n(t), f_n(t_2))\} = 0.$$

1.2 Schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen und Verteilungskonvergenz von càdlàg-Prozessen

Zu Beginn dieses Abschnitts werden einige grundlegende und wichtige Ergebnisse im Zusammenhang mit der schwachen Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen und der Verteilungskonvergenz von Zufallselementen ohne Beweis zusammengestellt.

Definition 1.2.1.
Es seien S ein metrischer Raum und $\mathfrak{S}$ die Borelsche σ-Algebra über S. Eine Folge $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(S,\mathfrak{S})$ *konvergiert schwach* gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(S,\mathfrak{S})$, in Zeichen $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, wenn für jedes $f \in \mathcal{C}(S) = \{f : S \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt }\}$ gilt:

$$\int_S f\ d\mathbb{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_S f\ d\mathbb{P}. \tag{1.2.1}$$

Aus der Definition folgt, dass die Bedingung (1.2.1) für <u>alle</u> $f \in \mathcal{C}(S)$ erfüllt sein muss, damit schwache Konvergenz vorliegt. In manchen Fällen kann man jedoch aus der Gültigkeit von (1.2.1) für eine Teilklasse von Funktionen aus $\mathcal{C}(S)$ auf die Gültigkeit für alle $f \in \mathcal{C}(S)$ schließen. Das legt die folgende Definition nahe:

Definition 1.2.2.
Eine *konvergenzerzeugende Klasse* ist eine Menge $\mathcal{H}$ von stetigen, beschränkten Funktionen auf S mit Werten in $\mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Sind $\mathbb{P}_n, \mathbb{P}$ ($n \in \mathbb{N}$) Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(S, \mathfrak{S})$ und gilt

$$\int_S h \; d\mathbb{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_S h \; d\mathbb{P}$$

für alle $h \in \mathcal{H}$, so folgt $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$.

Seien von nun an E ein polnischer Raum, $\mathfrak{E}$ die Borelsche σ-Algebra über E und $\mathfrak{P}(E)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(E, \mathfrak{E})$.

Definition 1.2.3.
Die *Topologie der schwachen Konvergenz* $\mathfrak{W}$ auf $\mathfrak{P}(E)$ ist die gröbste Topologie, für die die Abbildungen $\mathfrak{P}(E) \ni \mathbb{P} \mapsto \int_E f \; d\mathbb{P}$ für alle $f \in \mathcal{C}(E)$ stetig sind. Dabei nennt man eine Topologie $\mathfrak{T}$ auf einer Menge $\mathfrak{X}$ *gröber* als eine Topologie $\mathfrak{T}'$ auf $\mathfrak{X}$, falls $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}'$ gilt (vgl. [E], A.8). $(\mathfrak{P}(E), \mathfrak{W})$ ist ein polnischer Raum (vgl. [E], Satz VIII.4.38).

Satz 1.2.4.
Es seien $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\mathbb{P}$ Elemente aus $\mathfrak{P}(E)$, für die $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$ gilt.

(a) Für jede abgeschlossene Menge $F \subset E$ ist die Ungleichung

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}(F)$$

erfüllt.

(b) Für jede beschränkte, $\mathbb{P}$-fast sicher stetige Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_E f \; d\mathbb{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E f \; d\mathbb{P}.$$

Seien E' ein weiterer polnischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{E}'$ und $h : E \to E'$ messbar. Dann liegt das Bildmaß von $\mathbb{P} \in \mathfrak{P}(E)$ unter h, in Zeichen $\mathbb{P}^h$, in $\mathfrak{P}(E')$.

Satz 1.2.5.
Die Abbildung $\mu_h : \mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}(E')$, $\mathbb{P} \mapsto \mu_h(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^h$ ist stetig bezüglich der schwachen Konvergenz in jedem $\mathbb{P}$, für das gilt, dass h $\mathbb{P}$-fast sicher stetig ist.

Der Satz gilt auch, wenn E und E' lediglich metrische Räume sind (vgl. [Bi], Theorem 5.1). Er ist unter dem Namen *„Continuous Mapping Theorem"* bekannt.

Das Konzept der schwachen Konvergenz kann nun leicht auf Zufallselemente übertragen werden:

Definition 1.2.6.

(a) Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und S ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{S}$. Eine messbare Abbildung $X : \Omega \to S$ (in dem Sinne, dass $X^{-1}(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{A}$ gilt) heißt ein *Zufallselement* von S (vgl. [Bi], S.22).

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien X_n ein Zufallselement von E mit Definitionsbereich $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mathbb{P}_n)$ und $\mathbb{P}_n^{X_n}$ die Verteilung von X_n unter $\mathbb{P}_n$. ($\mathbb{P}_n^{X_n}$ wird auch mit $\mathfrak{L}(X_n)$ bezeichnet.) Ferner sei X ein Zufallselement von E mit Definitionsbereich $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und Verteilung $\mathbb{P}^X = \mathfrak{L}(X)$. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert in Verteilung* gegen X, in Zeichen

$$X_n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X,$$

falls $(\mathfrak{L}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $\mathfrak{L}(X)$ konvergiert. Dies ist äquivalent dazu, dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}(f \circ X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f \circ X)$$

für alle $f \in \mathcal{C}(E)$ gilt, wobei $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ den Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}$ bezeichnet.

Es wird ab jetzt ohne Einschränkung angenommen, dass – sofern nichts anderes gesagt – alle auftretenden Zufallselemente auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ definiert sind. Außerdem kann man im Fall der Verteilungskonvergenz einer Folge von Zufallselementen stets voraussetzen, dass diese bereits fast sicher konvergiert, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1.2.7. (von Dudley, vgl. [Du], Theorem 11.7.2)
Gegeben eine Folge $X, X_1, X_2, \ldots$ von Zufallselementen von E mit $X_n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$, existiert eine Kopienfolge $X', X_1', X_2', \ldots$ auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathfrak{A}', \mathbb{P}')$ mit $X_n' \to X'$ fast sicher.

Satz 1.2.4(b) und Satz 1.2.5 implizieren nun folgendes Ergebnis:

Satz 1.2.8.
Es seien X_n, X $(n \in \mathbb{N})$ Zufallselemente von E und $h : E \to E'$ eine messbare Funktion. Ferner gelte

$$X_n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$$

und $\mathbb{P}^X(C) = 1$, wobei $C := \{\omega \in E : \ h \text{ ist stetig in } \omega\}$.

(a) Falls es sich bei E' um einen polnischen Raum handelt, folgt

$$h \circ X_n \xrightarrow{\mathfrak{L}} h \circ X.$$

(b) Falls speziell $E' = \mathbb{R}$ gilt und h beschränkt ist, folgt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h \circ X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h \circ X).$$

Beachte: Es muss nicht notwendig $C \in \mathfrak{E}$ gelten, das heißt $\mathbb{P}^X(C)$ kann unter Umständen nicht definiert sein. In diesem Fall muss aber die möglicherweise nicht messbare Menge $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \notin C\}$ in einer $\mathbb{P}$-Nullmenge enthalten sein, damit h wie in Satz 1.2.4(b) und Satz 1.2.5 gefordert $\mathbb{P}^X$-fast sicher stetig ist.

Diese Theorie soll nun auf càdlàg-Prozesse angewendet werden. Darunter versteht man stochastische Prozesse, deren Pfade in D liegen:

Definition 1.2.9.
Ein Zufallselement $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ des polnischen Raumes D, ausgestattet mit der Skorokhod-Topologie, wird als *càdlàg-Prozess* bezeichnet. Die Verteilung von X liegt in $\mathfrak{P}(D)$.

In Analogie zu Definition 1.1.11 erhält man in diesem Fall:

Definition 1.2.10.
Für einen càdlàg-Prozess X seien

$$J(X) = \{t > 0 : \mathbb{P}(\omega : X_t(\omega) \neq X_{t-}(\omega)) > 0\}, \tag{1.2.2}$$

$$U(X) = \{u > 0 : \mathbb{P}(\omega : |X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)| = u \text{ für ein } t > 0) > 0\} \tag{1.2.3}$$

und für $\omega \in \Omega$ und $u \geq 0$

$$T_0(X(\omega), u) = 0,\ T_{p+1}(X(\omega), u) = \inf\{t > T_p(X(\omega), u) : |X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)| > u\}$$
$$(p \geq 0).$$

Die Mengen $J(X)$ und $U(X)$ sind abzählbar.

Seien von nun an $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ und $X^n = (X^n_t)_{t\in[0,\infty)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ càdlàg-Prozesse. Es werde angenommen, dass $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X konvergiert, das heißt für alle $F \in \mathcal{C}(D)$ gilt

$$\int_D F\ d\mathbb{P}^{X^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_D F\ d\mathbb{P}^X \text{ bzw. } \int_\Omega F \circ X^n\ d\mathbb{P} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega F \circ X\ d\mathbb{P} \tag{1.2.4}$$

Die Frage, ob dann auch $X^n + f \xrightarrow{\mathfrak{L}} X + f$ für eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ gilt, beantwortet der nächste Satz.

Satz 1.2.11.
Falls für càdlàg-Prozesse X^n $(n \in \mathbb{N})$ und X die Bedingung $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$ erfüllt ist, gilt für jede stetige Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ auch

$$X^n + f \xrightarrow{\mathfrak{L}} X + f.$$

Dies gilt nicht notwendig im Fall einer unstetigen Funktion f.

Nachdem nun der Begriff der Verteilungskonvergenz einer Folge von càdlàg-Prozessen eingeführt worden ist, wird es im nächsten Abschnitt darum gehen, die Frage zu klären, welche Bedingungen hinreichend (und notwendig) für

$$X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$$

sind. Ebenso wie in Bemerkung 1.1.24 sollen zunächst jedoch die wichtigsten Begriffe dieses Abschnitts auf $D'(\mathfrak{X})$ übertragen werden, wobei $\mathfrak{X}$ einen beliebigen polnischen Raum bezeichnet.

Bemerkung 1.2.12.

(a) Man definiert

$$\mathcal{C}(D'(\mathfrak{X})) = \{F : D'(\mathfrak{X}) \to \mathbb{R} \mid F \text{ stetig und beschränkt } \}$$

sowie

$$\tilde{\mathcal{C}}(D'(\mathfrak{X})) = \{F : D'(\mathfrak{X}) \to \mathbb{R} \mid F \text{ stetig}\}.$$

(b) Es seien X^n, X $(n \in \mathbb{N})$ Zufallselemente von $D'(\mathfrak{X})$. Man sagt, X^n *konvergiert in Verteilung gegen* X, in Zeichen

$$X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X,$$

wenn für alle $F \in \mathcal{C}(D'(\mathfrak{X}))$

$$\int_{D'(\mathfrak{X})} F \; d\mathbb{P}^{X^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{D'(\mathfrak{X})} F \; d\mathbb{P}^X \tag{1.2.5}$$

erfüllt ist.

1.3 Einige Grenzwertsätze für die Verteilungskonvergenz von càdlàg-Prozessen

Bevor ein erster Lösungsweg für die am Ende von Abschnitt 1.2 aufgeworfene Frage angegeben werden kann, bedarf es der Einführung eines neuen Konvergenzbegriffes. Seien dazu auch in diesem Abschnitt X^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ und X càdlàg-Prozesse mit Definitionsbereich $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ sowie T eine Teilmenge von $[0, \infty)$. Bezeichnet dann $\pi_{t_1,\dots,t_k}$ für fest gewählte $k \in \mathbb{N}^*$ und $t_1, \dots, t_k \in T$ die natürliche Projektion von D nach $\mathbb{R}^{kd}$, bildet also $\pi_{t_1,\dots,t_k}$ eine Funktion $f \in D$ auf $(f(t_1), \dots, f(t_k)) \in \mathbb{R}^{kd}$ ab, so kann man zeigen, dass diese Abbildung bezüglich der Borelschen σ-Algebren messbar ist. Folglich ist $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) = \pi_{t_1,\dots,t_k} \circ X$ ein Zufallselement von $\mathbb{R}^{kd}$ und $\mathfrak{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^{kd}, \mathfrak{B}^{kd})$. Entsprechendes gilt für $(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 1.3.1.
T sei eine Teilmenge von $[0,\infty)$. Man schreibt

$$X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}(T)} X,$$

falls

$$(X^n_{t_1},\ \ldots,\ X^n_{t_k}) \xrightarrow{\mathfrak{L}} (X_{t_1},\ \ldots,\ X_{t_k}) \tag{1.3.1}$$

für alle $t_1,\ldots,t_k \in T$ und alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt. Die Bedingung (1.3.1) ist gleichbedeutend mit

$$\int_{\mathbb{R}^{kd}} f\ d\mathbb{P}^{\left(X^n_{t_1},\ldots,X^n_{t_k}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^{kd}} f\ d\mathbb{P}^{\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_k}\right)} \tag{1.3.2}$$

für alle $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{kd})$.

Die Frage, wann $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$ gilt, läßt sich mittels dieser Notation nun wie folgt beantworten:

Satz 1.3.2. (1. Grenzwertsatz)
Seien $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X wie oben. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$.

(ii) *(a)* $\{\mathfrak{L}(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$ *ist relativ kompakt in* $\mathfrak{P}(D)$ *bezüglich der schwachen Konvergenz.*

(b) Für eine dichte Teilmenge T von $[0,\infty)$ gilt $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}(T)} X$.

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigt man die folgende Hilfsaussage, die ohne Beweis angegeben wird:

Lemma 1.3.3.
Es seien T eine dichte Teilmenge von $[0,\infty)$ und X, Y zwei càdlàg-Prozesse, die $\mathfrak{L}(X_{t_1},\ldots,X_{t_k}) = \mathfrak{L}(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_k})$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$ und alle $t_i \in T$ $(1 \le i \le k)$ erfüllen. Dann gilt $\mathfrak{L}(X) = \mathfrak{L}(Y)$.

Da die relative Kompaktheit einer Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(D,\mathfrak{D})$ nicht immer leicht nachzuweisen ist, ist der Satz von Prokhorov (Satz 1.3.5) ein wichtiges Hilfsmittel für den Nachweis der Verteilungskonvergenz von càdlàg-Prozessen. Zuvor sei jedoch noch an den Begriff der Straffheit erinnert. Seien dazu erneut E ein polnischer Raum, $\mathfrak{E}$ die Borelsche σ-Algebra über E und $\mathfrak{P}(E)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(E,\mathfrak{E})$.

Definition 1.3.4.

(a) Eine Teilmenge $A \subset \mathfrak{P}(E)$ heißt *straff*, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subset E$ existiert derart, dass $\mathbb{P}(E \backslash K) \leq \epsilon$ für alle $\mathbb{P} \in A$ gilt.

(b) Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallselementen von E mit Definitionsbereichen $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mathbb{P}_n)$ heißt *straff*, wenn die Folge der Verteilungen $(\mathfrak{L}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist, wenn also für jedes $\epsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K \subset E$ existiert derart, dass $\mathbb{P}_n(X_n \notin K) \leq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 1.3.5. (Satz von Prokhorov)
Eine Teilmenge $A \subset \mathfrak{P}(E)$ ist genau dann relativ kompakt für die Topologie der schwachen Konvergenz, wenn sie straff ist. Insbesondere ist für eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallselementen von E die Menge $\{\mathfrak{L}(X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ genau dann relativ kompakt, wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist.

Ein Beweis dieses Satzes in allgemeinerer Form findet sich in [Bi], S.37-40. Aus dem Satz von Prokhorov und Satz 1.3.2 folgt unmittelbar ein zweiter Grenzwertsatz:

Satz 1.3.6. (2. Grenzwertsatz)
Seien $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X wie oben. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$.

(ii) *(a)* $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist straff.*

(b) Für eine dichte Teilmenge T von $[0, \infty)$ gilt $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}(T)} X$.

Weiß man also bereits, dass die endlich-dimensionalen Randverteilungen (bzgl. einer dichten Teilmenge T von $[0, \infty)$) einer Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von càdlàg-Prozessen gegen die endlich-dimensionalen Randverteilungen (bzgl. T) eines càdlàg-Prozesses X konvergieren, muss man nur noch zeigen, dass $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist, um Verteilungskonvergenz nachzuweisen. Dabei ist man nicht auf das Nachprüfen der definierenden Bedingung angewiesen, wie der nächste Satz zeigt:

Satz 1.3.7.
Eine Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von càdlàg-Prozessen ist genau dann straff, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für alle $N \in \mathbb{N}^*$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}^*$ und ein $M \in [0, \infty)$ mit

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq N} |X_t^n| > M\right) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0. \tag{1.3.3}$$

(ii) Für alle $N \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon > 0$ und $\eta > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}^*$ und ein $\theta > 0$ mit

$$\mathbb{P}\left(w_N(X^n, \theta) > \eta\right) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0. \tag{1.3.4}$$

Die beiden bisher bewiesenen Grenzwertsätze (Satz 1.3.2 und Satz 1.3.6) stützen sich auf die Konzepte „relative Kompaktheit“ und „Straffheit“. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass es auch noch andere Möglichkeiten gibt, die Verteilungskonvergenz einer Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von càdlàg-Prozessen gegen einen weiteren càdlàg-Prozess X nachzuweisen. Begonnen wird mit dem nachfolgenden Satz, der mitsamt Beweis in [St] zu finden ist. Um die Notation zu erleichtern, sei für eine beliebige Funktion $f \in D$ und beliebige $c > 0$ und $N > 0$

$$\Delta(c, f, N) := \sup_{\substack{t-c<t_1<t\le t_2<t+c \\ 0\le t_1<t_2\le N}} \min\{|f(t_1) - f(t)|, |f(t) - f(t_2)|\}. \tag{1.3.5}$$

Satz 1.3.8. (3. Grenzwertsatz)
Seien $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X wie oben. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$.

(ii) *(a) Für alle Teilmengen T von $[0,\infty)$ gilt $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}(T)} X$.*

(b) Für jedes $\epsilon > 0$ und $N > 0$ gilt

$$\lim_{c\downarrow 0} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Delta(c, X^n, N) > \epsilon) = 0.$$

Diese Bedingung wird auch Skorokhods Δ-Bedingung genannt.

Beachte: Wegen des Satzes von Dudley (Satz 1.2.7) ist im Fall (i) die Bedingung (1.2.4) sogar für alle $F : D \to \mathbb{R}$, die messbar und $\mathbb{P}^X$-fast sicher stetig sind, erfüllt. Eine entsprechende Aussage gilt im Fall (ii)(a).

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigt man einige Grenzwertsätze für Zufallselemente von $D'(\mathfrak{X})$ für einen polnischen Raum $\mathfrak{X}$, die hiernach der Vollständigkeit halber angegeben werden. Es handelt sich dabei um die Sätze 3.2.1 bis 3.2.3 aus [Sk], die den hier verwendeten Definitionen und Notationen angepasst wurden. Ebenso wie in den vorherigen Abschnitten werden diese Ergebnisse für $D'(\mathfrak{X})$ allerdings nicht bewiesen. Der interessierte Leser kann die Beweise in [Sk], S.283-286, nachlesen.

Satz 1.3.9. (1. Grenzwertsatz für $D'(\mathfrak{X})$)
Es seien $\mathfrak{X}$ ein polnischer Raum mit Metrik ρ und X^n, X $(n \in \mathbb{N})$ Zufallselemente von $D'(\mathfrak{X})$ mit Definitionsbereich $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Ferner seien die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(i) Für eine dichte Teilmenge T von $[0,1]$ mit $0, 1 \in T$ gilt $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}(T)} X$.

(ii) Für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{c\downarrow 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{P}(\Delta(c, X^n, 1) > \epsilon) = 0,$$

wobei Δ wie in (1.3.5)*, aber mit ρ statt der Betragsfunktion und für alle $f \in D'(\mathfrak{X})$ definiert ist.*

Dann folgt

$$\int_{D'(\mathfrak{X})} F \; d\mathbb{P}^{X^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{D'(\mathfrak{X})} F \; d\mathbb{P}^X \tag{1.3.6}$$

für alle $F \in \tilde{\mathcal{C}}(D'(\mathfrak{X}))$.

Satz 1.3.10. (2. Grenzwertsatz für $D'(\mathfrak{X})$)
Es seien $\mathfrak{X}$ ein polnischer Raum mit Metrik ρ und X^n, X $(n \in \mathbb{N})$ Zufallselemente von $D'(\mathfrak{X})$ mit Definitionsbereich $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Falls für alle $F \in \mathcal{C}(D'(\mathfrak{X}))$ die Bedingung (1.3.6) *erfüllt ist, falls also*

$$X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$$

gilt, dann sind die folgenden beiden Aussagen richtig:

(i) Für eine dichte Teilmenge T von $[0,1]$ mit $0, 1 \in T$ gilt $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}(T)} X$.

(ii) Für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{c\downarrow 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \; \mathbb{P}(\Delta(c, X^n, 1) > \epsilon) = 0,$$

wobei Δ wie in (1.3.5)*, aber mit ρ statt der Betragsfunktion und für alle $f \in D'(\mathfrak{X})$ definiert ist.*

Satz 1.3.11. (3. Grenzwertsatz für $D'(\mathfrak{X})$)
Es seien $\mathfrak{X}$ ein polnischer Raum mit Metrik ρ und X^n, X $(n \in \mathbb{N})$ Zufallselemente von $D'(\mathfrak{X})$ mit Definitionsbereich $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Die Bedingungen (i) und (ii) aus Satz 1.3.9 implizieren sogar, dass für alle Funktionen $F : D'(\mathfrak{X}) \to \mathbb{R}$, die messbar und $\mathbb{P}^X$-fast sicher stetig sind, die Bedingung (1.3.6) *erfüllt ist.*

Beim Nachweis der Verteilungskonvergenz einer Folge von càdlàg-Prozessen kann das Nachrechnen von Skorokhods Δ-Bedingung unter Umständen sehr problematisch sein. Als Abschluss des Kapitels wird daher noch ein weiterer Grenzwertsatz für càdlàg-Prozesse bewiesen, der auf Satz 1.3.8 aufbaut. Er stammt mitsamt Beweis aus [Bin] (vgl. [Bin], Theorem 3). Zuvor muss jedoch der Begriff der Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit eingeführt werden:

Definition 1.3.12. (vgl. [Sa], Definition 1.5 und Lemma 9.6)
Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X_t für jedes $t \in [0, \infty)$ eine auf Ω definierte Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ heißt *stetig in Wahrscheinlichkeit* (oder auch *stochastisch stetig*), wenn für jedes $t \geq 0$ und $\epsilon > 0$ die Bedingung

$$\lim_{s\to t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \epsilon) = 0 \tag{1.3.7}$$

erfüllt ist. $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ heißt *gleichmäßig stochastisch stetig* auf dem endlichen Intervall $[0,t_0]$ $(0 \leq t_0 < \infty)$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ und $\eta > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $s,t \in [0,t_0]$ mit $|s-t| < \delta$ die Bedingung

$$\mathbb{P}(|X_s - X_t| > \epsilon) < \eta \tag{1.3.8}$$

gilt.

Satz 1.3.13. (4. Grenzwertsatz)
Es seien X^n $(n \in \mathbb{N})$ und X càdlàg-Prozesse mit Definitionsbereich $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Betrachtet wird nur der Fall $\boxed{d=1}$. Hinreichend für

$$X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$$

ist dann die Gültigkeit der folgenden drei Bedingungen:

(i) Für alle Teilmengen T von $[0,\infty)$ gilt

$$X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}(T)} X.$$

(ii) Der Prozess $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist stetig in Wahrscheinlichkeit.

(iii) $X, X^0, X^1, \ldots$ besitzen monotone Pfade.

1.4 Beweise

Wie bereits angekündigt, folgen nun die Beweise eines Großteils der in diesem Kapitel präsentierten Ergebnisse.

Beweis. (von Satz 1.1.4)
Angenommen, D sei separabel unter δ_{lu}. Dann kann es aufgrund eines Satzes aus [Bi] (Appendix I, S.216) keine überabzählbare Teilmenge $A \subset D$ mit $\inf\{\delta_{lu}(f,g) :\ f,g \in A,\ f \neq g\} > 0$ geben. Die Menge

$$A := \{f_s : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d,\ f_s(t) = 1_{[s,\infty)}(t) :\ s \in [0,1)\}$$

ist eine überabzählbare Teilmenge von D. Seien nun $s, s' \in [0,1)$ beliebig mit $s \neq s'$, wobei ohne Einschränkung $s < s'$ gelte. Dann ergibt sich für $f_s, f_{s'} \in A$ sowohl $f_s \neq f_{s'}$ als auch

$$\begin{aligned}
\delta_{lu}(f_s, f_{s'}) &= \sum_{N\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^N} \cdot \left(1 \wedge \sup_{t\leq N} |f_s(t) - f_{s'}(t)|\right) \\
&= \sum_{N\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^N} \cdot (1 \wedge |f_s(t') - f_{s'}(t')|) \\
&= \sum_{N\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^N} \ = \ 1,
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt $t' \in [s, s')$ beliebig gewählt sei. Es folgt unmittelbar $\inf\{\delta_{lu}(f,g): \ f,g \in A, \ f \neq g\} = 1 > 0$, was zum Widerspruch führt. $\square$

Beweis. (von Lemma 1.1.9)
Aus $\delta(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt $\delta_N(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle $N \in \mathbb{N}^*$. Daher gibt es Folgen $(\lambda_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$ in Λ, für die gilt:

$$a_n^N := \ell(\lambda_n^N) + \|(k_N f_n) \circ \lambda_n^N - k_N f\|_\infty \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Es gibt also für alle $N \in \mathbb{N}^*$ und $\epsilon > 0$ ein $n_0(\epsilon, N)$, so dass $a_n^N < \epsilon$ für alle $n \geq n_0(\epsilon, N)$ erfüllt ist; insbesondere gibt es für alle $N \in \mathbb{N}^*$ ein $n_0(N)$, so dass $a_n^N < \frac{1}{N}$ für alle $n \geq n_0(N)$ gilt. Sei nun $N \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Wähle zu $N+1$ das zugehörige $n_0(N+1)$ so groß, dass $n_0(N+1) \geq \max\{N+1, n_0(N)\}$ erfüllt ist, und bezeichne es mit m_{N+1}. Man erhält auf diese Weise eine wachsende Folge $(m_N)_{N\geq 1}$, die sowohl $m_N \geq N$ als auch $a_n^N \leq \frac{1}{N}$ für alle $n \geq m_N$ erfüllt. Sei $r_n := \sup\{N : m_N \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Wegen $m_N \geq N$ gilt dann $r_n < \infty$ und $r_n \to \infty$ für $n \to \infty$ sowie ferner $a_n^{r_n} \leq \frac{1}{r_n}$. Setze für $t \in [0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_n(t) := \begin{cases} \lambda_n^{r_n}(t) & \text{falls } t \leq \sqrt{r_n} \\ t + \lambda_n^{r_n}(\sqrt{r_n}) - \sqrt{r_n} & \text{falls } t > \sqrt{r_n}. \end{cases}$$

Dann gilt:

- λ_n ist eine Funktion auf $[0, \infty)$ mit Werten in $[0, \infty)$, da $\lambda_n^{r_n} \in \Lambda$,
- $\lambda_n(0) = \lambda_n^{r_n}(0) = 0$,
- λ_n ist streng monoton wachsend, da $\lambda_n^{r_n} \in \Lambda$ streng monoton wachsend ist,
- $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_n(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \big(t + \lambda_n^{r_n}(\sqrt{r_n}) - \sqrt{r_n}\big) = \infty$,
- λ_n ist stetig, da $\lambda_n^{r_n} \in \Lambda$ stetig ist.

Es folgt also $\lambda_n \in \Lambda$. Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\lambda_n - I\|_\infty &= \sup_{s<\infty} |\lambda_n(s) - s| = \sup_{s\leq\sqrt{r_n}} |\lambda_n^{r_n}(s) - s| \\ &= \|\lambda_n^{r_n} - I\|_{\sqrt{r_n}} \underset{(1.1.8c)}{\leq} \sqrt{r_n} \cdot (e^{\ell(\lambda_n^{r_n})} - 1) \\ &\leq \sqrt{r_n} \cdot (e^{a_n^{r_n}} - 1) \quad (\text{Definition von } a_n^{r_n}) \\ &\leq \sqrt{r_n} \cdot (e^{\frac{1}{r_n}} - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

das heißt $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt (1.1.3a).

Sei erneut $N \in \mathbb{N}^*$ beliebig und wähle $s \leq N$. Wegen $r_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gibt es ein n_0, so dass $N \leq \sqrt{r_n}$ für alle $n \geq n_0$ erfüllt ist; außerdem kann man wegen $\|\lambda_n - I\|_{\sqrt{r_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ein n_1 mit

$$\sup_{t\leq\sqrt{r_n}} |\lambda_n(t) - t| < \frac{1}{2}$$

für alle $n \geq n_1$ finden. Setzt man $n' := \max\{n_0, n_1\}$, so ergibt sich für alle $n \geq n'$ die Beziehung $\lambda_n(s) < s + \frac{1}{2} \leq N + \frac{1}{2}$. Damit erhält man für alle $n \geq n'$ und $s \leq N$ sowohl $\lambda_n(s) = \lambda_n^{r_n}(s)$ als auch $k_N(\lambda_n(s)) = k_N(s) = 1$, woraus sich

$$\begin{aligned}
\|f_n \circ \lambda_n - f\|_N &= \sup_{s\leq N} |f_n(\lambda_n(s)) - f(s)| \\
&= \sup_{s\leq N} |f_n(\lambda_n(s)) - (k_N f)(s)| \\
&= \sup_{s\leq N} |(k_N f_n)(\lambda_n(s)) - (k_N f)(s)| \\
&= \sup_{s\leq N} |(k_N f_n)(\lambda_n^{r_n}(s)) - (k_N f)(s)| \\
&\leq \|(k_N f_n) \circ \lambda_n^{r_n} - k_N f\|_\infty \\
&\leq a_n^{r_n} \quad \text{(Definition von } a_n^{r_n}\text{)} \\
&\leq \frac{1}{r_n} \to 0 \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}$$

ergibt. $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt also auch (1.1.3b), was den Beweis abschließt. □

Beweis. (von Satz 1.1.10)
Zunächst wird gezeigt, dass δ_N für jedes $N \in \mathbb{N}^*$ fast alle Eigenschaften einer Metrik besitzt. Sei also $N \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Dann ist δ_N nach Definition nichtnegativ und es gilt:

(i) δ_N ist symmetrisch: Seien $f, g \in D$. Man erhält

$$\begin{aligned}
\delta_N(f,g) &= \inf_{\lambda\in\Lambda} \left(\ell(\lambda) + \|(k_N f)\circ\lambda - k_N g\|_\infty\right) \\
&\underset{(1.1.8e)}{=} \inf_{\lambda\in\Lambda} \left(\ell(\lambda) + \|(k_N f)\circ\lambda\circ\lambda^{-1} - (k_N g)\circ\lambda^{-1}\|_\infty\right) \\
&\underset{(1.1.8a)}{=} \inf_{\lambda\in\Lambda} \left(\ell(\lambda^{-1}) + \|k_N f - (k_N g)\circ\lambda^{-1}\|_\infty\right. \\
&= \inf_{\mu\in\Lambda} \left(\ell(\mu) + \|(k_N g)\circ\mu - k_N f\|_\infty\right) \\
&= \delta_N(g,f).
\end{aligned}$$

(ii) δ_N erfüllt die Dreiecksungleichung: Seien $f, g, h \in D$ und $a = \delta_N(f,g)$, $b = \delta_N(g,h)$ sowie $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach Definition μ, $\mu' \in \Lambda$, so dass $\ell(\mu) + \|(k_N f)\circ\mu - k_N g\|_\infty \leq a + \epsilon$ und $\ell(\mu') + \|(k_N g)\circ\mu' - k_N h\|_\infty \leq b + \epsilon$. Es gilt nun $\mu\circ\mu' \in \Lambda$ und

$$\begin{aligned}
& \ell(\mu\circ\mu') + \|(k_N f)\circ\mu\circ\mu' - k_N h\|_\infty \\
\underset{(1.1.8b)}{\leq}\; & \ell(\mu) + \ell(\mu') + \|(k_N f)\circ\mu\circ\mu' - k_N h\|_\infty \\
\leq\; & \ell(\mu) + \ell(\mu') + \|(k_N f)\circ\mu\circ\mu' - (k_N g)\circ\mu'\|_\infty \\
& + \|(k_N g)\circ\mu' - k_N h\|_\infty \\
\underset{(1.1.8e)}{\leq}\; & a + b + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}
\delta_N(f,h) &= \inf_{\lambda\in\Lambda}\left(\ell(\lambda)+\|(k_Nf)\circ\lambda-k_Nh\|_\infty\right)\\
&\leq \ell(\mu\circ\mu')+\|(k_Nf)\circ\mu\circ\mu'-k_Nh\|_\infty\\
&\leq a+b+2\epsilon\\
&= \delta_N(f,g)+\delta_N(g,h)+2\epsilon.
\end{aligned}$$

Da $\epsilon>0$ beliebig gewählt war, erhält man $\delta_N(f,h)\leq\delta_N(f,g)+\delta_N(g,h)$. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass auch δ nichtnegativ und symmetrisch ist und die Dreiecksungleichung erfüllt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\delta(f,g)=0$ für $f,g\in D$ äquivalent ist zu $f=g$. Es gelte also $\delta(f,g)=0$. Dann gibt es laut Lemma 1.1.9 eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Λ, die (1.1.3a) erfüllt und für die $\|f\circ\lambda_n-g\|_N\to 0$ $(n\to\infty)$ für alle $N\in\mathbb{N}^*$ gilt. Für alle $N\in\mathbb{N}^*$ und alle $\epsilon>0$ gibt es also ein $n_0(\epsilon,N)$, so dass $\|f\circ\lambda_n-g\|_N<\epsilon$ für alle $n\geq n_0(\epsilon,N)$ gilt; das heißt für alle $N\in\mathbb{N}^*$ und alle $\epsilon>0$ gibt es ein $n_0(\epsilon,N)$, so dass $|f(\lambda_n(s))-g(s)|<\epsilon$ für alle $n\geq n_0(\epsilon,N)$ und alle $s\leq N$ erfüllt ist. Daher gilt $f(\lambda_n(t))\to g(t)$ $(n\to\infty)$ für alle $t\in[0,\infty)$. Seien nun $\epsilon>0$ und t so gewählt, dass f in t stetig ist. Dann liefert das ϵ-δ-Kriterium der Stetigkeit die Existenz eines $\delta>0$, so dass $|f(s)-f(t)|<\epsilon$ für alle $s\in[0,\infty)$ mit $|s-t|<\delta$ gilt. Außerdem folgt aus (1.1.3a) $|\lambda_n(t)-t|\to 0$ für $n\to\infty$. Wählt man nun n_0 derart, dass $|\lambda_n(t)-t|<\delta$ für alle $n\geq n_0$ erfüllt ist, dann erhält man $|f(\lambda_n(t))-f(t)|<\epsilon$ für alle $n\geq n_0$ und somit $f(\lambda_n(t))\to f(t)$ für $n\to\infty$. Aus $f(\lambda_n(t))\to g(t)$ $(n\to\infty)$ für alle $t\in[0,\infty)$ und $f(\lambda_n(t))\to f(t)$ $(n\to\infty)$ für alle Stetigkeitspunkte von f folgt nun sofort $f=g$, da die Menge der Unstetigkeitsstellen einer càdlàg-Funktion abzählbar ist und sowohl f als auch g rechtsseitig stetig sind. Da die Rückrichtung trivial ist, definiert δ also eine Metrik auf D. □

Beweis. (von Satz 1.1.12)
Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in D, das heißt für alle $\epsilon>0$ gebe es ein N_0, so dass $\delta(f_m,f_n)<\frac{\epsilon}{2}$ für alle $m,n\geq N_0$ erfüllt ist. Zu zeigen ist, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $f\in D$ konvergiert. Dafür genügt es aber zu zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ enthält, denn: Es seien $\epsilon>0$ und $f'\in D$ der Grenzwert von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, das heißt es gebe ein N_1, so dass $\delta(f_{n_k},f')<\frac{\epsilon}{2}$ für alle $n_k\geq N_1$. Dann folgt mit $n':=\max\{N_0,N_1\}$ für alle $k\geq n'$ (und somit $n_k\geq n'$)

$$\delta(f_k,f')\leq\delta(f_k,f_{n_k})+\delta(f_{n_k},f')<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

was bedeutet, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f' konvergiert.

Die Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ wird wie folgt konstruiert: Sei $k\in\mathbb{N}$ beliebig. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $n(k)$ derart, dass $\delta(f_m,f_{\tilde{m}})<\frac{1}{2^k}$ für alle $m,\tilde{m}\geq n(k)$ gilt. Dabei sei ohne Einschränkung $n(k)$ so gewählt, dass

$n(k) > n(k-1)$. Definiert man nun $f_{n_k} := f_{n(k)}$, so bildet $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\delta(f_{n_k}, f_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$.

Zu zeigen bleibt, dass $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ein $f' \in D$ konvergiert. Seien dazu $N \in \mathbb{N}^*$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Aus der Gültigkeit von $\delta(f_{n_k}, f_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ folgt $\delta_N(f_{n_k}, f_{n_{k+1}}) \leq 2^{N-k} < 2^{N-k+1}$; es gibt also aufgrund der Definition von δ_N ein $\lambda_k^N \in \Lambda$ mit

$$\ell(\lambda_k^N) + \|(k_N f_{n_k}) \circ \lambda_k^N - k_N f_{n_{k+1}}\|_\infty \leq 2^{N+1-k}. \tag{1.4.1}$$

Für $p \geq k$ setze $\rho_{k,p}^N = \lambda_k^N \circ \lambda_{k+1}^N \circ \ldots \circ \lambda_p^N$. Dann folgt aus (1.1.8b) und (1.4.1)

$$\begin{aligned} \ell(\rho_{k,p}^N) &= \ell(\lambda_k^N \circ \lambda_{k+1}^N \circ \ldots \circ \lambda_p^N) \\ &\leq \ell(\lambda_k^N) + \ldots + \ell(\lambda_p^N) \\ &\leq 2^{N+1-k} + 2^{N-k} + \ldots + 2^{N+1-p} \\ &= 2^{N+1-k} \cdot \sum_{i=0}^{p-k} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= 2^{N+1-k} \cdot \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-k}\right) \\ &\leq 2 \cdot 2^{N+1-k} = 2^{N+2-k}. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Für $k \leq p < q$ gilt $\rho_{k,q}^N - \rho_{k,p}^N = \rho_{k,p}^N \circ (\rho_{p+1,q}^N - I)$, daher implizieren (1.1.8) und (1.4.2)

$$\begin{aligned} \|\rho_{k,q}^N - \rho_{k,p}^N\|_{N+2} &\leq \|\rho_{p+1,q}^N - I\|_{N+2} \cdot e^{\ell\left(\rho_{k,p}^N\right)} \\ &\leq (N+2) \cdot (e^{\ell\left(\rho_{p+1,q}^N\right)} - 1) \cdot e^{\ell\left(\rho_{k,p}^N\right)} \\ &\leq (N+2) \cdot (e^{2^{N+1-p}} - 1) \cdot e^{2^{N+2-k}}, \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

und der letzte Term konvergiert für $p, q \to \infty$ gegen 0. Für die weiteren Überlegungen bedarf es der Einführung der *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz* auf dem Raum $C([0, N+2], \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen auf $[0, N+2]$ mit Werten in $\mathbb{R}$, die durch die Metrik $\delta_u(f,g) = \|f-g\|_{N+2}$ definiert ist. Bezeichnet nämlich $\tilde{\rho}_{k,p}^N$ die Einschränkung von $\rho_{k,p}^N$ auf $[0, N+2]$, so ist die Folge $\left(\tilde{\rho}_{k,p}^N\right)_{p\geq k}$ eine Cauchy-Folge für diese Topologie, denn: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Gesucht ist ein $p_0 \geq k$ derart, dass $\delta_u(\tilde{\rho}_{k,q}^N, \tilde{\rho}_{k,p}^N) < \epsilon$ für alle $q, p \geq p_0$ erfüllt ist. Wegen (1.4.3) folgt aber sofort

$$\delta_u(\tilde{\rho}_{k,q}^N, \tilde{\rho}_{k,p}^N) = \|\tilde{\rho}_{k,q}^N - \tilde{\rho}_{k,p}^N\|_{N+2} < \epsilon$$

für hinreichend große p und q. Da aufgrund des Cauchy-Kriteriums der gleichmäßigen Konvergenz und Satz 104.2 aus [H] der Raum $C([0, N+2], \mathbb{R})$ unter δ_u vollständig ist, folgt, dass $\left(\tilde{\rho}_{k,p}^N\right)_{p\geq k}$ auf $[0, N+2]$ gleichmäßig gegen eine monoton wachsende, stetige Funktion $\tilde{\mu}_k^N$ konvergiert. Dass $\tilde{\mu}_k^N$ monoton wachsend ist, sieht man folgendermaßen: Da $\left(\tilde{\rho}_{k,p}^N\right)_{p\geq k}$ auf $[0, N+2]$ gleichmäßig gegen $\tilde{\mu}_k^N$ konvergiert, gilt insbesondere $\tilde{\rho}_{k,p}^N(t) \to \tilde{\mu}_k^N(t)$ $(p \to \infty)$ für alle $t \in [0, N+2]$. Seien nun $t, t' \in [0, N+2]$ mit $t < t'$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_k^N(t) &= \lim_{p\to\infty} \tilde{\rho}_{k,p}^N(t) \\
&\leq \lim_{p\to\infty} \tilde{\rho}_{k,p}^N(t') \quad \left(\tilde{\rho}_{k,p}^N \uparrow \text{für alle } p \geq k \right) \\
&= \tilde{\mu}_k^N(t'),
\end{aligned}$$

$\tilde{\mu}_k^N$ ist also monoton wachsend. Die Funktion $\tilde{\mu}_k^N$ soll im Folgenden auf $[0, \infty)$ ausgeweitet werden:

$$\mu_k^N(t) := \begin{cases} \tilde{\mu}_k^N(t) & \text{falls } t \leq N+2 \\ t - (N+2) + \tilde{\mu}_k^N(N+2) & \text{falls } t > N+2. \end{cases}$$

μ_k^N ist nach Konstruktion monoton wachsend und stetig mit $\mu_k^N(0) = \tilde{\mu}_k^N(0) = 0$, denn da $\left(\tilde{\rho}_{k,p}^N\right)_{p\geq k}$ auf $[0, N+2]$ gleichmäßig gegen $\tilde{\mu}_k^N$ konvergiert, gilt insbesondere $0 = \tilde{\rho}_{k,p}^N(0) \to \tilde{\mu}_k^N(0)$ für $p \to \infty$, was $\tilde{\mu}_k^N(0) = 0$ impliziert. Außerdem hat die Steigung von μ_k^N auf $[N+2, \infty)$ den Wert 1, so dass

$$\ell(\mu_k^N) = \sup_{s<t} \left| \log \frac{\mu_k^N(t) - \mu_k^N(s)}{t-s} \right| = \sup_{s<t\leq N+2} \left| \log \frac{\mu_k^N(t) - \mu_k^N(s)}{t-s} \right|$$

und daher $\ell(\mu_k^N) \leq \overline{\lim_{p\to\infty}}\, \ell(\rho_{k,p}^N)$ gilt. (Man beachte die Gültigkeit von

$$\mu_k^N(t) = \tilde{\mu}_k^N(t) = \lim_{p\to\infty} \tilde{\rho}_{k,p}^N(t) = \lim_{p\to\infty} \rho_{k,p}^N(t)$$

für alle $t \leq N+2$.) Infolgedessen impliziert (1.4.2)

$$\ell(\mu_k^N) \leq 2^{N+2-k}. \tag{1.4.4}$$

Insbesondere ist μ_k^N streng monoton wachsend und gehört daher zu Λ. Wäre μ_k^N nämlich nicht streng monoton wachsend, gäbe es $t, t' \in [0, \infty)$ mit $t < t'$ und $\mu_k^N(t) \geq \mu_k^N(t')$. Da wie oben gezeigt μ_k^N monoton wachsend ist, würde dies aber $\mu_k^N(t) = \mu_k^N(t')$ implizieren, woraus

$$\frac{\mu_k^N(t') - \mu_k^N(t)}{t'-t} = 0$$

und somit $\ell(\mu_k^N) = \infty$ folgen würde, was (1.4.4) widerspricht. Nach Konstruktion gilt $\lambda_k^N \circ \rho_{k+1,p}^N = \rho_{k,p}^N$. Daher erhält man für $t \leq N+2$

$$\begin{aligned}
\mu_k^N(t) &= \tilde{\mu}_k^N(t) = \lim_{p\to\infty} \tilde{\rho}_{k,p}^N(t) = \lim_{p\to\infty} \rho_{k,p}^N(t) \\
&= \lambda_k^N \left(\lim_{p\to\infty} \rho_{k+1,p}^N(t) \right) = \lambda_k^N \left(\lim_{p\to\infty} \tilde{\rho}_{k+1,p}^N(t) \right) \\
&= \lambda_k^N(\tilde{\mu}_{k+1}^N(t)) = \lambda_k^N(\mu_{k+1}^N(t)).
\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Nun sieht man

$$\|\mu_k^N - I\|_{N+2} \underset{(1.1.8c)}{\leq} (N+2)\cdot(e^{\ell(\mu_k^N)}-1) \underset{(1.4.4)}{\leq} (N+2)\cdot(e^{2^{N+2-k}}-1) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

und

$$\|\lambda_k^N - I\|_{N+2} \underset{(1.1.8c)}{\leq} (N+2)\cdot(e^{\ell(\lambda_k^N)}-1) \underset{(1.4.1)}{\leq} (N+2)\cdot(e^{2^{N+1-k}}-1) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

daher gilt für alle hinreichend großen k sowohl $\mu_k^N(t) > N+1$ für $t > N+2$ als auch $\lambda_k^N(\mu_{k+1}^N(t)) > N+1$ für $t > N+2$. Die erste Behauptung soll exemplarisch begründet werden: Für $\epsilon = 1$ existiert ein k_0 derart, dass $|\mu_k^N(N+2)-(N+2)| < 1$ für alle $k \geq k_0$ erfüllt ist. Seien $t > N+2$ und $k \geq k_0$ fest. Dann hat man $\mu_k^N(t) = t-(N+2)+\tilde{\mu}_k^N(N+2)$, und wegen $\tilde{\mu}_k^N(N+2)-(N+2) \in (-1,1)$ gilt $\mu_k^N(t) > N+1$. Wegen (1.4.5) und in Anbetracht der Definition von k_N erhält man also $(k_N f_{n_k})(\lambda_k^N(\mu_{k+1}^N(t))) = (k_N f_{n_k})(\mu_k^N(t))$ für alle hinreichend großen k und alle $t \in [0,\infty)$. Daher gilt für hinreichend großes k wegen (1.1.8e) und (1.4.1)

$$\begin{aligned}
& \|(k_N f_{n_k})\circ\mu_k^N - (k_N f_{n_{k+1}})\circ\mu_{k+1}^N\|_\infty \\
= \; & \|(k_N f_{n_k})\circ\lambda_k^N\circ\mu_{k+1}^N - (k_N f_{n_{k+1}})\circ\mu_{k+1}^N\|_\infty \\
= \; & \|(k_N f_{n_k})\circ\lambda_k^N - k_N f_{n_{k+1}}\|_\infty \\
\leq \; & 2^{N+1-k}.
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten ist die Folge $((k_N f_{n_k})\circ\mu_k^N)_{k\geq 1}$ eine Cauchy-Folge für die *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf D*, die in natürlicher Weise durch die Metrik $\delta_u(f,g) = \|f-g\|_\infty$ $(f,g \in D)$ definiert wird: Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt für alle hinreichen großen k

$$\delta_u((k_N f_{n_k})\circ\mu_k^N, (k_N f_{n_{k+1}})\circ\mu_{k+1}^N) = \|(k_N f_{n_k})\circ\mu_k^N - (k_N f_{n_{k+1}})\circ\mu_{k+1}^N\|_\infty < \epsilon,$$

was aufgrund der Dreiecksungleichung für δ_u die Behauptung impliziert. Wegen des Cauchy-Kriteriums der gleichmäßigen Konvergenz konvergiert jede Cauchy-Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf D gleichmäßig gegen eine Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$. Damit D vollständig unter δ_u ist, muss sogar $g \in D$ gelten. Aufgrund des Satzes 104.1 in [H] ist g aber rechtsseitig stetig auf $[0,\infty)$ und besitzt linksseitige Limiten für jedes $t \in (0,\infty)$: Sei $t' \in [0,\infty)$ beliebig. Da $\lim\limits_{t\downarrow t'} g_n(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert und mit $g_n(t')$ übereinstimmt, folgt

$$\lim_{t\downarrow t'} g(t) = \lim_{t\downarrow t'}\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\downarrow t'} g_n(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t') = g(t'),$$

das heißt g ist rechtsseitig stetig. Die Existenz der linksseitigen Limiten folgt analog. $((k_N f_{n_k})\circ\mu_k^N)_{k\geq 1}$ konvergiert also bezüglich δ_u gegen einen Grenzwert $\gamma_N \in D$. Insbesondere gilt für alle hinreichend großen k

$$\|(k_N f_{n_k})\circ\mu_k^N - \gamma_N\|_\infty \leq 2^{N+2-k}. \tag{1.4.6}$$

Nun hat man $\|(k_N f_{n_k})\circ\mu_k^N-\gamma_N\|_\infty = \|(k_N f_{n_k})-\gamma_N\circ(\mu_k^N)^{-1}\|_\infty$, und wegen

$$\|(\mu_k^N)^{-1}-I\|_{\tilde N} \underset{(1.1.8)}{\leq} \tilde N\cdot(e^{\ell(\mu_k^N)}-1) \underset{(1.4.4)}{\leq} \tilde N\cdot(e^{2^{N+2-k}}-1) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

für alle $\tilde N\in\mathbb{N}^*$ gilt

$$\delta_{lu}((\mu_k^N)^{-1},I) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

$((\mu_k^N)^{-1})_{k\geq 0}$ konvergiert also lokal gleichmäßig gegen die Identität auf $[0,\infty)$. Sei jetzt $t\notin J(\gamma_N)$ und $\epsilon>0$. Dann gibt es ein $\delta>0$, so dass $|\gamma_N(s)-\gamma_N(t)|<\epsilon$ für alle s mit $|s-t|<\delta$ erfüllt ist. Wählt man nun ein $\tilde N\in\mathbb{N}^*$ derart, dass $t\leq\tilde N$ gilt, dann liefert die lokal gleichmäßige Konvergenz die Existenz eines k_1, so dass $\|(\mu_k^N)^{-1}-I\|_{\tilde N}<\delta$, also insbesondere $|(\mu_k^N)^{-1}(t)-t|<\delta$, für alle $k\geq k_1$ gilt. Insgesamt hat man $|\gamma_N((\mu_k^N)^{-1}(t))-\gamma_N(t)|<\epsilon$ für alle $k\geq k_1$, das heißt $\gamma_N((\mu_k^N)^{-1}(t))\to\gamma_N(t)$ $(k\to\infty)$ für alle $t\notin J(\gamma_N)$. Dann gilt aber auch

$$(k_N f_{n_k})(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} \gamma_N(t) \text{ für alle } t\notin J(\gamma_N), \tag{1.4.7}$$

wie man leicht sieht: Sei $t\notin J(\gamma_N)$. Zu beliebigem $\epsilon>0$ wähle k_2 so groß, dass $|\gamma_N((\mu_k^N)^{-1}(t))-\gamma_N(t)|<\epsilon$ und im Hinblick auf (1.4.6) und die Bemerkung danach $|k_N f_{n_k}(t)-\gamma_N((\mu_k^N)^{-1}(t))|\leq 2^{N+2-k}$ für alle $k\geq k_2$ erfüllt sind. Dies impliziert

$$\begin{aligned}|(k_N f_{n_k})(t)-\gamma_N(t)| &\leq |(k_N f_{n_k})(t)-\gamma_N((\mu_k^N)^{-1}(t))|+|\gamma_N((\mu_k^N)^{-1}(t))-\gamma_N(t)|\\ &< 2^{N+2-k}+\epsilon\end{aligned}$$

für alle $k\geq k_2$, und daher folgt (1.4.7). Betrachtet man schließlich die Menge $R:=\mathbb{R}_0^+\setminus\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}^*}J(\gamma_N)\right)$, so kann man wegen der Abzählbarkeit von $\bigcup_{N\in\mathbb{N}^*}J(\gamma_N)$ für jedes beliebige $t\in\bigcup_{N\in\mathbb{N}^*}J(\gamma_N)$ eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus R mit $t_n\to t$ $(n\to\infty)$ finden. Mit anderen Worten liegen in jeder offenen ϵ-Umgebung von t unendlich viele Elemente der Menge R, das heißt R ist dicht in $\mathbb{R}_0^+$. Deshalb folgt aus (1.4.7) die Existenz einer Funktion $f'\in D$, so dass jedes γ_N die Form $\gamma_N=k_N f'$ besitzt. Wählt man nun erneut $N\in\mathbb{N}^*$ beliebig und k_3 so groß, dass für alle $k\geq k_3$ (1.4.6) gilt, dann erhält man für alle $k\geq k_3$ wegen (1.4.4) und (1.4.6)

$$\begin{aligned}0\leq\delta_N(f_{n_k},f') &\leq \ell(\mu_k^N)+\|(k_N f_{n_k})\circ\mu_k^N-k_N f'\|_\infty\\ &\leq 2^{N+2-k}+2^{N+2-k}\\ &= 2^{N+3-k}\xrightarrow[k\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Es folgt also $\delta_N(f_{n_k},f')\to 0$ $(k\to\infty)$ für alle $N\in\mathbb{N}^*$ und damit $\delta(f_{n_k},f')\to 0$ $(k\to\infty)$, was den Beweis vervollständigt. □

Beweis. (von Satz 1.1.14)
Wähle $0 = t_0 < \ldots < t_r = N$ derart, dass $t_i - t_{i-1} \geq \theta$ für alle $1 \leq i < r$. Falls $t_i - t_{i-1} > 2\theta$ für irgendein $1 \leq i \leq r$ gilt, kann man das Intervall $[t_{i-1}, t_i)$ weiter aufteilen, indem man $t_{i-1} = s_i^{(0)} < \ldots < s_i^{(p)} = t_i$ so wählt, dass im Fall $1 \leq i < r$ für alle $1 \leq k \leq p$ die Ungleichung $\theta \leq s_i^{(k)} - s_i^{(k-1)} \leq 2\theta$ und andernfalls sowohl $\theta \leq s_r^{(k)} - s_r^{(k-1)} \leq 2\theta$ für alle $1 \leq k \leq p-1$ als auch $s_r^{(p)} - s_r^{(p-1)} \leq 2\theta$ erfüllt sind. Da $w(f, [s_i^{(k-1)}, s_i^{(k)})) \leq w(f, [t_{i-1}, t_i))$ für alle $1 \leq k \leq p$ gilt, folgt im Hinblick auf die Definition von $w_N(f, \theta)$ die Behauptung. $\square$

Beweis. (von Satz 1.1.15)
Seien zunächst $f \in D$, $N \in \mathbb{N}^*$ und $\epsilon > 0$. Dass (1.1.11a) gilt, ist klar. Um nun die Gültigkeit von (1.1.11b) zu beweisen, betrachte die durch

$$s_0 = 0,\ s_{n+1} = \inf\left\{t > s_n : |f(t) - f(s_n)| > \frac{\epsilon}{2}\right\} \quad (n \geq 0)$$

definierte Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\inf \varnothing := \infty$. Da f eine càdlàg-Funktion ist, ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge, die gegen ∞ konvergiert. Es gibt daher ein $p \in \mathbb{N}$ mit $s_p \leq N < s_{p+1}$. Außerdem gilt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w(f, [s_i, s_{i+1})) &= \sup_{s,t\in [s_i,s_{i+1})} |f(s) - f(t)| \\ &\leq \sup_{s\in [s_i,s_{i+1})} |f(s) - f(s_i)| + \sup_{t\in [s_i,s_{i+1})} |f(t) - f(s_i)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Ungleichung wegen $s_{i+1} = \inf\left\{\tilde{t} > s_i : |f(\tilde{t}) - f(s_i)| > \frac{\epsilon}{2}\right\}$ ergibt. Man erhält daher im Fall $\theta \leq \inf_{i\leq p}(s_i - s_{i-1})$ die Gültigkeit von $w_N(f, \theta) \leq \epsilon$: Sei dazu

$$s_i' := \begin{cases} s_i, & 0 \leq i \leq p \\ N, & i = p+1 \quad (\text{falls } s_p \neq N). \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} w_N(f, \theta) &= \inf\left\{\max_{i\leq r} w(f, [t_{i-1}, t_i)) : 0 = t_0 < \ldots < t_r = N, \inf_{i<r}(t_i - t_{i-1}) \geq \theta\right\} \\ &\leq \max_{i\leq p+1} w(f, [s_{i-1}', s_i')) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Hinrichtung bewiesen.

Es werde nun angenommen, dass (1.1.11a) und (1.1.11b) für eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ und alle $N \in \mathbb{N}^*$ erfüllt seien, und dass f nicht in D liege. Da eine Funktion f mit Werten in $\mathbb{R}^d$ genau dann rechtsseitig stetig ist, wenn alle Komponentenfunktionen $f^i, 1 \leq i \leq d$, rechtsseitig stetig sind, muss es ein

$t \in [0, \infty)$ und eine ganze Zahl $1 \leq i \leq d$ geben, so dass die i-te Komponentenfunktion f^i entweder keinen reellen linksseitigen Limes in t besitzt (falls $t \neq 0$ gilt) oder in t nicht rechtsseitig stetig ist. Die beiden möglichen Fälle werden getrennt behandelt:

Existiert kein reeller linksseitiger Limes von f^i in t, so gilt

$$\lim_{s\uparrow t}|f^i(s)| = \infty \quad \text{oder} \quad a := \varliminf_{s\uparrow t} f^i(s) < \varlimsup_{s\uparrow t} f^i(s) =: b.$$

Sei zunächst $\lim_{s\uparrow t}|f^i(s)| = \infty$. Aufgrund der Gültigkeit von (1.1.11a) existiert für $N := [t] + 1$ ein $M < \infty$ mit $\|f\|_N = M$, und wegen

$$\sup_{s<t} |f^i(s)| \leq \sup_{s<t} |f(s)| \leq \sup_{s\leq N} |f(s)| = M < \infty$$

erhält man einen Widerspruch. Gelte nun $a < b$. Für alle $u, v \in [0, \infty)$ mit $u < t \leq v$ gilt $w(f, [u, v)) \geq b - a > 0$, da

$$\begin{aligned} w(f, [u, v)) &= \sup_{s,s' \in [u,v)} |f(s) - f(s')| \\ &\geq |f(s) - f(s')| \text{ für beliebige } s, s' \in [u, v) \\ &\geq |f^i(s) - f^i(s')| \text{ für beliebige } s, s' \in [u, v). \end{aligned}$$

Daraus folgt $w_N(f, \theta) \geq b - a > 0$ für alle $N \geq t$ und $\theta > 0$, was im Widerspruch zu (1.1.11b) steht.

Im zweiten Fall existiert entweder kein reeller rechtsseitiger Limes von f^i in t, oder er existiert zwar, stimmt aber nicht mit $f^i(t)$ überein, das heißt es gilt

$$a' := \lim_{s\downarrow t} f^i(s) > f^i(t) =: b'$$

oder $a' < b'$. Im Fall $\begin{Bmatrix} a' > b' \\ a' < b' \end{Bmatrix}$ gilt für alle $u, v \in [0, \infty)$ mit $u \leq t < v$ aufgrund des gleichen Arguments wie oben $\begin{Bmatrix} w(f, [u, v)) \geq a' - b' \\ w(f, [u, v)) \geq b' - a' \end{Bmatrix}$. Daraus folgt $\begin{Bmatrix} w_N(f, \theta) \geq a' - b' \\ w_N(f, \theta) \geq b' - a' \end{Bmatrix}$ für alle $N > t$ und $\theta > 0$, was im Widerspruch zu (1.1.11b) steht. Falls kein reeller rechtsseitiger Limes von f^i in t existiert, erhält man wie folgt einen Widerspruch: Im Fall

$$a'' := \varliminf_{s\downarrow t} f^i(s) < \varlimsup_{s\downarrow t} f^i(s) =: b''$$

verfährt man ebenso wie gerade beschrieben, während sich im Fall $\lim_{s\downarrow t}|f^i(s)| = \infty$ mit $N := [t] + 1$ wegen $\|f^i\|_N \leq \|f\|_N < \infty$ sofort ein Widerspruch ergibt, wobei die letzte Ungleichung aus (1.1.11a) folgt. $\square$

Beweis. (von Korollar 1.1.17)
Zu zeigen ist, dass D eine dichte, abzählbare Teilmenge enthält. Diese Menge wird im Folgenden konstruiert: Seien $f \in D$ und $N \in \mathbb{N}^*$ mit $N \geq 2$. Mittels Satz 1.1.15 ergibt sich die Existenz eines $p \in \mathbb{N}^*$ mit $\|f\|_{N+3} \leq p$ und eines $k \in \mathbb{N}^*$ mit $k \geq N^2$ und $w_{N+3}\left(f, \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$. Dann impliziert Lemma 1.1.16 mit $\theta := p$ die Existenz eines $g \in \mathfrak{A}(N+3, p, k^2)$ mit $\delta_{N'}(f,g) \leq \frac{6}{k}$ für alle $N' \leq N$. Es folgt

$$\begin{aligned} \delta(f,g) &= \sum_{N' \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^{N'}} \cdot (1 \wedge \delta_{N'}(f,g)) \\ &= \sum_{1 \leq N' \leq N} \frac{1}{2^{N'}} \cdot (1 \wedge \delta_{N'}(f,g)) + \sum_{N' \geq N+1} \frac{1}{2^{N'}} \cdot (1 \wedge \delta_{N'}(f,g)) \\ &\leq N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{k} + \sum_{N' \geq N+1} \frac{1}{2^{N'}} \qquad (1.4.8) \\ &\underset{(*)}{\leq} \frac{6N}{k} + \frac{1}{2^N} \underset{k \geq N^2}{\leq} \frac{6}{N} + \frac{1}{2^N}. \end{aligned}$$

Dabei kann man $(*)$ mittels Induktion beweisen: Sei $N = 2$. Dann gilt

$$\sum_{N' \geq 3} \frac{1}{2^{N'}} = \sum_{N' \geq 0} \frac{1}{2^{N'}} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}.$$

Gelte nun $\sum_{N' \geq N+1} \frac{1}{2^{N'}} \leq \frac{1}{2^N}$ für ein beliebiges $N \geq 2$. Es folgt

$$\sum_{N' \geq N+2} \frac{1}{2^{N'}} = \sum_{N' \geq N+1} \frac{1}{2^{N'}} - \frac{1}{2^{N+1}} \leq \frac{1}{2^N} - \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2^{N+1}},$$

was die Induktion abschließt. Da N beliebig groß gewählt werden kann, ist die abzählbare Menge

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\substack{N' \in \mathbb{N}^* \\ k' \in \mathbb{N}^* \\ p' \in \mathbb{N}^*}} \mathfrak{A}\left(N' + 3, p', (k')^2\right)$$

eine dichte Teilmenge von D, wie man leicht sieht: Sei erneut $f \in D$. Es ist zu zeigen, dass f Berührungspunkt von $\mathfrak{A}$ ist. Wählt man $\epsilon > 0$ beliebig, so muss es also ein $g \in \mathfrak{A}$ mit $\delta(f,g) < \epsilon$ geben. Sei dazu $N \in \mathbb{N}^*$ mit $N \geq 2$ derart, dass $\frac{6}{N} + \frac{1}{2^N} < \epsilon$ gilt. Dann gibt es gemäß (1.4.8) ein $k \in \mathbb{N}^*$ mit $k \geq N^2$, ein $p \in \mathbb{N}^*$ und ein $g \in \mathfrak{A}(N+3, p, k^2) \subset \mathfrak{A}$ mit $\delta(f,g) \leq \frac{6}{N} + \frac{1}{2^N} < \epsilon$, was die Behauptung impliziert. $\square$

Beweis. (von Korollar 1.1.19)
Gemäß Satz 1.1.12 ist D vollständig unter δ, das heißt eine Folge von Elementen aus D konvergiert genau dann gegen ein Element aus D, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. D ist also abgeschlossen, daher gilt $\overline{A} \subset D$ und $\overline{A}$ ist ebenfalls vollständig. Aus einem Satz in [Bi] (Appendix I, S.217) folgt nun, dass $\overline{A}$ genau dann kompakt ist, wenn $\overline{A}$ vollständig und A total beschränkt ist. (A heißt *total beschränkt*, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Menge $A_\epsilon \subset D$ gibt derart, dass für jedes $f \in A$ ein $f_k \in A_\epsilon$ existiert mit $\delta(f, f_k) < \epsilon$.) Es reicht also zu zeigen, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von A, bestehend aus offenen Kugeln mit Radius ϵ, existiert, da man dann A_ϵ als die Menge aller Kugelmittelpunkte wählen kann. Seien dazu $\epsilon > 0$ fest gewählt und $N \in \mathbb{N}^*$ mit $N \geq 2$ derart, dass $\frac{6}{N} + \frac{1}{2^N} < \epsilon$. Wegen (1.1.12a) gibt es ein $p \in \mathbb{N}^*$ mit $\|f\|_{N+3} \leq p$ für alle $f \in A$, und aus (1.1.12b) folgt die Existenz eines $k \in \mathbb{N}^*$ mit $k \geq N^2$ und $w_{N+3}\left(f, \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$ für alle $f \in A$. Lemma 1.1.16 impliziert nun, dass für jedes $f \in A$ ein $g \in \mathfrak{A}(N+3, p, k^2)$ existiert, so dass $\delta_{N'}(f, g) \leq \frac{6}{k}$ für alle $N' \leq N$ und somit $\delta(f, g) \leq \frac{6}{N} + \frac{1}{2^N} < \epsilon$ gilt (vergleiche den Beweis von Korollar 1.1.17). Anders ausgedrückt, wird die Menge A überdeckt von offenen Kugeln mit Radius ϵ, deren Mittelpunkte in $\mathfrak{A}(N+3, p, k^2)$ liegen. Da $\mathfrak{A}(N+3, p, k^2)$ eine endliche Teilmenge von D ist, folgt die Behauptung. $\square$

Beweis. (von Lemma 1.1.20)
Die Gültigkeit von (1.1.3) impliziert

$$\|\lambda_n^{-1} - I\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ und } \|f_n - f \circ \lambda_n^{-1}\|_N \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ für alle } N \in \mathbb{N}^*, \tag{1.4.9}$$

denn: Die erste Behauptung ist trivial. Sei also $N \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Da insbesondere $\|\lambda_n^{-1} - I\|_N \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, gibt es ein n_0, so dass $\lambda_n^{-1}(s) - s < 1$ (und somit $\lambda_n^{-1}(s) < N+1$) für alle $s \leq N$ und $n \geq n_0$ erfüllt ist. Für $n \geq n_0$ erhält man folglich

$$\|f_n - f \circ \lambda_n^{-1}\|_N = \|f_n \circ \lambda_n \circ \lambda_n^{-1} - f \circ \lambda_n^{-1}\|_N \leq \sup_{t \leq N+1} |f_n(\lambda_n(t)) - f(t)|,$$

und das konvergiert nach Voraussetzung gegen 0. Sei nun $t \notin J(f)$ und wähle $N \in \mathbb{N}^*$ beliebig mit $t \leq N$. Dann gibt es aufgrund des ϵ-δ-Kriteriums der Stetigkeit für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $s \in [0, \infty)$ mit $|s - t| < \delta$ $|f(s) - f(t)| < \epsilon$ gilt. Wegen (1.4.9) weiß man außerdem, dass für alle $\delta > 0$ ein n_1 existiert mit $|\lambda_n^{-1}(t) - t| < \delta$ für alle $n \geq n_1$, und dass es für alle $\epsilon > 0$ ein n_2 gibt, so dass $\|f_n - f \circ \lambda_n^{-1}\|_N < \epsilon$ für alle $n \geq n_2$ gilt. Seien nun $\epsilon > 0$ beliebig und dazu $\delta > 0$, n_1 und n_2 wie soeben beschrieben gewählt. Sei $n_3 := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt für alle $n \geq n_3$ sowohl $|f(\lambda_n^{-1}(t)) - f(t)| < \epsilon$, da $|\lambda_n^{-1}(t) - t| < \delta$, als auch $|f_n(t) - f(t)| \leq |f_n(t) - f(\lambda_n^{-1}(t))| + |f(\lambda_n^{-1}(t)) - f(t)| < 2\epsilon$, da $t \leq N$. Man hat also $f(\lambda_n^{-1}(t)) \to f(t)$ $(n \to \infty)$ und daher $f_n(t) \to f(t)$ $(n \to \infty)$ für alle $t \notin J(f)$. Die Funktion f ist somit das einzige Element aus D, für das

$\delta(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ überhaupt möglich ist. Gäbe es nämlich ein $\tilde{f} \neq f \in D$ mit $\delta(f_n, \tilde{f}) \to 0$ $(n \to \infty)$, so würde aufgrund von Lemma 1.1.9 eine Folge $(\tilde{\lambda}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus Λ existieren, die (1.1.3) für $\tilde{f}$ erfüllt, was in Analogie zum eben Gezeigten $f_n(t) \to \tilde{f}(t)$ $(n \to \infty)$ für alle $t \notin J(\tilde{f})$ implizieren würde. Für $t \notin (J(f) \cup J(\tilde{f}))$ wäre also $f(t) = \tilde{f}(t)$ unmittelbar klar. Für $t \in (J(f) \cup J(\tilde{f}))$ könnte man aufgrund der Abzählbarkeit der Menge $J(f) \cup J(\tilde{f})$ eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(J(f) \cup J(\tilde{f}))^c$ mit $t_n \downarrow t$ finden, was wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von f und $\tilde{f}$ zu $f(t) = \tilde{f}(t)$ führen würde, was im Widerspruch zu $f \neq \tilde{f}$ stünde.

Es muss also nur noch gezeigt werden, dass die Menge $A := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt ist. Im Hinblick auf Korollar 1.1.19 genügt es dafür aber zu zeigen, dass A die Bedingung (1.1.12) erfüllt. Seien dazu $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Da f in D liegt, gilt wegen Satz 1.1.15 $\|f\|_{N+1} < \infty$ und $w_{N+1}(f, \theta) \leq \epsilon$ für ein $\theta \in (0, 1)$. Außerdem impliziert (1.1.3) die Existenz einer ganzen Zahl n_4 derart, dass $\|\lambda_n - I\|_\infty \leq \frac{\theta}{4}$, $\|\lambda_n - I\|_{N+1} < 1$ und $\|f_n \circ \lambda_n - f\|_{N+1} \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_4$ erfüllt sind. Es folgt $\lambda_n(N+1) > N$ für alle $n \geq n_4$, und zusammen ergibt sich

$$\|f_n\|_N \leq \|f_n \circ \lambda_n\|_{N+1} \leq \|f_n \circ \lambda_n - f\|_{N+1} + \|f\|_{N+1} \leq \epsilon + \|f\|_{N+1} < \infty$$

für alle $n \geq n_4$. Wegen $f_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ liefert Satz 1.1.15 ferner $\|f_n\|_N < \infty$ für alle $n < n_4$. Insgesamt folgt also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_N < \infty,$$

das heißt die Menge A erfüllt (1.1.12a). Da wie oben gezeigt $w_{N+1}(f, \theta) \leq \epsilon$ für ein $\theta \in (0, 1)$ gilt, gibt es nach Definition eine Unterteilung $0 = t_0 < \ldots < t_p = N+1$ des Intervalls $[0, N+1]$ mit $t_i - t_{i-1} \geq \theta$ für alle $1 \leq i < p$ und $w(f, [t_i, t_{i+1})) \leq 2\epsilon$ für alle $0 \leq i < p$. Setzt man nun $s_i^n := \lambda_n(t_i)$, dann erhält man für alle $1 \leq i < p$ und $n \geq n_4$

$$\begin{aligned} & s_i^n - s_{i-1}^n \\ = \; & |\lambda_n(t_i) - \lambda_n(t_{i-1})| \quad (\lambda_n \text{ streng monoton wachsend}) \\ \geq \; & |t_i - t_{i-1}| - |\lambda_n(t_i) - t_i| - |\lambda_n(t_{i-1}) - t_{i-1}| \\ \geq \; & \theta - \frac{\theta}{4} - \frac{\theta}{4} = \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

und ferner $s_p^n \geq N$ für alle hinreichend großen n, was man sofort sieht: Es gilt $t_p = N+1$ und somit $s_p^n = \lambda_n(t_p) > N$ für alle $n \geq n_4$. Außerdem hat man für alle $0 \leq i < p$ und $n \geq n_4$ unter Beachtung von $0 \leq t_i, t_{i+1} \leq N+1$ und $\|f_n \circ \lambda_n - f\|_{N+1} \leq \epsilon$

$$\begin{aligned} w(f_n, [s_i^n, s_{i+1}^n)) &= \sup_{s,t\in[t_i,t_{i+1})} |f_n(\lambda_n(s)) - f_n(\lambda_n(t))| \\ &\leq \sup_{s\in[t_i,t_{i+1})} |f_n(\lambda_n(s)) - f(s)| + \sup_{s,t\in[t_i,t_{i+1})} |f(s) - f(t)| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sup_{t \in [t_i, t_{i+1})} |f_n(\lambda_n(t)) - f(t)| \\
\leq\ & \epsilon + 2\epsilon + \epsilon = 4\epsilon.
\end{aligned}
$$

Zusammen folgt für alle $n \geq n_4$

$$
w_N\left(f_n, \frac{\theta}{2}\right) \leq 4\epsilon. \tag{1.4.10}
$$

Wegen $f_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert Satz 1.1.15 insbesondere $w_N(f_n, \rho) \to 0$ $(\rho \to 0)$ für alle $n < n_4$. Für alle $n < n_4$ und $\epsilon > 0$ wie oben existiert folglich ein $\delta(n) > 0$, so dass $w_N(f_n, \rho) < \epsilon$ für alle ρ mit $|\rho| < \delta(n)$ gilt. Wähle nun $\delta' := \min\{\delta(n) : n < n_4\}$. Dann erhält man $w_N(f_n, \rho) < \epsilon$ für alle $n < n_4$ und ρ mit $|\rho| < \delta'$, was

$$
\sup_{n < n_4} w_N(f_n, \rho) < \epsilon
$$

für alle ρ mit $|\rho| < \delta'$ impliziert. Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, gilt also

$$
\lim_{\rho \to 0} \sup_{n < n_4} w_N(f_n, \rho) = 0,
$$

daher gibt es im Hinblick auf (1.4.10) ein $\theta' \in \left(0, \frac{\theta}{2}\right]$ mit

$$
\sup_{n \in \mathbb{N}} w_N(f_n, \theta') \leq 4\epsilon.
$$

Die Menge A erfüllt also auch (1.1.12b), was den Beweis abschließt. $\square$

Beweis. (von Satz 1.1.21)
Es sei A eine relativ kompakte Teilmenge von D und es werde angenommen, dass (1.1.12) verletzt sei. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}^*$ und eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus A derart, dass entweder $\|f_n\|_N \to \infty$ $(n \to \infty)$ oder $w_N(f_n, \theta) \geq \epsilon$ für alle $\theta > 0$ und ein $\epsilon > 0$ erfüllt ist. Da $\overline{A}$ nach Voraussetzung kompakt ist, enthält die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen ein $f \in \overline{A} \subset D$ konvergiert, man kann also ohne Einschränkung direkt annehmen, dass

$$
f_n \xrightarrow{J_1} f
$$

gilt. Es gibt daher nach Definition der Skorokhod-Topologie eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus Λ, die (1.1.3) erfüllt. Für alle hinreichend großen n gilt also $\|\lambda_n - I\|_\infty \leq 1$ und insbesondere $\|\lambda_n - I\|_{N+1} \leq 1$, so dass analog zum Beweis von Lemma 1.1.20 $\|f_n\|_N \leq \|f\|_{N+1} + \|f_n \circ \lambda_n - f\|_{N+1}$ für diese n folgt. Wegen (1.1.3b) und Satz 1.1.15 ergibt sich dann aber

$$
\lim_{n \to \infty} \|f_n\|_N \leq \|f\|_{N+1} < \infty,
$$

was im Widerspruch zu $\|f_n\|_N \to \infty$ $(n \to \infty)$ steht. Es muss also $w_N(f_n, \theta) \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $\theta > 0$ und ein $\epsilon > 0$ gelten. Da f in D liegt, liefert Satz 1.1.15 die Existenz eines $\theta' \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ mit $w_{N+1}(f, 2\theta') \leq \frac{\epsilon}{6}$, das heißt es gibt eine Unterteilung $0 = s_0 < \ldots < s_p = N+1$ des Intervalls $[0, N+1]$ mit $s_i - s_{i-1} \geq 2\theta'$ für $1 \leq i < p$, $s_{p-1} \geq N - \frac{1}{2}$ und $w(f, [s_i, s_{i+1})) \leq \frac{\epsilon}{3}$ für alle $0 \leq i < p$. Wegen (1.1.3a) gilt ferner $\|\lambda_n - I\|_\infty \leq \frac{\theta'}{2}$ für alle $n \geq n_0$, und wegen (1.1.3b) $\|f_n \circ \lambda_n - f\|_{N+1} \leq \frac{\epsilon}{6}$ für alle $n \geq n_1$ (n_0, n_1 hinreichend groß gewählt). Definiert man nun $t_i^n = \lambda_n(s_i)$, dann folgt für $1 \leq i < p$ und $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
0 \leq t_i^n - t_{i-1}^n &= |\lambda_n(s_i) - \lambda_n(s_{i-1})| \\
&\geq |s_i - s_{i-1}| - |\lambda_n(s_i) - s_i| - |\lambda_n(s_{i-1}) - s_{i-1}| \\
&\geq 2\theta' - \frac{\theta'}{2} - \frac{\theta'}{2} = \theta'
\end{aligned}$$

und $t_{p-1}^n \geq N$. Außerdem erhält man für $0 \leq i < p$ und $n \geq n_1$

$$\begin{aligned}
w\left(f_n, \left[t_i^n, t_{i+1}^n\right)\right) &= \sup_{s,t \in [s_i, s_{i+1})} |f_n(\lambda_n(s)) - f_n(\lambda_n(t))| \\
&\leq \sup_{s \in [s_i, s_{i+1})} |f_n(\lambda_n(s)) - f(s)| + \sup_{s,t \in [s_i, s_{i+1})} |f(s) - f(t)| \\
&\quad + \sup_{t \in [s_i, s_{i+1})} |f_n(\lambda_n(t)) - f(t)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{6} = \frac{2\epsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt für alle $n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$w_N(f_n, \theta') \underset{(*)}{\leq} \max_{i \leq p-1} w\left(f_n, \left[\tilde{t}_{i-1}^n, \tilde{t}_i^n\right)\right) \leq \frac{2\epsilon}{3},$$

was im Widerspruch zu $w_N(f_n, \theta) \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\theta > 0$ steht. Dabei erhält man $(*)$, indem man $\tilde{t}_i^n := t_i^n$ für $0 \leq i < p-1$ und $\tilde{t}_{p-1}^n := N$ wählt. (Falls $t_{i'}^n \geq N$ für ein $0 \leq i' < p-1$ gilt, setze $\tilde{t}_{i'}^n = N$ und breche dann ab.) Es folgt die Behauptung. □

Beweis. (von Satz 1.1.22)

(a) Es gelte $\delta_{lu}(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$. Wählt man dann $\lambda_n = I \in \Lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist (1.1.3) erfüllt und es folgt die Behauptung.

(b) Die Rückrichtung folgt unmittelbar aus (a). Gelte also $f_n \xrightarrow{J_1} f$ und wähle $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Λ derart, dass (1.1.3) erfüllt ist. Aufgrund der Dreiecksungleichung ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [0, \infty)$

$$|f_n(t) - f(t)| \leq |f_n(\lambda_n(\lambda_n^{-1}(t))) - f(\lambda_n^{-1}(t))| + |f(\lambda_n^{-1}(t)) - f(t)|. \quad (1.4.11)$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Da f als stetige Funktion auf allen beschränkten, abgeschlossenen Intervallen gleichmäßig stetig ist, folgt aus (1.1.3a)

$\|f \circ \lambda_n^{-1} - f\|_N \to 0$ $(n \to \infty)$, denn: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(s) - f(t)| < \epsilon$ für alle $s, t \in [0, N+1]$ mit $|s-t| < \delta$ erfüllt ist. Für dieses δ existiert ein n_0, so dass $\|\lambda_n^{-1} - I\|_\infty < \delta$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Beachtet man ferner $\|\lambda_n^{-1} - I\|_N < 1$ für alle $n \geq n_1$ (n_1 hinreichend groß), so folgt wegen $\lambda_n^{-1}(s) < s+1 \leq N+1$ für alle $s \leq N$ und $n \geq n_1$ die Gültigkeit von $|f(\lambda_n^{-1}(s)) - f(s)| < \epsilon$ für alle $s \leq N$ und $n \geq n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Es folgt wie behauptet $\|f \circ \lambda_n^{-1} - f\|_N \to 0$ $(n \to \infty)$. Außerdem ergibt sich sofort $\|f_n \circ \lambda_n \circ \lambda_n^{-1} - f \circ \lambda_n^{-1}\|_N \leq \|f_n \circ \lambda_n - f\|_{N+1}$ für alle $n \geq n_1$, und das konvergiert wegen (1.1.3b) für $n \to \infty$ gegen 0. Dann erhält man aber im Hinblick auf (1.4.11)

$$0 \leq \|f_n - f\|_N \leq \|f_n \circ \lambda_n \circ \lambda_n^{-1} - f \circ \lambda_n^{-1}\|_N + \|f \circ \lambda_n^{-1} - f\|_N \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

was $\delta_{lu}(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ impliziert, da $N \in \mathbb{N}^*$ beliebig gewählt war. Damit ist auch die Hinrichtung bewiesen.

□

Beweis. (von Satz 1.1.23)
Bewiesen wird nur Teil (b). Sei dazu $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus Λ, die (1.1.3) für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt. Dann erfüllt $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch für $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingung (1.1.3), denn: Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Die Dreiecksungleichung liefert $|g_n(\lambda_n(t)) - g(t)| \leq |g_n(\lambda_n(t)) - g(\lambda_n(t))| + |g(\lambda_n(t)) - g(t)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0, \infty)$. Es ergibt sich

$$\|g_n \circ \lambda_n - g\|_N \leq \|g_n \circ \lambda_n - g \circ \lambda_n\|_N + \|g \circ \lambda_n - g\|_N \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

was man wie folgt sieht: Gemäß Satz 1.1.22 gilt $\delta_{lu}(g_n, g) \to 0$ $(n \to \infty)$, insbesondere hat man also $\|g_n - g\|_{N+1} \to 0$ $(n \to \infty)$. (1.1.3a) liefert die Existenz eines n_0 mit $\|\lambda_n - I\|_N \leq 1$ und somit $\lambda_n(s) \leq N+1$ für alle $n \geq n_0$ und $s \leq N$. Daher folgt $\|g_n \circ \lambda_n - g \circ \lambda_n\|_N \leq \|g_n - g\|_{N+1} \to 0$ $(n \to \infty)$. Um auch die Konvergenz des zweiten Summanden gegen 0 begründen zu können, beachte man, dass g als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[0, N+1]$ sogar gleichmäßig stetig ist. Wählt man also $\epsilon > 0$ beliebig, so ergibt sich die Existenz eines $\delta > 0$ derart, dass $|g(s) - g(t)| < \epsilon$ für alle $s, t \in [0, N+1]$ mit $|s - t| < \delta$ gilt. Wegen (1.1.3a) gibt es aber ein n_1, so dass $\|\lambda_n - I\|_\infty < \delta$ für alle $n \geq n_1$ erfüllt ist. Die Gültigkeit von $\|\lambda_n - I\|_N \leq 1$ für alle $n \geq n_2$ (n_2 hinreichend groß) liefert schließlich $\|g \circ \lambda_n - g\|_N \leq \epsilon$ für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ und somit $\|g \circ \lambda_n - g\|_N \to 0$. Damit ist gezeigt, dass $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch für $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingung (1.1.3) erfüllt. Dann folgt aber unmittelbar die Behauptung, da wegen

$$\|(f_n + g_n) \circ \lambda_n - (f+g)\|_N \leq \|f_n \circ \lambda_n - f\|_N + \|g_n \circ \lambda_n - g\|_N \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

für alle $N \in \mathbb{N}^*$ auch für $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingung (1.1.3) gilt. □

Beweis. (von Satz 1.2.11)
Die erste Behauptung folgt sofort aus Satz 1.2.8(a), wenn man die Funktion $h : D \to D$ durch $h(g) = g + f$ definiert. (Wegen Satz 1.1.23(b) ist h sogar stetig.) Die zweite Behauptung soll hier nicht bewiesen werden. □

Beweis. (von Satz 1.3.2)
Zunächst wird gezeigt, warum die Bedingung (ii) hinreichend ist für $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$ (vgl. dazu [Bi], S.123ff). Sei also $T \subset [0, \infty)$ dicht mit

$$X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}(T)} X$$

und sei $\{\mathfrak{L}(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt. Wegen Theorem 2.3 aus [Bi] genügt es zu zeigen, dass jede Teilfolge von $(\mathfrak{L}(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge enthält, die schwach gegen $\mathfrak{L}(X)$ konvergiert. Sei also eine beliebige Teilfolge von $(\mathfrak{L}(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Aufgrund der relativen Kompaktheit von $\{\mathfrak{L}(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$ besitzt diese eine weitere Teilfolge $(\mathfrak{L}(X^{n_l}))_{l\in\mathbb{N}}$, die schwach gegen ein $Q \in \overline{\{\mathfrak{L}(X^n) : n \in \mathbb{N}\}}$ konvergiert. Zu zeigen bleibt $\mathfrak{L}(X) = Q$. Da Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(D, \mathfrak{D})$ ist, wobei $\mathfrak{D}$ die Borelsche σ-Algebra über D bezeichnet, existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ und eine Abbildung $Y : (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{A}}) \to (D, \mathfrak{D})$ mit $\tilde{\mathbb{P}}^Y = \mathfrak{L}(Y) = Q$. Betrachte

$$T_{\tilde{\mathbb{P}}^Y} = \Big\{ t \in [0, \infty) : \tilde{\mathbb{P}}^Y(\{f \in D : f \text{ ist unstetig in } t\}) = 0 \Big\}.$$

$T_{\tilde{\mathbb{P}}^Y}$ ist das Komplement der abzählbaren Menge $J(Y)$ aus (1.2.2) in $[0, \infty)$. Folglich ist der Schnitt von $T_{\tilde{\mathbb{P}}^Y}$ mit der dichten Teilmenge $T \subset [0, \infty)$, $T' = T_{\tilde{\mathbb{P}}^Y} \cap T$, dicht in $[0, \infty)$. Aufgrund von Lemma 1.3.3 genügt es nun, nachzuweisen, dass $\mathfrak{L}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) = \mathfrak{L}(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k})$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$ und alle $t_i \in T'$ $(1 \le i \le k)$ erfüllt ist. Seien also $k \in \mathbb{N}^*$ und $t_1, \ldots, t_k \in T'$ beliebig. Dann gilt wegen (b)

$$(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}) \xrightarrow{\mathfrak{L}} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}).$$

Folglich konvergiert auch jede Teilfolge von $(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k})_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$, insbesondere gilt also

$$(X^{n_l}_{t_1}, \ldots, X^{n_l}_{t_k}) \xrightarrow{\mathfrak{L}} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}).$$

Aufgrund von Theorem 1.3 aus [Bi] ist der Limes einer schwach konvergenten Folge eindeutig bestimmt, daher muss nur noch gezeigt werden, dass

$$(X^{n_l}_{t_1}, \ldots, X^{n_l}_{t_k}) \xrightarrow{\mathfrak{L}} (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k})$$

gilt. Dies geschieht unter Zuhilfenahme von Satz 1.2.5. Im vorliegenden Fall setzt man

$$(E, \mathfrak{E}) = (D, \mathfrak{D}), \ (E', \mathfrak{E}') = (\mathbb{R}^{kd}, \mathfrak{B}^{kd}) \text{ und } h = \pi_{t_1,\ldots,t_k}.$$

Dann ist h messbar, und wegen $\mathfrak{L}(X^{n_l}) \xrightarrow{w} Q$ folgt

$$\mathbb{P}^{\pi_{t_1,\ldots,t_k}\circ X^{n_l}} \xrightarrow{w} \tilde{\mathbb{P}}^{\pi_{t_1,\ldots,t_k}\circ Y} \quad \text{bzw.} \quad (X^{n_l}_{t_1},\ldots,X^{n_l}_{t_k}) \xrightarrow{\mathfrak{L}} (Y_{t_1},\ldots,Y_{t_k})$$

und somit die Behauptung, falls

$$\tilde{\mathbb{P}}^Y(\{f \in D :\ \pi_{t_1,\ldots,t_k} \text{ ist nicht stetig in } f\}) = 0 \tag{1.4.12}$$

gezeigt werden kann. Dem Nachweis von (1.4.12) dient die folgende Behauptung:

(B) Die Abbildung $\pi_{t_1,\ldots,t_k} : D \to \mathbb{R}^{kd}$ ist stetig in genau den Elementen $f \in D$, die ihrerseits stetig in allen t_i $(1 \leq i \leq k)$ sind (vgl. [Bi], S.121).

Begründung der Behauptung:

Sei zunächst $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ stetig in $f \in D$ und wähle ein festes $t_i \in \{t_1,\ldots,t_k\}$. Dann muss zwischen zwei Fällen unterschieden werden: Im Fall $t_i = 0$ ist die Behauptung wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von f in $[0,\infty)$ sofort klar. Der Fall $t_i > 0$ erfordert mehr Mühe: Es werde angenommen, dass f in t_i unstetig sei. Da f in D liegt, ist dies äquivalent dazu, dass f in t_i nicht linksseitig stetig ist. Definiere für $n \in \mathbb{N}^*$ mit $\frac{1}{n} < t_i$ die Funktion $\lambda_n : [0,\infty) \to [0,\infty)$ durch

$$\lambda_n(t) = \frac{t_i - \frac{1}{n}}{t_i} \cdot t.$$

λ_n ist nach Definition stetig und streng monoton wachsend und erfüllt sowohl $\lambda_n(0) = 0$ als auch $\lambda_n(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. Es folgt, dass λ_n zu Λ gehört. Definiert man nun $f_n(t) = f(\lambda_n(t))$ für $t \in [0,\infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}^*$ mit $\frac{1}{n} < t_i$, so gilt

(1) $f_n \xrightarrow{J_1} f$,

(2) $f_n(t_i) \not\to f(t_i)$ für $n \to \infty$,

was einen Widerspruch zur Stetigkeit von $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ darstellt und somit die Hinrichtung beweist. Die Gültigkeit von (1) und (2) sieht man dabei wie folgt: Für den ersten Teil ist $\|\lambda_n^{-1} - I\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ und $\|f_n \circ \lambda_n^{-1} - f\|_N \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle $N \in \mathbb{N}^*$ zu zeigen. Für hinreichend großes n gilt aber

$$\sup_{s<\infty} |\lambda_n(s) - s| = \sup_{s<\infty} \left| \frac{t_i - \frac{1}{n}}{t_i} \cdot s - s \right| = \frac{1}{n} \cdot \sup_{s<\infty} \left| \frac{s}{t_i} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

und somit auch $\|\lambda_n^{-1} - I\|_\infty \to \infty$ $(n \to \infty)$, und wegen $f_n \circ \lambda_n^{-1} = f$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ mit $\frac{1}{n} < t_i$ ist $\|f_n \circ \lambda_n^{-1} - f\|_N \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle $N \in \mathbb{N}^*$ unmittelbar klar. Der zweite Teil folgt sofort, da für hinreichend großes n

$$f_n(t_i) = f\left(\frac{t_i - \frac{1}{n}}{t_i} \cdot t_i\right) = f\underbrace{\left(t_i - \frac{1}{n}\right)}_{\uparrow_{n\to\infty}\, t_i} \not\to f(t_i)$$

gilt, weil f in t_i nicht linksseitig stetig ist.

Jetzt muss nur noch die Rückrichtung von *(B)* bewiesen werden. Sei also $f \in D$ stetig in $t_1, \ldots, t_k$ und wähle eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus D derart, dass

$$f_n \xrightarrow{J_1} f$$

gilt. Es gibt also eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus Λ mit $\|\lambda_n - I\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ und $\|f_n \circ \lambda_n - f\|_N \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle $N \in \mathbb{N}^*$. Zu zeigen ist, dass $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ stetig in f ist, dass also

$$(f_n(t_1), \ldots, f_n(t_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f(t_1), \ldots, f(t_k))$$

gilt. Wähle dazu ein festes $t_i \in \{t_1, \ldots, t_k\}$ und ein $N \in \mathbb{N}^*$ mit $t_i \leq N$. Wegen $\|\lambda_n^{-1} - I\|_N \to 0$ für $n \to \infty$ gibt es ein n_0 mit $\lambda_n^{-1}(t_i) < N + 1$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt

$$|f_n(t_i) - f(t_i)| \leq |f_n(t_i) - f(\lambda_n^{-1}(t_i))| + |f(\lambda_n^{-1}(t_i)) - f(t_i)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

was man bei Betrachtung der beiden Summanden erkennen kann: Für alle $n \geq n_0$ hat man $|f_n(t_i) - f(\lambda_n^{-1}(t_i))| \leq \|f_n \circ \lambda_n - f\|_{N+1}$, und das konvergiert nach Voraussetzung gegen 0. Aus $\|\lambda_n^{-1} - I\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$ folgt $\lambda_n^{-1}(t_i) \to t_i$ für $n \to \infty$, was vermöge der Stetigkeitsvoraussetzung $f(\lambda_n^{-1}(t_i)) \to f(t_i)$ und somit $|f(\lambda_n^{-1}(t_i)) - f(t_i)| \to 0$ für $n \to \infty$ ergibt. Insgesamt folgt $f_n(t_i) \to f(t_i)$ $(n \to \infty)$, was die Begründung abschließt.

Wie bereits erwähnt, dient die soeben bewiesene Behauptung *(B)* dem Nachweis von (1.4.12):

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbb{P}}^Y(\{f \in D:\ \pi_{t_1,\ldots,t_k} \text{ ist nicht stetig in } f\}) \\
= \ & \tilde{\mathbb{P}}^Y(\{f \in D:\ f \text{ ist unstetig in mindestens einem } t_i \in \{t_1, \ldots, t_k\}\}) \\
\leq \ & \sum_{i=1}^k \tilde{\mathbb{P}}^Y(\{f \in D:\ f \text{ ist unstetig in } t_i\}) \ = \ 0,
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit wegen $t_i \in T_{\tilde{\mathbb{P}}^Y}$ für alle $1 \leq i \leq k$ ergibt. Damit ist gezeigt, dass die Bedingung (ii) hinreichend ist für

$$X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X.$$

Es bleibt zu zeigen, warum im Fall $X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X$ notwendigerweise Bedingung (ii) erfüllt ist. Gelte dazu (i), und sei T eine Teilmenge von $T_{\mathbb{P}^X}$, die dicht in $[0, \infty)$ liegt. Dann kann man in Analogie zum ersten Teil des Beweises zeigen, dass

$$X^n \xrightarrow{\mathfrak{L}(T)} X$$

gilt. Die relative Kompaktheit der Menge $\{\mathfrak{L}(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$ folgt sofort, da mit $\mathfrak{L}(X^n) \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(X)$ auch $\mathfrak{L}(X^{n_l}) \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(X)$ für jede Teilfolge $(\mathfrak{L}(X^{n_l}))_{l\in\mathbb{N}}$ von

$(\mathfrak{L}(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt ist. □

Beweis. (von Satz 1.3.7)
Sei zunächst $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ straff. Zu zeigen ist, dass die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind. Sei dazu $\epsilon > 0$. Aufgrund der Definition der Straffheit gibt es eine kompakte Teilmenge K von D mit $\mathbb{P}(X^n \notin K) \leq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien nun $N \in \mathbb{N}^*$ und $\eta > 0$ beliebig. K ist als kompakte Teilmenge von D abgeschlossen, es gilt also $K = \overline{K}$ und somit ist K auch relativ kompakt. Satz 1.1.21 impliziert daher, dass

$$M := \sup_{f\in K} \sup_{t\leq N} |f(t)| \geq 0$$

endlich ist, und dass ein $\theta > 0$ existiert, so dass

$$\sup_{f\in K} w_N(f,\theta) \leq \eta$$

gilt. Daher hat man für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq N} |X_t^n| > M\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq N} |X_t^n| > \sup_{f\in K} \sup_{t\leq N} |f(t)|\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(X^n \notin K\right) \leq \epsilon\end{aligned}$$

und

$$\mathbb{P}\left(w_N(X^n,\theta) > \eta\right) \leq \mathbb{P}\left(X^n \notin K\right) \leq \epsilon.$$

Die Bedingungen (i) und (ii) sind also mit $n_0 := 1$ erfüllt.

Seien nun (i) und (ii) erfüllt. Zu zeigen ist, dass $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann straff ist. Seien dazu $N \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon > 0$ und $\eta > 0$ beliebig und $M' \in [0,\infty)$, $\theta' > 0$ und $n' \in \mathbb{N}^*$ so gewählt, dass (1.3.3) und (1.3.4) für alle $n \geq n'$ gelten. Wähle nun $0 \leq n \leq n'$. Da der Skorokhod-Raum D gemäß Satz 1.1.6 unter der Skorokhod-Topologie polnisch, also insbesondere vollständig und separabel ist, ist $\mathbb{P}^{X^n}$ wegen Theorem 1.4 aus [Bi] straff. Für alle $\epsilon' > 0$ und für alle $0 \leq n \leq n'$ gibt es also eine kompakte Teilmenge $K_{\epsilon',n} \subset D$ derart, dass $\mathbb{P}(X^n \notin K_{\epsilon',n}) \leq \epsilon'$ gilt. Sei nun $\epsilon' > 0$ fest und definiere

$$K_{\epsilon'} := \bigcap_{0\leq n\leq n'} K_{\epsilon',n}.$$

$K_{\epsilon'} \subset D$ ist ebenfalls kompakt und es folgt sofort, dass die endliche Familie $(X^n)_{0\leq n\leq n'}$ straff ist, indem man in der Definition der Straffheit $K := K_{\epsilon'}$ wählt. Analog zum ersten Teil des Beweises kann man zeigen, dass $(X^n)_{0\leq n\leq n'}$ die Bedingungen (i) und (ii) für ein $M'' \in [0,\infty)$, ein $\theta'' > 0$ und $n_0 = 1$ erfüllt. Insgesamt folgt, dass (1.3.3) und (1.3.4) bei Wahl von $M := \max\{M', M''\}$ und $\theta := \min\{\theta', \theta''\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Seien weiterhin $N \in \mathbb{N}^*$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Für alle $k \in \mathbb{N}^*$ findet man wegen des soeben Gezeigten ein $M_{N,\epsilon} \in [0,\infty)$ und ein $\theta_{N,\epsilon,k} > 0$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq N} |X_t^n| > M_{N,\epsilon}\right) \leq \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^N}$$

und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(w_N(X^n,\theta_{N,\epsilon,k}) > \frac{1}{k}\right) \leq \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{1}{2^{N+k}}.$$

Dann erfüllt die Menge

$$A_{N,\epsilon} = \left\{ f\in D : \sup_{t\leq N}|f(t)| \leq M_{N,\epsilon} \text{ und } w_N(f,\theta_{N,\epsilon,k}) \leq \frac{1}{k} \text{ für alle } k\in\mathbb{N}^* \right\}$$

für alle $n\in\mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X^n\notin A_{N,\epsilon}) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{t\leq N}|X_t^n| > M_{N,\epsilon}\right) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}\left(w_N(X^n,\theta_{N,\epsilon,k}) > \frac{1}{k}\right)\\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{1}{2^N} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{1}{2^{N+k}} = \frac{\epsilon}{2^N}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Menge $A_\epsilon = \bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}^*} A_{N,\epsilon}$ der Ungleichung

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X^n\notin A_\epsilon) &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}\left(X^n\in\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}^*}A_{N,\epsilon}\right)^c\right)\\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{N\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}(X^n\notin A_{N,\epsilon})\right)\\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{N\in\mathbb{N}^*}\frac{\epsilon}{2^N}\right) = \epsilon
\end{aligned}$$

genügt. Auf der anderen Seite erfüllt die Menge A_ϵ die Bedingung (1.1.12), was man leicht sieht: Für beliebiges $f\in A_\epsilon$ gilt $f\in A_{N,\epsilon}$ und somit $\|f\|_N \leq M_{N,\epsilon} < \infty$ für alle $N\in\mathbb{N}^*$, man hat also

$$\sup_{f\in A_\epsilon}\|f\|_N < \infty$$

für alle $N\in\mathbb{N}^*$. Ferner ist $w_N(f,\theta_{N,\epsilon,k}) \leq \frac{1}{k}$ für alle $f\in A_\epsilon$, $k\in\mathbb{N}^*$ und $N\in\mathbb{N}^*$ erfüllt, man hat also

$$\sup_{f\in A_\epsilon} w_N(f,\theta_{N,\epsilon,k}) \leq \frac{1}{k}$$

für alle $k\in\mathbb{N}^*$ und alle $N\in\mathbb{N}^*$, was (1.1.12b) impliziert. Gemäß Korollar 1.1.19 ist A_ϵ also relativ kompakt für die Skorokhod-Topologie, das heißt $\overline{A_\epsilon}$ ist kompakt. Wegen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X^n\notin A_\epsilon) \leq \epsilon$$

folgt $\mathbb{P}(X^n\notin\overline{A_\epsilon}) \leq \epsilon$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und somit die Behauptung. □

Beweis. (von Satz 1.3.8)

(a) Der erste Schritt des Beweises besteht darin, einen metrischen Raum S^* mit Metrik ρ^* zu definieren. Sei dazu $S^* = \{\theta\} \cup \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^d \text{ und } 0 \leq t < 1\}$, wobei θ irgendein abstraktes Element bezeichne. Man definiert dann für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ und $0 \leq t_1, t_2 < 1$

$$\rho^*((x_1,t_1),(x_2,t_2)) = \frac{1}{\pi} \cdot \min\{1-t_1, 1-t_2\} \cdot \arctan(|x_1 - x_2|) + |t_1 - t_2|$$

sowie

$$\rho^*((x_1,t_1),\theta) = \rho^*(\theta,(x_1,t_1)) = 1 - t_1 \text{ und } \rho^*(\theta,\theta) = 0.$$

ρ^* ist eine Metrik auf S^*.

(b) Der metrische Raum S^* ist vollständig und separabel unter der Metrik ρ^*.

(c) Es sei $D^* \subset D'(S^*)$ der Raum aller càdlàg-Funktionen auf $[0,1]$ mit Werten in S^*, die zusätzlich die folgende Bedingung erfüllen:

$$f(t) = \begin{cases} (x,t) \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^d & \text{falls } 0 \leq t < 1 \\ \theta & \text{falls } t = 1 \end{cases} \tag{1.4.13}$$

Jedes $f \in D^*$ ist in $t = 1$ linksseitig stetig, da $\lim\limits_{t \uparrow 1} f(t) = \lim\limits_{t \uparrow 1} (x,t) = \theta$.

(d) Auf D^* wird eine Topologie J_1^* eingeführt, die wie folgt charakterisiert wird: Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus D^* konvergiert genau dann in der Topologie J_1^* gegen $f \in D^*$, in Zeichen

$$f_n \xrightarrow{J_1^*} f,$$

wenn es eine Folge $(\lambda_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ von stetigen, streng monoton wachsenden Bijektionen des Intervalls $[0,1]$ auf sich gibt, so dass

$$(i) \qquad \sup_{0 \leq t \leq 1} |\lambda_n^*(t) - t| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \text{ und} \tag{1.4.14a}$$

$$(ii) \qquad \sup_{0 \leq t \leq 1} \rho^*(f_n(t), f(\lambda_n^*(t)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \tag{1.4.14b}$$

$$\text{oder } \sup_{0 \leq t \leq 1} \rho^*(f_n(\lambda_n^*(t)), f(t)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

(e) Es sei $U : D \to D^*$ die Abbildung, die einem $f \in D$ die Funktion $f^* \in D^*$ mit

$$f^*(t) = \begin{cases} \left(f\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right), t\right) & 0 \leq t < 1 \\ \theta & t = 1 \end{cases} \tag{1.4.15}$$

zuordnet. U ist bijektiv.

(f) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\lambda_n \in \Lambda$. Dann definiert man für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0,1)$

$$\lambda_n^*(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan\left(\lambda_n\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right)$$

sowie $\lambda_n^*(1) = 1$. Es ist unmittelbar klar, dass λ_n^* für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion des Intervalls $[0,1]$ auf sich liefert. Sind nun f_n ($n \in \mathbb{N}$) und f Elemente von D, so gilt

$$(\alpha)\ f_n \xrightarrow{J_1} f$$

genau dann, wenn

$$(\beta)\ f_n^* \xrightarrow{J_1^*} f^*$$

erfüllt ist: Es gelte zunächst (α). Dann gibt es wegen Satz 1.1.6 eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus Λ mit $\|\lambda_n - I\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ und $\|f_n \circ \lambda_n - f\|_N \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle $N \in \mathbb{N}^*$. Wähle nun $(\lambda_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ so wie oben definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le 1} |\lambda_n^*(t) - t| &= \sup_{0\le t<1} \left|\frac{2}{\pi} \cdot \arctan\left(\lambda_n\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right) - t\right| \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \sup_{0\le t'<\frac{\pi}{2}} |\arctan(\lambda_n(\tan t')) - t'| \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \sup_{0\le t'<\frac{\pi}{2}} |\arctan(\lambda_n(\tan t')) - \arctan(\tan t')| \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \sup_{0\le t<\infty} |\arctan(\lambda_n(t)) - \arctan t| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

da λ_n auf $[0,\infty)$ gleichmäßig gegen die Identität konvergiert und der Arcustangens stetig ist. Außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le 1} \rho^*(f_n^*(\lambda_n^*(t)), f^*(t)) \\
&= \sup_{0\le t<1} \rho^*\left(\left(f_n\left(\tan\left(\frac{\pi\lambda_n^*(t)}{2}\right)\right), \lambda_n^*(t)\right), \left(f\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right), t\right)\right) \\
&= \sup_{0\le t<1} \rho^*\left(\left(f_n\left(\lambda_n\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right), \lambda_n^*(t)\right), \left(f\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right), t\right)\right) \\
&= \sup_{0\le t<1} \Bigg(|t - \lambda_n^*(t)| + \frac{1}{\pi} \cdot \min\{1-t, 1-\lambda_n^*(t)\} \\
&\qquad\qquad \cdot \arctan\left(\left|f\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) - f_n\left(\lambda_n\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right)\right|\right)\Bigg) \\
&\le \frac{1}{\pi} \cdot \sup_{0\le t<1} \min\left\{1-t, 1-\frac{2}{\pi} \cdot \arctan\left(\lambda_n\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \sup_{0\le t<1} \arctan\left(\left| f\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) - f_n\left(\lambda_n\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right)\right|\right)\\
&+ \sup_{0\le t\le 1} |t-\lambda_n^*(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,
\end{aligned}
$$

was man leicht verifizieren kann. Es folgt (β).

Gelte nun (β), es gebe also eine Folge $(\lambda_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen, streng monoton wachsenden Bijektionen des Intervalls $[0,1]$ auf sich mit

$$
\sup_{0\le t\le 1} |\lambda_n^*(t)-t| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{und} \quad \sup_{0\le t\le 1} \rho^*(f_n^*(\lambda_n^*(t)), f^*(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
$$

Definiere für $n\in\mathbb{N}$ und $t\in[0,\infty)$

$$
\lambda_n(t) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\cdot\lambda_n^*\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan t\right)\right).
$$

Für alle $t\in[0,\infty)$ gilt $\lambda_n(t)\in[0,\infty)$, ferner hat man $\lambda_n(t)\to\infty$ für $t\to\infty$ und $\lambda_n(0)=\tan\left(\frac{\pi}{2}\cdot\lambda_n^*(0)\right)=\tan 0 = 0$. Da λ_n überdies stetig und streng monoton wachsend ist, handelt es sich bei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um eine Folge von Elementen aus Λ. Man erhält

$$
\begin{aligned}
\sup_{t<\infty} |\lambda_n(t)-t| &= \sup_{t<\infty}\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}\cdot\lambda_n^*\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan t\right)\right) - t\right|\\
&= \sup_{0\le t<1}\left|\tan\left(\frac{\pi\lambda_n^*(t)}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right|\\
&= \sup_{0\le t\le 1}\left|\tan\left(\frac{\pi\lambda_n^*(t)}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,
\end{aligned}
$$

da λ_n^* auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Identität konvergiert und der Tangens stetig ist. Sei nun $N\in\mathbb{N}^*$ beliebig. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\|f_n\circ\lambda_n - f\|_N &= \sup_{0\le t\le\frac{2}{\pi}\cdot\arctan N}\left| f_n\left(\lambda_n\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right) - f\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right|\\
&= \sup_{0\le t\le\frac{2}{\pi}\cdot\arctan N}\left| f_n\left(\tan\left(\frac{\pi\lambda_n^*(t)}{2}\right)\right) - f\left(\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right|,
\end{aligned}
$$

und das konvergiert für $n\to\infty$ wegen

$$
\sup_{0\le t\le\frac{2}{\pi}\cdot\arctan N} \rho^*(f_n^*(\lambda_n^*(t)), f^*(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
$$

gegen 0. Es folgt (α).

(g) Seien $Y=U\circ X$ sowie $Y^n=U\circ X^n$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ Zufallselemente von D^* mit Definitionsbereich $(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$. Es folgt unmittelbar, dass die Bedingungen (a) und (b) des Satzes äquivalent sind zu den folgenden Bedingungen:

(a*) Es gilt

$$\int_{(S^*)^k} F \; d\mathbb{P}^{(Y^n_{t_1},\dots,Y^n_{t_k})} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{(S^*)^k} F \; d\mathbb{P}^{(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})}$$

für alle $k \in \mathbb{N}^*$, alle $t_1, \dots, t_k \in [0,1]$ und alle $F : (S^*)^k \to \mathbb{R}$, die messbar und $\mathbb{P}^{(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})}$-fast sicher stetig sind.

(b*) Für jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{c\downarrow 0} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Delta(c, Y^n, 1) > \epsilon) = 0,$$

wobei Δ wie in (1.3.5), aber mit ρ^* statt der Betragsfunktion und für alle $f \in D^*$ definiert ist.

(h) An dieser Stelle stützt sich der Beweis auf die Grenzwertsätze 1.3.9 bis 1.3.11 für $D'(\mathfrak{X})$. Dabei ist zu beachten, dass die in Teil (c) definierte Menge D^* eine echte Teilmenge von $D'(S^*)$ ist. Man kann die Sätze 1.3.9 bis 1.3.11 aber für D^* anstelle von $D'(S^*)$ benutzen und erkennt, dass die Bedingungen (a*) und (b*) äquivalent sind dazu, dass für alle $F^* : D^* \to \mathbb{R}$, die messbar und $\mathbb{P}^Y$-fast sicher stetig sind,

$$\int_{D^*} F^* \; d\mathbb{P}^{Y^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{D^*} F^* \; d\mathbb{P}^{Y} \tag{1.4.16}$$

gilt. Um den Beweis zu einem Abschluss zu bringen, ist also nur noch nachzuweisen, dass die Bedingung (1.4.16) äquivalent ist zur Aussage (i) des Satzes: Gelte zunächst (1.4.16). Wähle eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$, die messbar und $\mathbb{P}^X$-fast sicher stetig ist, und definiere $F^* := F \circ U^{-1}$. Dann ist F^* eine Funktion auf D^* mit Werten in $\mathbb{R}$, die messbar ist und für die ferner

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^Y\left(\{f^* \in D^* : F^* \text{ ist stetig in } f^*\}\right)\\
&= \mathbb{P}^{U\circ X}\left(\{f^* \in D^* : F^* \text{ ist stetig in } f^*\}\right)\\
&= \mathbb{P}^X\left(\left\{f \in D : F \circ U^{-1} \text{ ist stetig in } U(f)\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}^X\left(\{f \in D : F \text{ ist stetig in } f\}\right) = 1
\end{aligned}$$

gilt. Man hat also

$$\begin{aligned}
\int_D F \; d\mathbb{P}^{X^n} &= \int_D F^* \circ U \; d\mathbb{P}^{X^n} = \int_{D^*} F^* \; d\left(\mathbb{P}^{X^n}\right)^U\\
&= \int_{D^*} F^* \; d\mathbb{P}^{Y^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{D^*} F^* \; d\mathbb{P}^{Y} = \int_D F \; d\mathbb{P}^X.
\end{aligned}$$

Gelte nun (i) und wähle eine Funktion $F^* : D^* \to \mathbb{R}$, die messbar und $\mathbb{P}^Y$-fast sicher stetig ist. Mittels der Definition $F := F^* \circ U$ erhält man eine

Funktion auf D mit Werten in $\mathbb{R}$, die messbar ist und für die

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^X\left(\{f \in D : F \text{ ist stetig in } f\}\right) \\
&= \mathbb{P}^{U^{-1}\circ Y}\left(\{f \in D : F \text{ ist stetig in } f\}\right) \\
&= \mathbb{P}^Y\left(\left\{f^* \in D^* : F^* \circ U \text{ ist stetig in } U^{-1}(f^*)\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}^Y\left(\{f^* \in D^* : F^* \text{ ist stetig in } f^*\}\right) = 1
\end{aligned}$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{D^*} F^*\, d\mathbb{P}^{Y^n} &= \int_{D^*} F \circ U^{-1}\, d\mathbb{P}^{Y^n} = \int_D F\, d\left(\mathbb{P}^{Y^n}\right)^{U^{-1}} \\
&= \int_D F\, d\mathbb{P}^{X^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_D F\, d\mathbb{P}^X = \int_{D^*} F^*\, d\mathbb{P}^Y,
\end{aligned}$$

was (1.4.16) impliziert. Es folgt die Behauptung.

□

Beweis. (von Satz 1.3.13)
Die Bedingungen (i) bis (iii) seien erfüllt. Seien nun $0 \le t_0 < \infty$, $\epsilon > 0$ und $\eta > 0$ beliebig. Da $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ wegen (ii) stetig in Wahrscheinlichkeit ist, gibt es für jedes $t \ge 0$ ein $\delta_t > 0$, so dass für alle $s \ge 0$ mit $|s-t| < \delta_t$

$$\mathbb{P}\left(|X_s - X_t| > \frac{\epsilon}{2}\right) < \frac{\eta}{2}$$

erfüllt ist. Sei $I_t = \left(t - \frac{\delta_t}{2}, t + \frac{\delta_t}{2}\right)$. Die Menge $I = \{I_t : t \in [0,t_0]\}$ bildet dann eine offene Überdeckung des Intervalls $[0,t_0]$. Da $[0,t_0] \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen, also nach dem Satz von Heine-Borel kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{I_{t_1},\dots,I_{t_n}\}$. Sei nun

$$\delta := \min\left\{\frac{\delta_{t_j}}{2} : j = 1,\dots,n\right\}.$$

Betrachtet man jetzt beliebige $s,t \in [0,t_0]$ mit $|s-t| < \delta$, dann gibt es ein $j \in \{1,\dots,n\}$ mit $t \in I_{t_j}$, das heißt man hat

$$t_j - \frac{\delta_{t_j}}{2} < t < t_j + \frac{\delta_{t_j}}{2}.$$

Für dieses j gilt $|s-t_j| \le |s-t| + |t-t_j| < \delta + \frac{\delta_{t_j}}{2} \le \delta_{t_j}$ und

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_s - X_t| > \epsilon) &\le \mathbb{P}(|X_s - X_{t_j}| + |X_{t_j} - X_t| > \epsilon) \\
&\le \mathbb{P}\left(\left|X_s - X_{t_j}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|X_t - X_{t_j}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) < \eta.
\end{aligned}$$

$(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist daher für jedes $0 \le t_0 < \infty$ gleichmäßig stochastisch stetig auf $[0, t_0]$ (vgl. [Sa], Beweis von Lemma 9.6). Insbesondere gilt für jedes $\epsilon > 0$ und $N > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\Delta\left(\frac{1}{k}, X, N\right) > \epsilon\right) = 0 : \tag{1.4.17}$$

Seien $\epsilon > 0$ und $N > 0$ beliebig. Dann gibt es zu jedem $\eta > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\mathbb{P}(|X_s - X_t| > \epsilon) < \eta$ für alle $s, t \in [0, N]$ mit $|s - t| < \delta$ erfüllt ist. Wähle nun $k_0 \in \mathbb{N}^*$ derart, dass $\frac{1}{k_0} < \delta$. Es folgt

$$\mathbb{P}\left(\Delta\left(\frac{1}{k}, X, N\right) > \epsilon\right) < \eta$$

für alle $k \ge k_0$, was (1.4.17) impliziert. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Da der Prozess $(X_t^n)_{t\in[0,\infty)}$ wegen (iii) monotone Pfade besitzt, gilt für jedes $\omega \in \Omega$ und jedes Intervall $[t_0, t_1]$ mit $0 \le t_0 < t_1 < \infty$

$$\sup\{|X_s^n(\omega) - X_t^n(\omega)| : s, t \in [t_0, t_1]\} = |X_{t_1}^n(\omega) - X_{t_0}^n(\omega)|. \tag{1.4.18}$$

Definiert man dann für $N > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ und $\omega \in \Omega$

$$D(k, X^n(\omega), N) = \max_{1\le i\le k} \left| X^n_{N\cdot\frac{i}{k}}(\omega) - X^n_{N\cdot\frac{i-1}{k}}(\omega) \right|,$$

so gilt wegen (1.4.18)

$$D(k, X^n(\omega), N) \le \Delta\left(\frac{1}{k}, X^n(\omega), N\right)$$

und

$$\Delta\left(\frac{2}{k}, X^n(\omega), N\right) < 2\epsilon \quad \text{falls} \quad D(k, X^n(\omega), N) < \epsilon,$$

woraus sich unmittelbar

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta\left(\frac{2}{k}, X^n(\omega), N\right) \le D(k, X^n(\omega), N) \le \Delta\left(\frac{1}{k}, X^n(\omega), N\right) \tag{1.4.19}$$

ergibt: Die Behauptung ist klar im Fall $\Delta\left(\frac{2}{k}, X^n(\omega), N\right) = 0$, andernfalls werde angenommen, dass

$$D\left(k, X^n(\omega), N\right) < \frac{1}{2} \cdot \Delta\left(\frac{2}{k}, X^n(\omega), N\right)$$

gilt. Dann folgt aber

$$\Delta\left(\frac{2}{k}, X^n(\omega), N\right) < 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta\left(\frac{2}{k}, X^n(\omega), N\right) = \Delta\left(\frac{2}{k}, X^n(\omega), N\right),$$

was zum Widerspruch führt. Analog läßt sich zeigen, dass (1.4.19) für den Prozess X erfüllt ist. Aufgrund von (1.4.17) und (1.4.19) erhält man für jedes $\epsilon > 0$ und $N > 0$

$$\mathbb{P}(D(k, X, N) > \epsilon) \leq \mathbb{P}\left(\Delta\left(\frac{1}{k}, X, N\right) > \epsilon\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Da für jede Wahl $N > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ in der Definition von $D(k, X^n(\omega), N)$ nur endlich viele Funktionswerte von $t \mapsto X_t^n(\omega)$ vorkommen, und da die Bedingung (i) erfüllt ist, folgt mit $t_i := N \cdot \frac{i}{k}$ $(0 \leq i \leq k)$ für alle $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D(k, X^n, N) > \epsilon) \\
= \; & \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq k} \left|X^n_{N\cdot\frac{i}{k}} - X^n_{N\cdot\frac{i-1}{k}}\right| > \epsilon\right) \\
= \; & \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq k} \left|X^n_{t_i} - X^n_{t_{i-1}}\right| > \epsilon\right) \\
= \; & \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^{(X^n_{t_0},\ldots,X^n_{t_k})} \underbrace{(\{(x_0,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^{k+1} : \max_{1\leq i\leq k} |x_i - x_{i-1}| > \epsilon\})}_{=:M\in\mathfrak{B}^{k+1}} \\
= \; & \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} 1_M \; d\mathbb{P}^{(X^n_{t_0},\ldots,X^n_{t_k})} \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^{k+1}} 1_M \; d\mathbb{P}^{(X_{t_0},\ldots,X_{t_k})} \; = \; \mathbb{P}(D(k, X, N) > \epsilon).
\end{aligned}$$

Man erhält also für jedes $\epsilon > 0$ und $N > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D(k, X^n, N) > \epsilon\}) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(D(k, X, N) > \epsilon) = 0$$

und im Hinblick auf (1.4.19)

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\Delta\left(\frac{2}{k}, X^n, N\right) > 2\epsilon\right) \leq \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(D\left(k, X^n, N\right) > \epsilon\right) = 0.$$

Die Skorokhod-Δ-Bedingung ist also erfüllt, daher folgt die Behauptung mittels Satz 1.3.8. $\square$

Kapitel 2

Lineare Operatoren, Operator-Stabilität und Reguläre Variation

Ziel des vorliegenden Kapitels ist es, einige Begriffe einzuführen, die für das Verständnis des dritten Kapitels notwendig sind.

Der erste Paragraph beschäftigt sich mit linearen Operatoren, die bereits aus der Linearen Algebra bekannt sind, darüber hinaus wird der sogenannte Exponential-Operator eingeführt.

Im zweiten Abschnitt wird unter anderem an das Konzept der unendlichen Teilbarkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen erinnert.

Operator-stabile Verteilungen und ihre Eigenschaften sind der Inhalt des dritten Paragraphen, an dessen Ende der Operator-Lévy-Prozess definiert wird.

Der vierte Abschnitt widmet sich der Theorie der regulär variierenden Funktionen und Operatoren, und der letzte Teil gibt einen kurzen Einblick in das Gebiet der Anziehungsbereiche.

Soweit nicht anders vermerkt, stammen die auftretenden Sätze und Definitionen aus [MS1]. Auf Beweise soll an dieser Stelle fast vollständig verzichtet werden, eine weitaus umfassendere Darstellung der Materie findet sich in [MS1].

Während des ganzen Kapitels sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sämtliche auftretenden Zufallsvariablen (insbesondere also alle Zufallsgrößen und -vektoren) seien auf Ω definiert. Ferner werde die Verteilung einer Zufallsvariablen X mit $\mathfrak{L}(X)$ bezeichnet.

2.1 Lineare Operatoren

Zu Beginn dieses Abschnitts soll an den Begriff eines *linearen Operators* A auf $\mathbb{R}^d$ erinnert werden, der nichts anderes als eine $d \times d$-Matrix A mit reellen Einträgen ist. Mit anderen Worten handelt es sich um eine Abbildung $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit

(a) $A(x) + A(y) = A(x + y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und

(b) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lineare Operatoren sind stetig und somit messbar. Mit $L\left(\mathbb{R}^d\right)$ werde die Menge aller linearen Operatoren auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Ein $A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ heißt bekanntlich *invertierbar*, wenn es ein $A^{-1} \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = I$ gibt, wobei I den Identitäts-Operator auf $\mathbb{R}^d$, das heißt die Einheitsmatrix, bezeichnet. Die Menge $GL\left(\mathbb{R}^d\right) \subset L\left(\mathbb{R}^d\right)$ aller invertierbaren linearen Operatoren auf $\mathbb{R}^d$ ist eine Gruppe. Es sei noch darauf hingewiesen, dass man einen linearen Operator $A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ auch als linearen Operator auf dem komplexen Vektorraum

$$\mathbb{C}^d = \left\{x + iy : x, y \in \mathbb{R}^d\right\}$$

auffassen kann, indem man $A(x + iy) = A(x) + iA(y)$ setzt. Gilt dann $A(z) = \lambda z$ für ein $z \in \mathbb{C}^d$ und ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so bezeichnet man wie gewohnt λ als *Eigenwert* und z als zugehörigen *Eigenvektor* von A. Die Eigenwerte bestimmter linearer Operatoren werden im vierten Abschnitt der Charakterisierung regulär variierender Funktionen dienen (vgl. Definition 2.4.4).

Das erste Ziel besteht nun darin, auf der Menge $L\left(\mathbb{R}^d\right)$ einen Konvergenzbegriff einzuführen. Zu diesem Zweck definiert man eine Norm $\|\cdot\|$ auf $L\left(\mathbb{R}^d\right)$ und erklärt danach die Konvergenz einer Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ von linearen Operatoren gegen ein $A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ wie üblich:

Definition und Satz 2.1.1. (vgl. [MS1], Definition 2.1.2 und Proposition 2.1.3) *Es sei $|\cdot|$ der Betrag auf $\mathbb{R}^d$. Definiert man dann für $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$*

$$\|E\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |x|=1}} |E(x)|,$$

so bildet $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem reellen Vektorraum $L\left(\mathbb{R}^d\right)$, und es gilt für alle $A, B \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ und $x \in \mathbb{R}^d$

$$\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \textit{und} \quad |A(x)| \leq \|A\| \cdot |x|.$$

Eine Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ von linearen Operatoren auf $\mathbb{R}^d$ konvergiert dann gegen ein $A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$, in Zeichen

$$A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A \ \left(\text{in } L\left(\mathbb{R}^d\right)\right),$$

wenn $\|A_n - A\| \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, was $\|A_n\| \to \|A\|$ $(n \to \infty)$ impliziert.

Mit Hilfe der Norm $\|\cdot\|$ auf $L\left(\mathbb{R}^d\right)$ kann man auch den Abstand eines linearen Operators A zu einer abgeschlossenen Teilmenge $\mathcal{K}$ von $L\left(\mathbb{R}^d\right)$ durch

$$\|A - \mathcal{K}\| = \inf_{B \in \mathcal{K}} \|A - B\| \tag{2.1.1}$$

definieren. Gilt $\|A_n - \mathcal{K}\| \to 0$ $(n \to \infty)$ für eine Folge $(A_n)_{n \geq 1}$ von Elementen aus $L\left(\mathbb{R}^d\right)$, so schreibt man $A_n \rightharpoonup \mathcal{K}$ $(n \to \infty)$ (vgl. [MS1], Definition 2.3.14).

Im Folgenden soll an den Begriff der *Transponierten* A^* eines linearen Operators A erinnert werden, die durch die Bedingung

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

definiert wird, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das natürliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ bezeichnet. A^* ist ebenfalls ein linearer Operator auf $\mathbb{R}^d$. Im Fall $A = A^*$ wird A *symmetrisch* genannt und

$$Q(x) = \langle x, A(x) \rangle \ (x \in \mathbb{R}^d)$$

als *quadratische Form* bezeichnet. Q (oder auch A) heißt *nichtnegativ definit*, falls $Q(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.

Als nächstes wird eine spezielle Klasse von linearen Operatoren eingeführt:

Definition 2.1.2. (vgl. [MS1], Definition 2.2.1)
Für einen linearen Operator $A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ wird der *Exponential-Operator* $\exp(A)$ durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{2.1.2}$$

definiert, wobei $A^k := A \circ \ldots \circ A$ (k-mal) und $A^0 = I$ den Identitäts-Operator auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Ferner kann man für jedes $t \in (0, \infty)$

$$t^A = \exp\left(A \log t\right) \tag{2.1.3}$$

definieren.

Dass es sich bei $\exp(A)$ für ein beliebiges $A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ tatsächlich um einen linearen Operator handelt, kann man sich folgendermaßen klarmachen: Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned}
(\exp(A))(x+y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A \circ \ldots \circ A(x+y)}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(x) + A^k(y)}{k!} \\
&= (\exp(A))(x) + (\exp(A))(y),
\end{aligned}$$

und auf die gleiche Weise kann man für $x \in \mathbb{R}^d$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gültigkeit von $(\exp(A))(\lambda x) = \lambda \cdot (\exp(A))(x)$ nachweisen. Es ergibt sich außerdem

$$\|\exp(A)\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\|) < \infty,$$

daher hat man für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ im Hinblick auf Satz 2.1.1

$$|(\exp(A))(x)| \leq \|\exp(A)\| \cdot |x| < \infty,$$

$(\exp(A))(x)$ liegt also wieder in $\mathbb{R}^d$.

Man kann nun zeigen (vgl. dazu [MS1], Proposition 2.2.11), dass die Abbildung $(0,\infty) \times L\left(\mathbb{R}^d\right) \ni (t, A) \mapsto t^A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ stetig ist. Ferner gibt es für lineare Operatoren der Form t^A $\left(t > 0,\ A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ die folgenden nützlichen Rechenregeln (vgl. [MS1], Proposition 2.2.2):

$$t^A = I \quad \text{für} \quad t = 1, \tag{2.1.4a}$$

$$s^A \circ t^A = t^A \circ s^A = (st)^A \quad (s, t > 0), \tag{2.1.4b}$$

$$t^{-A} = \left(\frac{1}{t}\right)^A = \left(t^A\right)^{-1}, \text{ das heißt } t^A \text{ ist invertierbar.} \tag{2.1.4c}$$

Zum Schluss des Abschnitts wird noch der Begriff der Symmetrie eines Wahrscheinlichkeitsmaßes eingeführt:

Definition 2.1.3. (vgl. [MS1], Definition 2.3.3)
Es sei ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$. $A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ wird *Symmetrie* für ν genannt, falls es ein $a \in \mathbb{R}^d$ gibt, so dass $\nu = \nu^A * \delta_a$ gilt, wobei δ_a das Dirac-Maß in a bezeichnet. Die Menge aller Symmetrien von ν wird mit $\mathcal{S}^1(\nu)$ bezeichnet.

Ist nun X ein Zufallsvektor mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und Verteilung $\mathfrak{L}(X) = \nu$ derart, dass für jedes $t \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ die Verteilung von $\langle t, X\rangle$ kein Dirac-Maß ist, so ist $\mathcal{S}^1(\nu)$ eine kompakte Teilmenge von $L\left(\mathbb{R}^d\right)$ (vgl. [MS1], Theorem 2.3.10).

Satz 2.1.4. („Convergence of Types", vgl. [MS1], Theorem 2.3.17)
Es seien $\mu_n\,(n \geq 1)$, μ und ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$ und $(A_n)_{n\geq 1}$ sowie $(B_n)_{n \geq 1}$ Folgen von Elementen aus $L\left(\mathbb{R}^d\right)$. Nimmt man ferner an, dass für zwei Zufallsvektoren X, Y mit $\mathfrak{L}(X) = \mu$ und $\mathfrak{L}(Y) = \nu$ für jedes $t \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ die Verteilungen von $\langle t, X\rangle$ und $\langle t, Y\rangle$ keine Dirac-Maße sind, und dass

$$\mu_n^{B_n} * \delta_{b_n} \xrightarrow{w} \mu$$

für geeignete $b_n \in \mathbb{R}^d\,(n \geq 1)$ erfüllt ist, dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

(i) Es gibt eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ von Elementen aus $\mathbb{R}^d$ mit $\mu_n^{A_n} * \delta_{a_n} \xrightarrow{w} \nu$.

(ii) Es gibt es ein $a \in \mathbb{R}^d$ und ein invertierbares $A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit

$$\nu = \mu^A * \delta_a \quad \textit{und} \quad A_n \circ B_n^{-1} \rightharpoonup A \circ \mathcal{S}^1(\mu).$$

2.2 Eigenschaften von Zufallsvektoren, Verteilungen und Prozessen

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie ist bekannt, dass ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor X (bzw. dessen Verteilung $\mathfrak{L}(X)$) *unendlich teilbar* heißt, wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvektoren $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ gibt, so dass

$$\mathfrak{L}(X) = \mathfrak{L}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ni}\right) = \left(\mathfrak{L}(X_{n1})\right)^{*(n)} \tag{2.2.1}$$

gilt. Für einen unendlichen teilbaren Zufallsvektor X ist auch die Komposition mit einem linearen Operator A wieder unendlich teilbar (vgl. [MS1], Lemma 3.1.5). Da die Fourier-Transformierte eines unendlich teilbaren Zufallsvektors nirgends verschwindet, besitzt sie stets eine besondere Gestalt, wie der nächste Satz zeigt, dessen Beweis kurz skizziert werden soll:

Satz 2.2.1. (vgl. [MS1], Theorem 3.1.2)
Es sei X ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor mit unendlich teilbarer Verteilung $\mathfrak{L}(X)$. Die Fourier-Transformierte ϕ_X von X erfüllt dann für alle $x \in \mathbb{R}^d$ die Beziehung

$$\phi_X(x) = e^{\Psi_X(x)} \tag{2.2.2}$$

für eine eindeutig bestimmte, stetige Funktion $\Psi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mit $\Psi_X(0) = 0$. Die Funktion Ψ_X wird als charakteristischer Exponent von X bzw. $\mathfrak{L}(X)$ bezeichnet.

Beweis.
Aufgrund von Lemma 41.1 aus [A] ist $\phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig und somit insbesondere stetig auf $\mathbb{R}^d$. Ferner gilt

$$\phi_X(0) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle 0,x\rangle}\ \mathbb{P}^X(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbb{P}^X = 1,$$

so dass das folgende Ergebnis (vgl. [MS1], Theorem 3.4.1) auf ϕ_X angewendet werden kann:

Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $f(0) \in \mathbb{R}^+$ gibt es genau eine stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ derart, dass $\varphi(0) = 0$ und $f(x) = |f(x)|e^{i\varphi(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ erfüllt sind.

Es gibt also eine eindeutig bestimmte, stetige Funktion $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_X(0) = 0$ und $\phi_X(x) = |\phi_X(x)|e^{i\varphi_X(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Definiert man nun $\Psi_X(x) = \log|\phi_X(x)| + i\varphi_X(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$, so ist die Funktion $\Psi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ stetig und erfüllt sowoh $\Psi_X(0) = 0$ als auch

$$e^{\Psi_X(x)} = e^{\log|\phi_X(x)|+i\varphi_X(x)} = |\phi_X(x)|e^{i\varphi_X(x)} = \phi_X(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Es folgt die Behauptung. $\square$

Man kann die Gestalt des charakteristischen Exponenten einer unendlich teilbaren Verteilung sogar präzise angeben:

Satz 2.2.2. (Lévy-Khintchine-Darstellung (LKD), vgl. [MS1], Theorem 3.1.11) *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$ ist genau dann unendlich teilbar, wenn man seine Fourier-Transformierte für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ in der Form $e^{\Psi(x)}$ mit*

$$\Psi(x) = i\langle a, x\rangle - \frac{1}{2} \cdot Q(x) + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left(e^{i\langle x,y\rangle} - 1 - \frac{i\langle x, y\rangle}{1+|y|^2}\right) \phi(dy) \tag{2.2.3}$$

für ein $a \in \mathbb{R}^d$, eine nichtnegativ definite quadratische Form Q auf $\mathbb{R}^d$ und ein σ-endliches Borel-Maß ϕ auf $\left(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}, \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\right)\right)$ schreiben kann, wobei die Bedingung

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left(1 \wedge |x|^2\right) \phi(dx) < \infty \tag{2.2.4}$$

erfüllt sein muss. Das Tripel $[a, Q, \phi]$ ist eindeutig bestimmt und wird als Lévy-Repräsentation von ν bezeichnet.

Ein unendlich teilbares Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ist genau dann auf $(0, \infty)$ konzentriert, wenn das Maß ϕ aus der Lévy-Repräsentation von ν auf $(-\infty, 0)$ keine Masse besitzt. Hier geht wesentlich ein, dass sich jede unendlich teilbare Verteilung als schwacher Limes bewerteter Poisson-Verteilungen darstellen läßt (vgl. [A], Lemma 48.12).

Zum Schluss dieses Abschnitts über unendlich teilbare Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ sei noch darauf hingewiesen, dass man für eine derartige Verteilung die c-fache Faltung für jedes $c \geq 0$ definieren kann:

Definition 2.2.3. (vgl. [MS1], Definition 3.1.23)
Es seien ν ein unendlich teilbares Wahrscheinlichkeismaß auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$ mit Lévy-Repräsentation $[a, Q, \phi]$ und $c \geq 0$. Dann definiert man ν^c als die durch die Lévy-Repräsentation $[c \cdot a, c \cdot Q, c \cdot \phi]$ eindeutig bestimmte unendlich teilbare Verteilung auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$. ν^c wird als *c-fache Faltung von ν* bezeichnet. Für $c \in \mathbb{N}$ stimmt diese Definition mit der aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannten überein, wenn man $\nu^0 := \delta_0$ setzt.

Am Ende des ersten Paragraphen (vgl. Satz 2.1.4) war verlangt worden, dass für die auftretenden Zufallsvektoren X und Y die Verteilung von $\langle t, X\rangle$ bzw. $\langle t, Y\rangle$ für kein $t \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ ein Dirac-Maß sei. Der Vereinfachung der Notation dient die folgende Definition:

Definition 2.2.4. (vgl. [MS1], Definition 1.3.9 und Definition 11.1.3)
X sei ein Zufallsvektor mit Werten in $\mathbb{R}^d$. X bzw. $\mathfrak{L}(X)$ *besitzt volle Dimension*, wenn für jedes $t \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ die Verteilung von $\langle t, X\rangle$ *nichtdegeneriert*, das heißt kein Dirac-Maß ist. Das ist äquivalent dazu, dass der Träger von $\mathfrak{L}(X)$ in keiner $(d-1)$-dimensionalen Hyperebene des $\mathbb{R}^d$ liegt. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit Zustandsraum $\mathbb{R}^d$ *besitzt volle Dimension*, wenn dies für alle $\mathfrak{L}(X_t)$ $(t > 0)$ der Fall ist.

Es sei daran erinnert, dass ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ *unabhängige Zuwächse* besitzt, falls für alle $s, t \in [0, \infty)$ der Zuwachs $X_{t+s} - X_t$ unabhängig vom Prozess $(X_\nu)_{0\leq\nu\leq t}$ ist, und dass man seine Zuwächse als *stationär* bezeichnet, falls $\mathfrak{L}(X_{t+s} - X_t) = \mathfrak{L}(X_s)$ für alle $s, t \in [0, \infty)$ gilt. X heißt *stetig in Verteilung*, falls

$$X_{t_n} \xrightarrow{\mathfrak{L}} X_t$$

für $t_n \to t$ gilt (vgl. [MS1], Definition 11.1.1).

Im Folgenden soll ein ganz spezieller stochastischer Prozess definiert werden, und zwar der stabile Subordinator mit Parameter $0 < \alpha < 1$. Im Anschluss an Definition 2.3.6 wird kurz begründet werden, warum es sich hierbei um eine sinnvolle Bezeichnung handelt.

Definition 2.2.5. (vgl. [Bin], S.3)
Für $0 < \alpha < 1$ sei $(Y_t^\alpha)_{t\in[0,\infty)}$ der stochastische Prozess auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum $[0, \infty)$, der nichtnegative, stationäre, unabhängige Zuwächse besitze und für den

$$\mathbb{E}e^{-sY_t^\alpha} = e^{-ts^\alpha}$$

für alle $s, t \in [0, \infty)$ erfüllt sei. $(Y_t^\alpha)_{t\in[0,\infty)}$ wird als *stabiler Subordinator mit Parameter* α bezeichnet.

Für den stabilen Subordinator mit Parameter $0 < \alpha < 1$ gilt nun der folgende Satz:

Satz 2.2.6. (vgl. [Bin], Proposition 1(a) und Abschnitt 6)
Es seien $0 < \alpha < 1$ und $(Y_t^\alpha)_{t\in[0,\infty)}$ der stabile Subordinator mit Parameter α. Es gibt genau einen stochastischen Prozess $(X_t^\alpha)_{t\in[0,\infty)}$ mit Zustandsraum $[0, \infty)$,

der die Relation

$$\frac{\partial^k \mathbb{E}\left(X_{t_1}^\alpha \cdot X_{t_2}^\alpha \cdot \ldots \cdot X_{t_k}^\alpha\right)}{\partial t_1 \ldots \partial t_k} = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^k (t_1(t_2-t_1)\cdot \ldots \cdot (t_k - t_{k-1}))^{\alpha-1} \quad (2.2.5)$$

für alle $k \in \mathbb{N}^*$ und jede Wahl $0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty$ erfüllt. Der Prozess $(X_t^\alpha)_{t\in[0,\infty)}$ ist das Inverse von $(Y_t^\alpha)_{t\in[0,\infty)}$ und infolgedessen verteilungsinvers zu $(Y_t^\alpha)_{t\in[0,\infty)}$.

Dabei bezeichnet man zwei Prozesse als invers zueinander, wenn ihre Pfade auf folgende Weise auseinander hervorgehen:

Definition 2.2.7. (vgl. [Bin], S.3)
Es seien $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ und $Y = (Y_t)_{t\in[0,\infty)}$ zwei stochastische Prozesse, deren Pfade rechtsseitig stetige und monoton wachsende Funktionen mit Werten in $[0,\infty)$ seien.

(a) Falls für alle $t \geq 0$ und $\omega \in \Omega$ die Beziehung

$$X_t(\omega) = \sup\{s \geq 0 : Y_s(\omega) \leq t\} \quad (2.2.6)$$

erfüllt ist, so nennt man X und Y zueinander *invers* und bezeichnet X als das *Inverse* von Y.

(b) X und Y heißen *verteilungsinvers*, wenn die endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit den endlich-dimensionalen Randverteilungen des Inversen von $(Y_t)_{t\in[0,\infty)}$ übereinstimmen.

2.3 Operator-stabile Verteilungen

Definition 2.3.1. (vgl. [MS1], Definition 3.3.24)
Es seien Y_n $(n \geq 1)$ und Y unabhängige, identisch verteilte Zufallsvektoren mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Ferner sei X ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor, dessen Verteilung $\mathfrak{L}(X)$ volle Dimension besitze.

(a) $\mathfrak{L}(X)$ heißt *operator-stabil*, wenn es lineare Operatoren $A_n \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ $(n \geq 1)$ und Vektoren $b_n \in \mathbb{R}^d$ $(n \geq 1)$ gibt, so dass

$$A_n \circ \sum_{i=1}^n Y_i + b_n \xrightarrow{\mathfrak{L}} X \quad (2.3.1)$$

gilt, also

$$\left(\mathfrak{L}(Y)^{*(n)}\right)^{A_n} * \delta_{b_n} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(X) \quad (2.3.2)$$

erfüllt ist.

(b) Man nennt $\mathfrak{L}(X)$ *streng operator-stabil*, wenn $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$ gewählt werden kann, wenn also

$$A_n \circ \sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{\mathfrak{L}} X \tag{2.3.3}$$

bzw.

$$\left(\mathfrak{L}(Y)^{*(n)}\right)^{A_n} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(X) \tag{2.3.4}$$

gilt.

Die operator-stabilen Verteilungen besitzen einige interessante Eigenschaften:

Satz 2.3.2. (vgl. [MS1], Corollary 7.1.12 und Theorem 7.2.7)
Es sei X ein Zufallsvektor mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und operator-stabiler Verteilung $\mathfrak{L}(X)$. Dann erfüllt die Fourier-Transformierte ϕ_X von X für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ die Ungleichung $|\phi_X(x)| < 1$. Ferner besitzt $\mathfrak{L}(X)$ eine Lebesgue-Dichte.

Den Zusammenhang zwischen operator-stabilen und unendlich teilbaren Verteilungen auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$ liefert der folgende Satz:

Satz 2.3.3. (vgl. [MS1], Theorem 7.2.1 und Definition 7.2.2)
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$, das volle Dimension besitzt, ist genau dann operator-stabil, wenn es unendlich teilbar ist und ein linearer Operator $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ existiert, so dass für geeignete Vektoren $a_t \in \mathbb{R}^d$ $(t \in (0, \infty))$ die Gleichung

$$\nu^t = \nu^{t^E} * \delta_{a_t} \tag{2.3.5}$$

für alle $t \in (0, \infty)$ erfüllt ist. In diesem Fall wird E als Exponent von ν bezeichnet und ν heißt $\left(t^E\right)$-operator-stabil. Insbesondere ist ν genau dann streng operator-stabil, wenn es unendlich teilbar ist und

$$\nu^t = \nu^{t^E} \tag{2.3.6}$$

für alle $t \in (0, \infty)$ und ein $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ gilt. In diesem Fall nennt man ν streng $\left(t^E\right)$-operator-stabil.

Ist ν ein $\left(t^E\right)$-operator-stabiles Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$, so sind die Realteile aller Eigenwerte von $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ positiv, und es gilt sogar noch mehr:

Satz 2.3.4. (vgl. [MS1], Theorem 7.2.1)
Es seien $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ ein linearer Operator und ν ein $\left(t^E\right)$-operator-stabiles Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$. Sämtliche Eigenwerte von E liegen dann in der

Halbebene

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Nach Satz 2.3.2 besitzt jede operator-stabile Verteilung ν auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$ eine Lebesgue-Dichte. Der nächste Satz geht erheblich darüber hinaus:

Satz 2.3.5. (vgl. [JM], Corollary 4.2.13 und Theorem 4.10.2)
Es seien $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ ein linearer Operator auf $\mathbb{R}^d$ und X ein Zufallsvektor mit Werten in $\mathbb{R}^d$, dessen Verteilung $\mathfrak{L}(X)$ $\left(t^E\right)$-operator-stabil sei. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

(a) $\lim_{t \to 0} t^E = 0$.

(b) Für jedes $t > 0$ besitzt $(\mathfrak{L}(X))^t$ eine Lebesgue-Dichte p_t, die beschränkt und beliebig oft partiell differenzierbar ist.

Im Folgenden sollen die (streng) stabilen Verteilungen auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$ eingeführt werden, die eine Teilmenge der (streng) operator-stabilen Wahrscheinlichkeitsmaße darstellen:

Definition 2.3.6. (vgl. [MS1], Definition 7.3.1)
X sei ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor, dessen Verteilung $\mathfrak{L}(X)$ volle Dimension besitze. $\mathfrak{L}(X)$ (bzw. X) heißt *(streng) stabil*, falls $\mathfrak{L}(X)$ (streng) $\left(t^E\right)$-operator-stabil ist mit $E = aI$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und den Identitäts-Operator I auf $\mathbb{R}^d$. In diesem Fall wird $\alpha := \frac{1}{a}$ als der *Index* von $\mathfrak{L}(X)$ bezeichnet, und man nennt $\mathfrak{L}(X)$ (bzw. X) auch *α-stabil*.

Die Laplace-Transformierte einer stabilen Verteilung ν auf $\left([0,\infty), \mathfrak{B}_{[0,\infty)}\right)$ besitzt die Form $\varphi_\nu(x) = e^{-\xi x - c x^\alpha}$ $(x \in [0,\infty))$ für ein $\alpha \in (0,1]$, ein $c \in [0,\infty)$ und ein $\xi \in [0,\infty)$. Ist ν sogar streng stabil, so gilt $\xi = 0$. Umgekehrt ist jede Verteilung ν auf $\left([0,\infty), \mathfrak{B}_{[0,\infty)}\right)$, die eine Laplace-Transformierte der angegebenen Form mit $\alpha \in (0,1]$, $\xi = 0$ und $c = 1$ besitzt, streng stabil (vgl. [FG], Problem 5 auf S.328 und Problem 13 auf S.279). Aufgrund dieser Tatsache ist unmittelbar klar, dass die Bezeichnung stabiler Subordinator in Definition 2.2.5 sinnvoll gewählt ist, denn Y_1^α ist streng stabil.

Im Spezialfall $d = 1$ können die stabilen Verteilungen noch genauer charakterisiert werden:

Satz 2.3.7. (vgl. [MS1], Corollary 7.3.4 und Theorem 7.3.5 und [A], Satz 49.6)
Es sei ν eine α-stabile Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Dann ist ν gemäß Satz 2.3.3 unendlich teilbar und besitzt folglich eine Lévy-Repräsentation $[a, Q, \phi]$. Für den Index α gilt $0 < \alpha \leq 2$.

(a) Im Fall $\alpha = 2$ ist ν eine Normalverteilung und es gilt $Q(x) = \sigma^2 x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und die Varianz $\sigma^2 > 0$ von ν.

(b) Im Fall $\alpha < 2$ gilt $Q(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ϕ ist von der Form

$$\begin{aligned} \phi(r, \infty) &= p \cdot C \cdot r^{-\alpha} \\ \phi(-\infty, -r) &= q \cdot C \cdot r^{-\alpha} \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

für ein $C > 0$, geeignete $p, q \geq 0$ mit $p + q = 1$ und jedes $r > 0$. Überdies besitzt ν die Fourier-Transformierte e^{Ψ_ν} mit

$$\Psi_\nu(x) = \begin{cases} iax - \sigma_1^\alpha |x|^\alpha \left(1 - i\beta \cdot \operatorname{sign}(x) \cdot \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) & \alpha \neq 1, \\ iax - \sigma_2^\alpha |x| \left(1 + i\beta \cdot \operatorname{sign}(x) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \log|x|\right) & \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.3.8}$$

für ein $a \in \mathbb{R}$, $\beta = p - q$ und

$$\sigma_1^\alpha = C \cdot \frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha} \cdot \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) > 0 \quad \textit{sowie} \quad \sigma_2^\alpha = C \cdot \frac{\pi}{2} > 0.$$

Umgekehrt ist jede Verteilung ν auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, deren Fourier-Transformierte die Gestalt e^{Ψ_ν} mit Ψ_ν wie in (2.3.8) ($a \in \mathbb{R}, \sigma_1^\alpha > 0, \sigma_2^\alpha > 0, \beta \in [-1, 1], \alpha \in (0, 2]$) besitzt, α-stabil. Insbesondere gilt im Fall $\nu = \mathfrak{N}(\mu, \sigma^2)$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$ und ein $\sigma^2 > 0$

$$\Psi_\nu(x) = i\mu x - \frac{\sigma^2 x^2}{2} \ ,$$

die Normalverteilung ist also stabil mit Index 2.

Zum Schluss des Paragraphen soll noch der Begriff der Operator-Selbstähnlichkeit eingeführt werden, mit dessen Hilfe man den Operator-Lévy-Prozess definieren kann:

Definition 2.3.8. (vgl. [MS1], Definition 11.1.2 und Example 11.1.12)
Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$ mit Zustandsraum $\mathbb{R}^d$ heißt *operator-selbstähnlich*, wenn er stetig in Verteilung ist und ein $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ sowie eine Folge $(d_t)_{t \in [0,\infty)}$ von $\mathbb{R}^d$-wertigen Vektoren existieren, so dass

$$\mathfrak{L}\left(X_{ct_1}, \ldots, X_{ct_k}\right) = \mathfrak{L}\left(c^E \circ X_{t_1} + d_c, \ldots, c^E \circ X_{t_k} + d_c\right) \tag{2.3.9}$$

für alle $c > 0$, alle $k \in \mathbb{N}^*$ und alle $t_1, \ldots, t_k \in [0, \infty)$ erfüllt ist. Der lineare Operator E wird *Exponent* des operator-selbstähnlichen Prozesses $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$ genannt, die Menge aller Exponenten von $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$ bezeichnet man mit $\mathcal{E}\left((X_t)_{t \in [0,\infty)}\right)$. Falls $E = aI$ für ein $a \in \mathbb{R}$ gilt, bezeichnet man $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$ auch als *selbstähnlich mit Index a*.

Definition und Satz 2.3.9. (vgl. [MS1], Example 11.1.12)
Es sei $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum $\mathbb{R}^d$, der volle Dimension besitze, stetig in Verteilung sei und stationäre, unabhängige Zuwächse mit $X_0 = 0$ habe. $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist genau dann operator-selbstähnlich, wenn die Verteilung von X_1 streng operator-stabil ist. In diesem Fall stimmen die Exponenten von $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ und X_1 überein und $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ wird als Operator-Lévy-Prozess bezeichnet.

Ein Operator-Lévy-Prozess mit fast sicher wachsenden Pfaden heißt *Subordinator*.

2.4 Regulär variierende Funktionen und Operatoren

Es sei daran erinnert, dass eine messbare Funktion $R : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *regulär variierend* (*in* ∞) *mit Index* $\rho \in \mathbb{R}$ heißt, falls für alle $\lambda > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} = \lambda^\rho \tag{2.4.1}$$

erfüllt ist. Eine regulär variierende Funktion mit Index 0 heißt *langsam variierend* (*in* ∞). Eine messbare Funktion $R : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist also genau dann regulär variierend mit Index ρ, wenn $R(x) = x^\rho L(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und eine langsam variierende Funktion $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ gilt. Jede regulär variierende Funktion mit positivem Index besitzt eine asymptotische Umkehrfunktion:

Satz 2.4.1. (vgl. [Se], S.21)
Es sei $R_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine regulär variierende Funktion mit $R_1(x) = x^\gamma L_1(x)$ $(x \in \mathbb{R}^+)$ für ein $\gamma > 0$ und eine langsam variierende Funktion $L_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Dann gibt es eine weitere regulär variierende Funktion $R_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $R_2(x) = x^{\frac{1}{\gamma}} L_2(x)$ $(x \in \mathbb{R}^+)$ für eine langsam variierende Funktion $L_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ derart, dass

$$\frac{R_1(R_2(x))}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1 \quad \textit{und} \quad \frac{R_2(R_1(x))}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1\ .$$

Im Folgenden wird das Konzept der regulären Variation in natürlicher Weise auf Borel-messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to GL\left(\mathbb{R}^d\right)$ ausgeweitet. Dazu definiert man für eine Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ von invertierbaren linearen Operatoren und ein $A \in GL\left(\mathbb{R}^d\right)$

$$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \quad \text{genau dann, wenn} \quad \|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Durch diese Konvergenz wird eine Topologie auf $GL\left(\mathbb{R}^d\right)$ charakterisiert, die ihrerseits die Borelsche σ-Algebra auf $GL\left(\mathbb{R}^d\right)$ erzeugt (vgl. [MS1], Definition 2.1.12).

Definition 2.4.2. (vgl. [MS1], Definition 4.1.1)
Eine Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to GL\left(\mathbb{R}^d\right)$ heißt *regulär variierend in* ∞ *mit Index* $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$, falls für alle $\lambda > 0$

$$\lim_{t\to\infty} f(\lambda t) \circ f(t)^{-1} = \lambda^E \tag{2.4.2}$$

gilt. Falls $E = 0$ ist, heißt f *langsam variierend*.

Satz 2.4.3. (Satz von der gleichmäßigen Konvergenz für regulär variierende (r.v.) Funktionen, vgl. [MS1], Theorem 4.2.1)
Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to GL\left(\mathbb{R}^d\right)$ *regulär variierend in* ∞ *mit Index* E, *so ist die Konvergenz* (2.4.2) *sogar gleichmäßig in* λ *auf allen kompakten Teilmengen von* $(0, \infty)$.

Unter Zuhilfenahme der bereits bekannten Definitionen kann nun auch für Funktionen $F : \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to [0, \infty)$ der Begriff der regulären Variation eingeführt werden:

Definition 2.4.4. (vgl. [MS1], Definition 5.1.1 und Definition 5.1.4)
Eine messbare Funktion $F : \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to [0, \infty)$ heißt *regulär variierend*, wenn es eine regulär variierende Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to GL\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit Index $-E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ und eine regulär variierende Funktion $R : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit Index $\beta \neq 0$ gibt, so dass für alle Folgen $(x_t)_{t\in[0,\infty)}$ von Elementen aus $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ mit $x_t \to x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F\left((f(t))^{-1}(x_t)\right)}{R(t)} =: \varphi(x) > 0 \tag{2.4.3}$$

erfüllt ist. Besitzen alle Eigenwerte von E positiven (negativen) Realteil, so heißt F *regulär variierend in* ∞ (*in* 0). $B = -\frac{1}{\beta} \cdot E$ wird als *Exponent* der Funktion F bezeichnet.

Dass die vorherige Definition plausibel ist, verdeutlicht der folgende Satz:

Satz 2.4.5. (vgl. [MS1], Corollary 4.2.6)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to GL\left(\mathbb{R}^d\right)$ *sei regulär variierend mit Index* $-E$.

(a) *Besitzen alle Eigenwerte von* E *positiven Realteil, so gilt* $\left|(f(t))^{-1}(x)\right| \to \infty$ $(t \to \infty)$ *gleichmäßig in* x *auf allen kompakten Teilmengen von* $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$.
(b) *Besitzen alle Eigenwerte von* E *negativen Realteil, so gilt* $\left|(f(t))^{-1}(x)\right| \to 0$ $(t \to \infty)$ *gleichmäßig in* x *auf allen kompakten Teilmengen von* $\mathbb{R}^d$.

Für das Rechnen mit regulär variierenden Funktionen $F : \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \to [0, \infty)$ gibt es zwei nützliche Abschätzungen:

Satz 2.4.6. (vgl. [MS1], Theorem 5.3.14 und Theorem 5.3.18)
Die Funktion $F : \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \to [0, \infty)$ *sei regulär variierend in* ∞ *mit Exponent* $B = -\frac{1}{\beta} \cdot E$ *für ein* $\beta \neq 0$ *und ein* $-E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$. *Bezeichnen* $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ $(j \leq d)$ *die Eigenwerte von* E*, so definiert man*

$$Q := \max\left\{0, \frac{\beta}{\Re\alpha_1}, \ldots, \frac{\beta}{\Re\alpha_j}\right\} \quad \text{und} \quad q := \min\left\{\frac{\beta}{\Re\alpha_1}, \ldots, \frac{\beta}{\Re\alpha_j}\right\}.$$

(a) Für jede kompakte Menge $S \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ *und jedes hinreichend kleine* $\delta > 0$ *gibt es ein* $r_0 > 0$ *und ein* $M > 1$*, so dass*

$$\frac{F(\lambda r x)}{F(rx)} \leq M \lambda^{Q+\delta} \tag{2.4.4}$$

für alle $r \geq r_0$, $\lambda \geq 1$ *und* $x \in S$ *erfüllt ist.*

(b) Falls $q > 0$ *gilt, gibt es für jede kompakte Menge* $S \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ *und jedes hinreichend kleine* $\delta > 0$ *ein* $r_0 > 0$ *und ein* $0 < C < 1$*, so dass*

$$C\lambda^{q-\delta} \leq \frac{F(\lambda r x)}{F(rx)} \tag{2.4.5}$$

für alle $r \geq r_0$, $\lambda \geq 1$ *und* $x \in S$ *erfüllt ist.*

Schließlich soll noch erwähnt werden, was unter regulär variierenden linearen Operatoren zu verstehen ist:

Definition 2.4.7. (vgl. [MS1], Definition 4.2.8)
Eine Folge $(A_n)_{n\geq 0}$ von invertierbaren linearen Operatoren auf $\mathbb{R}^d$ heißt *regulär variierend mit Index* E für ein $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$, in Zeichen $(A_n)_{n\geq 0} \in RV(E)$, wenn

$$A_{[\lambda n]} \circ A_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda^E \tag{2.4.6}$$

für alle $\lambda \in (0, \infty)$ erfüllt ist.

Satz 2.4.8. (Satz von der gleichmäßigen Konvergenz für regulär variierende (r.v.) lineare Operatoren, vgl. [MS1], Corollary 4.2.11)
Für alle $n \geq 0$ *sei* $A_n \in GL\left(\mathbb{R}^d\right)$. *Falls es einen linearen Operator* $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ *gibt, so dass* $(A_n)_{n\geq 0} \in RV(E)$ *gilt, dann ist die Konvergenz* (2.4.6) *sogar gleichmäßig in* λ *auf allen kompakten Teilmengen von* $(0, \infty)$.

Satz 2.4.9. (vgl. [MS1], Theorem 4.2.9)
Falls für eine Folge $(A_n)_{n\geq 0}$ *von invertierbaren linearen Operatoren auf* $\mathbb{R}^d$ *die Bedingung* $(A_n)_{n\geq 0} \in RV(E)$ *für ein* $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ *erfüllt ist, ist die Funktion*

$$f : \mathbb{R}^+ \to GL\left(\mathbb{R}^d\right),\ t \mapsto A_{[t]},$$

regulär variierend mit dem gleichen Index E.

2.5 Anziehungsbereiche

Definition 2.5.1. (vgl. [MS1], Definition 7.3.1)
Es seien X_n $(n \geq 1)$ und X unabhängige, identisch verteilte Zufallsvektoren mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Ferner sei Y ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor, dessen Verteilung $\mathfrak{L}(Y)$ volle Dimension besitze.

(a) X (bzw. $\mathfrak{L}(X)$) *liegt im Anziehungsbereich von* Y (*bzw.* $\mathfrak{L}(Y)$), in Zeichen $X \in DOA(Y)$ bzw. $\mathfrak{L}(X) \in DOA(\mathfrak{L}(Y))$ (vom englischen „domain of attraction"), wenn es reelle Zahlen $a_n > 0$ $(n \geq 1)$ und Vektoren $b_n \in \mathbb{R}^d$ $(n \geq 1)$ gibt, so dass

$$a_n \sum_{i=1}^{n} X_i + b_n \xrightarrow{\mathfrak{L}} Y \tag{2.5.1}$$

gilt, also

$$\mathfrak{L}(a_n X)^{*(n)} * \delta_{b_n} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(Y) \tag{2.5.2}$$

erfüllt ist.

(b) X (bzw. $\mathfrak{L}(X)$) *liegt im strengen Anziehungsbereich von* Y (*bzw.* $\mathfrak{L}(Y)$), in Zeichen $X \in SDOA(Y)$ bzw. $\mathfrak{L}(X) \in SDOA(\mathfrak{L}(Y))$ (vom englischen „strict domain of attraction"), wenn $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$ gewählt werden kann, wenn also

$$a_n \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathfrak{L}} Y \tag{2.5.3}$$

bzw.

$$\mathfrak{L}(a_n X)^{*(n)} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(Y) \tag{2.5.4}$$

erfüllt ist.

Ersetzt man die reellen Zahlen a_n durch lineare Operatoren $A_n \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$, so gelangt man zu den allgemeineren generalisierten Anziehungsbereichen:

Definition 2.5.2. (vgl. [MS1], Definition 3.3.24)
Es seien X_n $(n \geq 1)$ und X unabhängige, identisch verteilte Zufallsvektoren mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Ferner sei Y ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor, dessen Verteilung $\mathfrak{L}(Y)$ volle Dimension besitze.

(a) X (bzw. $\mathfrak{L}(X)$) *liegt im generalisierten Anziehungsbereich von* Y (*bzw.* $\mathfrak{L}(Y)$), in Zeichen $X \in GDOA(Y)$ bzw. $\mathfrak{L}(X) \in GDOA(\mathfrak{L}(Y))$ (vom englischen „generalized domain of attraction“), wenn es Folgen $(A_n)_{n\geq 1}$ von linearen Operatoren aus $L\left(\mathbb{R}^d\right)$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ von Vektoren aus $\mathbb{R}^d$ gibt, so dass

$$A_n \circ \sum_{i=1}^{n} X_i + b_n \xrightarrow{\mathfrak{L}} Y \tag{2.5.5}$$

gilt, also

$$\left(\mathfrak{L}(X)^{*(n)}\right)^{A_n} * \delta_{b_n} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(Y) \tag{2.5.6}$$

erfüllt ist.

(b) X (bzw. $\mathfrak{L}(X)$) *liegt im strengen generalisierten Anziehungsbereich von* Y (*bzw.* $\mathfrak{L}(Y)$), in Zeichen $X \in SGDOA(Y)$ bzw. $\mathfrak{L}(X) \in SGDOA(\mathfrak{L}(Y))$ (vom englischen „strict generalized domain of attraction“), wenn $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$ gewählt werden kann, wenn also

$$A_n \circ \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathfrak{L}} Y \tag{2.5.7}$$

bzw.

$$\left(\mathfrak{L}(X)^{*(n)}\right)^{A_n} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(Y) \tag{2.5.8}$$

erfüllt ist.

Satz 2.5.3. (vgl. [MS1], Theorem 8.1.5)
Es seien $E \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ und ν ein $\left(t^E\right)$-operator-stabiles Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$.

(a) Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$ mit $\mu \in GDOA(\nu)$, gilt also die Bedingung (2.5.6)*, dann gibt es eine Folge $(B_n)_{n\geq 0} \in RV(-E)$ und eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ von Elementen aus $\mathbb{R}^d$ mit*

$$\left(\mu^{*(n)}\right)^{B_n} * \delta_{a_n} \xrightarrow{w} \nu.$$

(b) Ist ν sogar streng $\left(t^E\right)$-operator-stabil und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d\right)$ mit $\mu \in SGDOA(\nu)$, ist also die Bedingung (2.5.8) *erfüllt, dann gilt sogar*

$$\left(\mu^{*(n)}\right)^{B_n} \xrightarrow{w} \nu$$

für eine Folge $(B_n)_{n\geq 0} \in RV(-E)$.

Kapitel 3

Grenzwertsätze für mehrdimensionale Random Walks in stetiger Zeit

Das vorliegende Kapitel basiert auf dem Artikel „Limit Theorems for Continuous Time Random Walks“ von Mark M. Meerschaert und Hans-Peter Scheffler ([MS2]).

Ziel des Kapitels ist es, das Modell des Random Walk in stetiger Zeit einzuführen (Abschnitt 3.1) und für diesen stochastischen Prozess einen Grenzwertsatz zu beweisen (Abschnitt 3.4). Der Random Walk in stetiger Zeit ist eine Verallgemeinerung des wohlbekannten Random Walk in dem Sinne, dass die Sprünge nach zufälligen Wartezeiten stattfinden. Eine formale Definition wird im ersten Abschnitt angegeben.

3.1 Random Walks in stetiger Zeit

Definition 3.1.1.
Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(J_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von nichtnegativen, unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen sowie $(Y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvektoren mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Es werde angenommen, dass $(J_n)_{n\geq 1}$ und $(Y_n)_{n\geq 1}$ voneinander unabhängig seien. Definiert man nun $T_0 = 0$ und $T_n = \sum_{i=1}^n J_i$ $(n \geq 1)$ sowie $S_0 = 0$ und $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ $(n \geq 1)$, erhält man mittels

$$N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\} \ (t \in [0, \infty)) \tag{3.1.1}$$

den stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$, gegeben durch die auf Ω definierten Zufallsvektoren

$$X_t = S_{N_t} = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i. \tag{3.1.2}$$

$(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ wird als *(mehrdimensionaler) Random Walk in stetiger Zeit* (CTRW, vom englischen „Continuous Time Random Walk“) bezeichnet.

Um diese Definition zu veranschaulichen, stelle man sich ein Teilchen vor, das sich im $\mathbb{R}^d$ bewegt, indem es von einem Ort zum anderen springt. Zu Beginn der Beobachtung befinde sich das Teilchen im Ursprung ($T_0 = 0,\ S_0 = 0$). Nach einer gewissen Zeit verläßt das Teilchen seine Position, indem es springt; dabei hängen weder Richtung noch Weite des Sprungs davon ab, wie lang die Wartezeit vor dem Sprung war. Auch in seiner neuen Position verharrt das Teilchen eine Weile, bevor es erneut den Ort wechselt. Dabei hängt weder die zweite Wartezeit von der ersten noch der zweite Sprung vom ersten ab. Die Wartezeiten werden durch die Zufallsgrößen J_n repräsentiert, T_n gibt also an, wieviel Zeit verstrichen ist, wenn das Teilchen seinen n-ten Sprung durchführt. Die Zufallsvektoren Y_n repräsentieren die Sprünge selbst, S_n gibt also die Position des Teilchens nach dem n-ten Sprung an. Von Bedeutung ist in diesem Modell natürlich die Frage, wo sich das Teilchen zu einem willkürlich gewählten Zeitpunkt $t \in [0,\infty)$ aufhält. Um diese Frage beantworten zu können, muss man sich zunächst einmal klarmachen, wie oft das Teilchen bis zur Zeit t bereits gesprungen ist. Die Zufallsgröße N_t gibt diese Anzahl an. Die Position des Teilchens zum Zeitpunkt t entspricht also seiner Position nach dem N_t-ten Sprung und wird demzufolge durch X_t angegeben. (Zu beachten ist bei diesen Überlegungen, dass X_t für den Fall, dass das Teilchen genau zur Zeit t springt, die Position <u>nach</u> dem Sprung angibt.)

Während des gesamten Kapitels sei $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein CTRW wie in Definition 3.1.1 beschrieben. Ferner seien für jedes $t \geq 0$

$$T_t := \sum_{i=1}^{[t]} J_i \quad \text{und} \quad S_t := \sum_{i=1}^{[t]} Y_i. \tag{3.1.3}$$

Um in Abschnitt 3.4 einen Grenzwertsatz für den geeignet skalierten und transformierten CTRW $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ beweisen zu können, bedarf es einiger Vorarbeit. Zunächst einmal muss die Klasse der Random Walks in stetiger Zeit, die überhaupt betrachtet werden sollen, drastisch eingeschränkt werden, indem Vorgaben bezüglich der Verteilung der J_n und Y_n gemacht werden. Dies geschieht im nächsten Abschnitt und führt zur Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen des geeignet skalierten und transformierten Prozesses $(S_t)_{t\in[0,\infty)}$. Im dritten Abschnitt wird der sogenannte Ersteintritts-Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ eingeführt und gezeigt, dass der geeignet skalierte und transformierte Prozess $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ in Verteilung gegen $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ konvergiert. Mittels dieser Resultate kann schließlich der angestrebte Grenzwertsatz bewiesen werden.

3.2 Verteilungsannahmen

Von nun an werden nur noch Random Walks in stetiger Zeit $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ betrachtet, die der folgenden Verteilungsannahme genügen:

$(V1)$ J_1 (und damit auch J_n für alle $n \geq 1$) liegt im strengen Anziehungsbereich einer streng stabilen Verteilung mit Index $0 < \alpha < 1$.

Diese Annahme bedeutet gemäß Definition 2.5.1, dass es eine Zufallsgröße D auf Ω gibt, deren Verteilung $\mathfrak{L}(D)$ streng α-stabil ist, so dass

$$b_n \sum_{i=1}^{n} J_i \xrightarrow{\mathfrak{L}} D \tag{3.2.1}$$

für geeignete reelle Zahlen $b_n > 0$ $(n \geq 1)$ gilt. Dass $\mathfrak{L}(D)$ streng stabil mit Index α ist, bedeutet im Hinblick auf Definition 2.3.6, dass $\mathfrak{L}(D)$ streng $(t^{\frac{1}{\alpha}})$-operator-stabil ist. (Dabei ist zu beachten, dass $t^{\frac{1}{\alpha}}$ eine Kurzschreibweise für den linearen Operator $\mathbb{R} \ni x \to t^{\frac{1}{\alpha}} \cdot x \in \mathbb{R}$ darstellt. Diese wird in Zukunft häufiger verwendet werden, wenn klar ist, dass es sich um einen linearen Operator handelt.) Die Verteilung von D ist daher wegen Satz 2.3.3 unendlich teilbar und es gilt

$$(\mathfrak{L}(D))^t = \mathfrak{L}(t^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D) \tag{3.2.2}$$

für alle $t \in (0, \infty)$. Betrachtet man nun die aufgrund von Satz 2.3.2 existierende Lebesgue-Dichte g_α von $\mathfrak{L}(D)$, so folgt aus Theorem 4.7.1 und (4.7.13) in [UZ], dass es eine Konstante $K > 0$ gibt, so dass

$$g_\alpha(x) \leq K \cdot x^{\frac{1-\alpha/2}{\alpha-1}} \cdot e^{-|1-\alpha|\cdot\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \tag{3.2.3}$$

für alle hinreichend kleinen $x > 0$ erfüllt ist.

Mittels der Verteilungsannahme (V1) und den daraus resultierenden Folgerungen kann man nun bereits einen ersten Grenzwertsatz beweisen:

Satz 3.2.1.
Es gelte (3.2.1) *für geeignete* $b_n > 0$, *und für* $t \geq 0$ *sei* $b_t = b_{[t]}$.

(a) Die Funktion $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto b_t$, *ist regulär variierend mit Index* $-\frac{1}{\alpha}$.

(b) Es gibt einen stochastischen Prozess $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ *auf* Ω *mit* $\mathfrak{L}(D_1) = \mathfrak{L}(D)$ *derart, dass für alle* $T \subset [0, \infty)$

$$(b_c \cdot T_{ct_1}, \ldots, b_c \cdot T_{ct_k}) \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} (D_{t_1}, \ldots, D_{t_k}) \tag{3.2.4}$$

für alle $k \in \mathbb{N}^*$ *und alle* $t_1, \ldots, t_k \in T$ *erfüllt ist. Die Bedingung* (3.2.4) *kann man auch schreiben als*

$$(b_c \cdot T_{ct})_{t\in[0,\infty)} \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}(T)} (D_t)_{t\in[0,\infty)}.$$

Beweis.
Für jedes $n \geq 1$ sei $A_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $A_n(x) = b_n x$ definiert. Es gilt dann $A_n \in L(\mathbb{R})$ und

$$A_n \circ \sum_{i=1}^{n} J_i = b_n \sum_{i=1}^{n} J_i.$$

Wegen $J_1 \in SDOA(D)$ folgt somit $J_1 \in SGDOA(D)$, so dass Satz 2.5.3 angewendet werden kann. Es gibt also eine Folge $(B_n)_{n\geq 0} \in RV\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$ mit

$$B_n \circ \sum_{i=1}^{n} J_i \xrightarrow{\mathfrak{L}} D.$$

Dabei gilt wegen $B_n \in L(\mathbb{R})$ die Beziehung $B_n(x) = \tilde{b}_n x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $x \in \mathbb{R}$ und geeignete $\tilde{b}_n \in \mathbb{R}$, die wegen Satz 49.1 aus [A] für hinreichend großes n mit den b_n übereinstimmen. Definiert man dann $B_c = B_{[c]}$ für alle $c > 0$, so impliziert Satz 2.4.9, dass die Funktion $\mathbb{R}^+ \ni c \mapsto B_c$ regulär variierend ist, und zwar ebenfalls mit Index $-\frac{1}{\alpha}$. Dies bedeutet gemäß Definition 2.4.2

$$\lim_{c\to\infty} B_{\lambda c} \circ B_c^{-1} = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}$$

für alle $\lambda > 0$ und somit (wähle $x = 1$)

$$\lim_{c\to\infty} \frac{\tilde{b}_{[\lambda c]}}{\tilde{b}_{[c]}} = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{c\to\infty} \frac{b_{\lambda c}}{b_c} = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Es folgt Behauptung (a).

Sei nun $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein (Operator-) Lévy-Prozess auf Ω mit Exponent $\frac{1}{\alpha}$ derart, dass $\mathfrak{L}(D_1) = \mathfrak{L}(D)$ gelte und D_t für jedes $t \in [0, \infty)$ Werte in $\mathbb{R}$ annehme. Da die Funktion $\mathbb{R}^+ \ni c \mapsto B_c$ regulär variierend ist, liefern Satz 2.1.4 („Convergence of Types“) und der Satz von der gleichmäßigen Konvergenz für r.v. Funktionen 2.4.3 die Gültigkeit von

$$B_c \circ T_c \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} D_1. \tag{3.2.5}$$

Seien $s, t \in [0, \infty)$ mit $s < t$ beliebig. Es gilt

$$T_t - T_s = \sum_{i=1}^{[t]} J_i - \sum_{i=1}^{[s]} J_i = \sum_{i=[s]+1}^{[t]} J_i,$$

und diese Zufallsgröße hat die gleiche Verteilung wie $T_{[t]-[s]}$, da $(J_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen ist. Da $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein (Operator-) Lévy-Prozess ist und folglich stationäre, unabhängige Zuwächse besitzt, erhält man

$$\mathfrak{L}(D_t - D_s) = \mathfrak{L}(D_{t-s}) \underset{(*)}{=} \mathfrak{L}((t-s)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D_1), \tag{3.2.6}$$

wobei man $(*)$ wie folgt sieht: Wegen der Operator-Selbstähnlichkeit des Prozesses $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ gibt es gemäß (2.3.9) für alle $t \in [0,\infty)$ ein $d_t \in \mathbb{R}$, so dass

$$\mathfrak{L}(D_{c\tilde{s}}) = \mathfrak{L}\left(c^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D_{\tilde{s}} + d_c\right) = \mathfrak{L}\left(c^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D_{\tilde{s}}\right) * \delta_{d_c}$$

für alle $c > 0$ und $\tilde{s} \in [0,\infty)$ erfüllt ist. Setzt man nun $\tilde{s} = 0$, so folgt wegen $D_0 = 0$

$$\delta_0 = \mathfrak{L}(D_0) = \mathfrak{L}\left(c^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D_0\right) * \delta_{d_c} = \delta_0 * \delta_{d_c},$$

was wegen $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ zu $d_c = 0$ für alle $c > 0$ führt. Mit $\tilde{s} = 1$ und $c = t - s$ folgt schließlich die Behauptung. Wählt man nun noch

$$t_c = \frac{[ct] - [cs]}{c}$$

für $c > 0$, gilt also $t_c \to t - s > 0$ und somit $ct_c \to \infty$ für $c \to \infty$, so erhält man unter erneuter Benutzung von Satz 2.1.4 und Satz 2.4.3

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}\left(B_c \circ (T_{ct} - T_{cs})\right) = \mathfrak{L}\left(B_c \circ T_{[ct]-[cs]}\right) = \mathfrak{L}\left(B_c \circ B_{ct_c}^{-1} \circ B_{ct_c} \circ T_{ct_c}\right) \\ &\xrightarrow[c\to\infty]{w} \mathfrak{L}\left((t-s)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D_1\right) \underset{(3.2.6)}{=} \mathfrak{L}\left(D_t - D_s\right): \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Wegen (3.2.5) konvergiert $B_{ct_c} \circ T_{ct_c}$ in Verteilung gegen D_1, und da $\mathbb{R}^+ \ni c \mapsto B_c$ regulär variierend mit Index $-\frac{1}{\alpha}$ ist, hat man $B_c \circ B_{ct_c}^{-1} \to (t-s)^{\frac{1}{\alpha}}$ für $c \to \infty$.

Seien nun $k \in \mathbb{N}^*$ und $t_1, \ldots, t_k \in [0,\infty)$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ fest und betrachte die $\mathbb{R}^k$-wertigen Zufallsvektoren $(T_{t_i} - T_{t_{i-1}})_{1\le i\le k}$ und $(D_{t_i} - D_{t_{i-1}})_{1\le i\le k}$. Aus der Definition von T_{t_i} und der Unabhängigkeit der J_j $(j \ge 1)$ folgt, dass auch die Komponenten von $(T_{t_i} - T_{t_{i-1}})_{1\le i\le k}$ stochastisch unabhängig sind. Gleiches gilt für die Komponenten von $(D_{t_i} - D_{t_{i-1}})_{1\le i\le k}$, da $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ als (Operator-) Lévy-Prozess unabhängige Zuwächse besitzt und somit $D_{t_i} - D_{t_{i-1}}$ für alle $1 \le i \le k$ unabhängig von $(D_t)_{t\in[0,t_{i-1}]}$ ist. Da wegen (3.2.7) für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$

$$\mathfrak{L}(B_c \circ (T_{ct_i} - T_{ct_{i-1}})) \xrightarrow[c\to\infty]{w} \mathfrak{L}(D_{t_i} - D_{t_{i-1}})$$

erfüllt ist, gilt also auch

$$(B_c \circ (T_{ct_i} - T_{ct_{i-1}}))_{1\le i\le k} \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} (D_{t_i} - D_{t_{i-1}})_{1\le i\le k}$$

(vgl. [Bi], S.26f). Wähle nun $(E, \mathfrak{E}) = (E', \mathfrak{E}') = (\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}^k)$ und definiere die Funktion $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ durch $h(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, x_2+x_1, \ldots, x_k+x_{k-1}+\ldots+x_1)$. Das Continuous Mapping Theorem (Satz 1.2.5) liefert wegen $D_{t_1} - D_{t_0} = D_{t_1}$ und $B_c \circ (T_{ct_1} - T_{ct_0}) = B_c \circ (T_{ct_1} - T_0) = B_c \circ T_{ct_1}$ für alle $c > 0$, dass auch

$$\begin{aligned} &(B_c \circ T_{ct_i})_{1\le i\le k} = h \circ \left(B_c \circ \left(T_{ct_i} - T_{ct_{i-1}}\right)\right)_{1\le i\le k} \\ &\xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} h \circ \left(D_{t_i} - D_{t_{i-1}}\right)_{1\le i\le k} = (D_{t_i})_{1\le i\le k} \end{aligned}$$

gilt. Insgesamt folgt

$$(B_c \circ T_{ct_1}, \dots, B_c \circ T_{ct_k}) \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} (D_{t_1}, \dots, D_{t_k})$$

für alle Mengen $T \subset [0, \infty)$, alle $k \in \mathbb{N}^*$ und alle $t_1, \dots, t_k \in T$. Es folgt die Behauptung, da für alle $\omega \in \Omega$, alle $t \geq 0$ und alle hinreichend großen $c > 0$ die Beziehung $B_c(T_{ct}(\omega)) = B_{[c]}(T_{ct}(\omega)) = b_{[c]} \cdot T_{ct}(\omega) = b_c \cdot T_{ct}(\omega)$ erfüllt ist. □

Der Grenzprozess $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ besitzt einige interessante Eigenschaften:

Satz 3.2.2.
Es sei $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ der in Satz 3.2.1 erhaltene Grenzprozess. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ besitzt stationäre, unabhängige Zuwächse.

(b) $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist selbstähnlich mit Index $H = \frac{1}{\alpha} > 1$, das heißt es gilt

$$\mathfrak{L}(D_{ct_1}, \dots, D_{ct_k}) = \mathfrak{L}(c^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D_{t_1}, \dots, c^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D_{t_k}) \tag{3.2.8}$$

für alle $c > 0$, alle $k \in \mathbb{N}^*$ und alle $t_1, \dots, t_k \in [0, \infty)$.

(c) $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist ein Subordinator, dessen Pfade sogar fast sicher streng monoton wachsend sind. Insbesondere gilt $D > 0$ fast sicher.

(d) Für alle $t \in (0, \infty)$ gilt $\mathfrak{L}(D_t) = \mathfrak{L}(t^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D)$, man hat also wegen (3.2.2) $\mathfrak{L}(D_t) = (\mathfrak{L}(D))^t$.

Beweis.
Die ersten beiden Aussagen sind unmittelbar klar, da $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ wie im Beweis von Satz 3.2.1 erwähnt ein (Operator-) Lévy-Prozess mit Exponent $\frac{1}{\alpha}$ ist und in (2.3.9) $d_c = 0$ für alle $c > 0$ gilt.

Da die Verteilung von D_1 streng stabil mit Index $0 < \alpha < 1$ ist, hat die Fourier-Transformierte von D_1 die Form $e^{\Psi_{D_1}}$ mit Ψ_{D_1} wie in (2.3.8), und es genügt wegen Example 21.7 in [Sa] zu zeigen, dass $\beta = 1$ und $a \geq 0$ gilt. Die Gültigkeit von $\beta = 1$ soll hier nicht gezeigt werden, während aus Theorem 14.15 in [Sa] sofort $a = 0$ folgt, da D_1 streng stabil ist. Insbesondere gilt nun $\mathbb{P}(D_1 > D_0 = 0) = 1$, und wegen $\mathfrak{L}(D_1) = \mathfrak{L}(D)$ folgt dann sofort auch $\mathbb{P}(D > 0) = 1$.

Die letzte Aussage ist lediglich ein Spezialfall von (3.2.8), wobei wiederum $\mathfrak{L}(D) = \mathfrak{L}(D_1)$ zu beachten ist. □

Auf den Zusatz „fast sicher“ kann im Folgenden ohne Einschränkung verzichtet werden. Als positive Zufallsgröße mit streng α-stabiler Verteilung für ein $0 < \alpha < 1$ besitzt D die Laplace-Transformierte $\varphi_D(s) = e^{-cs^\alpha}$ $(s \in [0, \infty))$ für ein $c \in [0, \infty)$, wobei ohne Einschränkung $c = 1$ angenommen werden kann; es gilt also für alle $s \in [0, \infty)$

$$\varphi_D(s) = e^{-s^\alpha} \tag{3.2.9}$$

(vgl. den Abschnitt nach Definition 2.3.6).

Gemäß Satz 3.2.1 ist die Funktion $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto b_t$, regulär variierend mit Index $-\frac{1}{\alpha}$. Es gibt daher eine langsam variierende Funktion $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ derart, dass $b_t = t^{-\frac{1}{\alpha}} L(t)$ für alle $t > 0$ gilt. In diesem Zusammenhang sind außerdem zwei weitere Aussagen klar:

Satz 3.2.3.

(a) Die Funktion $\frac{1}{b} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ t \mapsto \frac{1}{b_t}$, ist regulär variierend mit Index $\frac{1}{\alpha}$.

(b) Es gibt eine Funktion $\tilde{b} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, die regulär variierend mit Index α ist und die Bedingung

$$\frac{1}{t \cdot b_{\tilde{b}(t)}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1 \quad \textit{bzw.} \quad t \cdot b_{\tilde{b}(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1 \tag{3.2.10}$$

erfüllt.

Beweis.

(a) Für alle $t > 0$ gilt

$$\frac{1}{b_t} = t^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{L(t)} \ ,$$

und mit L ist auch

$$\frac{1}{L} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ t \mapsto \frac{1}{L(t)} \ ,$$

langsam variierend.

(b) Die Behauptung folgt sofort mit Satz 2.4.1.

□

Bevor eine weitere Verteilungsannahme (diesmal in Bezug auf $(Y_n)_{n\geq 1}$) getroffen wird, soll noch ein zweiter Grenzwertsatz angeben werden, in dem $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ ebenfalls als Grenzprozess auftritt. Sein Beweis ähnelt dem von Satz 3.2.1 und wird deshalb hier nicht geführt.

Satz 3.2.4.

Es seien b_t $(t \in [0,\infty))$ und $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ wie in Satz 3.2.1. Ist dann $|k(c)| \leq M$ für alle $c > 0$ und eine geeignete Konstante $M > 0$, so gilt für alle $T \subset [0,\infty)$

$$(b_c \cdot T_{[ct]+k(c)})_{t\in[0,\infty)} \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}(T)} (D_t)_{t\in[0,\infty)}. \tag{3.2.11}$$

Von nun an werden nur noch Random Walks in stetiger Zeit $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ betrachtet, die neben der Verteilungsannahme $(V1)$ auch der folgenden Annahme genügen:

($V2$) Y_1 (und damit auch Y_n für alle $n \geq 1$) liegt im strengen generalisierten Anziehungsbereich einer operator-stabilen Verteilung.

Diese Annahme bedeutet gemäß Definition 2.5.2, dass es einen $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvektor A auf Ω gibt, dessen Verteilung $\mathfrak{L}(A)$ operator-stabil ist, so dass

$$C_n \circ \sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{\mathfrak{L}} A \tag{3.2.12}$$

für geeignete lineare Operatoren $C_n \in L(\mathbb{R}^d)$ $(n \geq 1)$gilt. Dass $\mathfrak{L}(A)$ operator-stabil ist, bedeutet im Hinblick auf Definition 2.3.1 nichts anderes, als dass die Verteilung volle Dimension besitzt und (3.2.12) erfüllt ist; man erkennt sofort, dass $\mathfrak{L}(A)$ sogar streng operator-stabil ist. Wegen Satz 2.3.3 ist $\mathfrak{L}(A)$ unendlich teilbar und es gibt einen linearen Operator $E \in L(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$(\mathfrak{L}(A))^t = \mathfrak{L}(t^E \circ A) \tag{3.2.13}$$

für alle $t > 0$ gilt, $\mathfrak{L}(A)$ ist also insbesondere streng (t^E)-operator-stabil. Satz 2.5.3 liefert schließlich die Existenz einer Folge $(F_n)_{n\geq 0} \in RV(-E)$ mit

$$F_n \circ \sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{\mathfrak{L}} A, \tag{3.2.14}$$

wobei wegen Satz 2.4.9 die Funktion $F : \mathbb{R}^+ \to GL(\mathbb{R}^d),\ t \mapsto F_t := F_{[t]}$ regulär variierend mit Index $-E$ ist. Gemäß Definition 2.4.2 gilt also für alle $\lambda > 0$

$$\lim_{t\to\infty} F_{\lambda t} \circ F_t^{-1} = \lambda^{-E}.$$

Mittels der Verteilungsannahme (V2) und den daraus resultierenden Folgerungen kann man erneut einen Grenzwertsatz beweisen, der sich mit der Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen des geeignet skalierten und transformierten Prozesses $(S_t)_{t\in[0,\infty)}$ beschäftigt:

Satz 3.2.5.
Es gibt einen stochastischen Prozess $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ auf Ω mit $\mathfrak{L}(A_1) = \mathfrak{L}(A)$ derart, dass für alle $T \subset [0,\infty)$

$$(F_c \circ S_{ct_1}, \ldots, F_c \circ S_{ct_k}) \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} (A_{t_1}, \ldots, A_{t_k}) \tag{3.2.15}$$

für alle $k \in \mathbb{N}^*$ und alle $t_1, \ldots t_k \in T$ erfüllt ist. Die Bedingung (3.2.15) kann man auch schreiben als

$$(F_c \circ S_{ct})_{t\in[0,\infty)} \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}(T)} (A_t)_{t\in[0,\infty)}.$$

Beweis.
Es sei $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Operator-Lévy-Prozess auf Ω mit Exponent E derart, dass $\mathfrak{L}(A_1) = \mathfrak{L}(A)$ gelte und A_t für jedes $t \in [0,\infty)$ Werte in $\mathbb{R}^d$ annehme. Analog zum Beweis von Satz 3.2.1 kann man zeigen, dass

$$\mathfrak{L}(F_c \circ S_c) \xrightarrow[c\to\infty]{w} \mathfrak{L}(A_1)$$

gilt, und dass für alle $s,t \in [0,\infty)$ mit $s < t$ sowohl $\mathfrak{L}(S_t - S_s) = \mathfrak{L}(S_{[t]-[s]})$ als auch

$$\mathfrak{L}(A_t - A_s) = \mathfrak{L}(A_{t-s}) \underset{(*)}{=} \mathfrak{L}((t-s)^E \circ A_1)$$

erfüllt sind, wobei man $(*)$ hier wie folgt begründen kann: Wegen der Operator-Selbstähnlichkeit von $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ gibt es gemäß (2.3.9) für alle $t \in [0,\infty)$ ein $d_t \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\mathfrak{L}(A_{c\tilde{s}}) = \mathfrak{L}(c^E \circ A_{\tilde{s}} + d_c) = \mathfrak{L}(c^E \circ A_{\tilde{s}}) * \delta_{d_c}$$

für alle $c > 0$ und alle $\tilde{s} \in [0,\infty)$. Setzt man nun $\tilde{s} = 0$ und beachtet $A_0 = 0$, so folgt

$$\delta_0 = \mathfrak{L}(A_0) = \mathfrak{L}(c^E \circ A_0) * \delta_{d_c} = \delta_0^{c^E} * \delta_{d_c}.$$

Sei jetzt $A' \in \mathfrak{B}^d$ beliebig. Da c^E ein linearer Operator auf $\mathbb{R}^d$ ist, gilt $c^E(0) = 0$ und somit

$$\begin{aligned}
\delta_0^{c^E}(A') = \delta_0\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d :\ c^E(x) \in A'\right\}\right) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } c^E(0) \in A' \\ 0 & \text{falls } c^E(0) \notin A' \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in A' \\ 0 & \text{falls } 0 \notin A' \end{cases} \\
&= \delta_0(A').
\end{aligned}$$

Man hat also $\delta_0 = \delta_0 * \delta_{d_c}$, woraus wegen $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ $(a, b \in \mathbb{R}^d)$ für alle $c > 0$ $d_c = 0$ folgt. Mit $\tilde{s} = 1$ und $c = t - s$ erhält man schließlich $(*)$. Analog zum Beweis von Satz 3.2.1 erkennt man dann, dass sowohl

$$\mathfrak{L}(F_c \circ (S_{ct} - S_{cs})) \xrightarrow[c\to\infty]{w} \mathfrak{L}(A_t - A_s)$$

für alle $s,t \in [0,\infty)$ mit $s < t$ als auch

$$\mathfrak{L}\left(F_c \circ \left(S_{ct_i} - S_{ct_{i-1}}\right)\right)_{1\le i\le k} \xrightarrow[c\to\infty]{w} \mathfrak{L}(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})_{1\le i\le k}$$

für jede Wahl $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty$ erfüllt sind. Das Continuous Mapping Theorem (Satz 1.2.5) liefert schließlich mit $(E, \mathfrak{E}) = (E', \mathfrak{E}') = \left(\mathbb{R}^{kd}, \mathfrak{B}^{kd}\right)$ und $h : \mathbb{R}^{kd} \to \mathbb{R}^{kd}$, $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, x_2 + x_1, \ldots, x_k + x_{k-1} + \ldots + x_1)$, die Gültigkeit von

$$(F_c \circ S_{ct_i})_{1\le i\le k} \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} (A_{t_i})_{1\le i\le k}\,.$$

Es folgt die Behauptung. □

Der soeben erhaltene Grenzprozess $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ besitzt ähnliche Eigenschaften wie der Grenzprozess $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ aus Satz 3.2.1:

Satz 3.2.6.
Es sei $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ der in Satz 3.2.5 erhaltene Grenzprozess. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ hat stationäre, unabhängige Zuwächse.

(b) Für alle $t > 0$ gilt $\mathfrak{L}(A_t) = (\mathfrak{L}(A))^t = \mathfrak{L}(t^E \circ A)$.

(c) $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist stetig in Verteilung.

(d) $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist operator-selbstähnlich mit Exponent E, das heißt es gilt

$$\mathfrak{L}(A_{ct_1}, \ldots, A_{ct_k}) = \mathfrak{L}(c^E \circ A_{t_1}, \ldots, c^E \circ A_{t_k}) \tag{3.2.16}$$

für alle $c > 0$, alle $k \in \mathbb{N}^*$ und alle $t_1, \ldots, t_k \in [0,\infty)$.

(e) Für jedes $t > 0$ besitzt die Verteilung $(\mathfrak{L}(A))^t$ von A_t eine beschränkte Lebesgue-Dichte p_t, für die partielle Ableitungen aller Ordnungen existieren.

Beweis.
$(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist wie im Beweis von Satz 3.2.5 erwähnt ein Operator-Lévy-Prozess mit Exponent E, daher sind die erste und die dritte Aussage sofort klar. Ferner folgt unmittelbar, dass $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ operator-selbstähnlich mit Exponent E ist. Da wie in besagtem Beweis gezeigt in (2.3.9) $d_c = 0$ für alle $c > 0$ gilt, ist auch die vierte Aussage klar.

Für Teil (b) bleibt wegen (3.2.13) zu zeigen, dass $\mathfrak{L}(A_t) = \mathfrak{L}(t^E \circ A)$ für alle $t > 0$ gilt. Sei dazu $t \in (0,\infty)$ beliebig. Aufgrund von (3.2.16) hat man $\mathfrak{L}(A_{ct'}) = \mathfrak{L}(c^E \circ A_{t'})$ für alle $c > 0$ und $t' \geq 0$, die Behauptung folgt also mit $t' = 1$ und $c = t$ wegen $\mathfrak{L}(A) = \mathfrak{L}(A_1)$: Es gilt $\mathfrak{L}(A_t) = \mathfrak{L}(t^E \circ A_1) = \mathfrak{L}(t^E \circ A)$.

Für die fünfte Aussage genügt es im Hinblick auf Satz 2.3.5 nachzuweisen, dass es einen linearen Operator $B \in L(\mathbb{R}^d)$ gibt, so dass die Verteilung des $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvektors A (t^B)-operator-stabil ist. Diese Bedingung ist aber wie bereits im Abschnitt vor Satz 3.2.5 gezeigt mit $B := E$ erfüllt, was den Beweis abschließt. □

Der folgende Satz stellt einen entscheidenden Zusammenhang zwischen den in diesem Abschnitt behandelten stochastischen Prozessen und dem in Kapitel 1 untersuchten Skorokhod-Raum her:

Satz 3.2.7.
Es seien $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ und $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ die in Satz 3.2.1 bzw. Satz 3.2.5 eingeführten stochastischen Prozesse. Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass

(i) alle Pfade der Prozesse $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ und $(T_t)_{t\in[0,\infty)}$ in $D([0,\infty),\mathbb{R})$ liegen, es sich bei den beiden Prozessen also um Zufallselemente von $D([0,\infty),\mathbb{R})$ handelt, und dass

(ii) alle Pfade der Prozesse $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ und $(S_t)_{t\in[0,\infty)}$ in $D([0,\infty),\mathbb{R}^d)$ liegen, die beiden Prozesse also Zufallselemente von $(D([0,\infty),\mathbb{R}^d)$ sind.

3.3 Der Ersteintritts-Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Ersteintritts-Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ des (Operator-) Lévy-Prozesses $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$. Am Ende der Überlegungen wird sich herausstellen, dass dieser Prozess der Grenzprozess hinsichtlich der Verteilungskonvergenz des skalierten und transformierten Zählprozesses $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$, der die Anzahl der Sprünge bis zum Zeitpunkt t angibt, ist. Zunächst einmal muss $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ jedoch definiert werden:

Definition 3.3.1.
Es sei $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ der in Satz 3.2.1 erhaltene (Operator-) Lévy-Prozess. Der *Ersteintritts-Prozess* $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ (für $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$) wird definiert durch

$$E_t : \Omega \to [0,\infty),\ E_t(\omega) = \inf\{s \geq 0 : D_s(\omega) > t\}\ \ (t \geq 0). \tag{3.3.1}$$

Bemerkung 3.3.2.
Für jedes $t \geq 0$ ist E_t wohldefiniert, da die Menge $\{s \geq 0 : D_s(\omega) > t\}$ für jedes $\omega \in \Omega$ sowohl nichtleer als auch nach unten beschränkt ist: Da $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ wegen $\mathfrak{L}(D_t) = \mathfrak{L}(t^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D)$ für $t \to \infty$ (fast sicher) gegen ∞ konvergiert, folgt die Behauptung (vgl. auch [Be], S.73).

Von nun an sei $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ der Ersteintritts-Prozess für $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ aus Satz 3.2.1.

Lemma 3.3.3.
Es seien $m \in \mathbb{N}^*$ beliebig und $t_1,\ldots,t_m \in [0,\infty)$ mit $0 \leq t_1 < \ldots < t_m$ sowie $s_1,\ldots,s_m \in [0,\infty)$. Dann gilt

$$\{\omega \in \Omega :\ E_{t_i}(\omega) \leq s_i \textit{ für } 1 \leq i \leq m\} = \{\omega \in \Omega :\ D_{s_i}(\omega) \geq t_i \textit{ für } 1 \leq i \leq m\}.$$

Beweis.
Sei $\omega \in \Omega$ beliebig. Wähle zunächst $t, s \in [0,\infty)$ derart, dass $D_s(\omega) \geq t$ gilt. Da $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ gemäß Satz 3.2.2 streng monoton wachsende Pfade besitzt, folgt $D_{s'}(\omega) > t$ für alle $s' > s$, so dass $E_t(\omega) \leq s$ erfüllt ist. Mittels dieser Überlegung erhält man

$$\{\omega \in \Omega :\ D_{s_i}(\omega) \geq t_i \text{ für } 1 \leq i \leq m\} \subset \{\omega \in \Omega :\ E_{t_i}(\omega) \leq s_i \text{ für } 1 \leq i \leq m\}.$$

Seien nun $t, s \in [0, \infty)$ so gewählt, dass $D_s(\omega) < t$ gilt. Da wegen Satz 3.2.7 die Funktion $[0, \infty) \ni t' \mapsto D_{t'}(\omega)$ rechtsseitig stetig ist, hat man auch für alle $s' > s$, die hinreichend nahe bei s liegen, $D_{s'}(\omega) < t$. Es folgt also – weil $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Subordinator ist – $E_t(\omega) > s$, was

$$\{\omega \in \Omega : \ E_{t_i}(\omega) \leq s_i \text{ für } 1 \leq i \leq m\} \subset \{\omega \in \Omega : \ D_{s_i}(\omega) \geq t_i \text{ für } 1 \leq i \leq m\}$$

impliziert. Insgesamt ergibt sich die Behauptung. □

Eine erste und wichtige Eigenschaft des Ersteintritts-Prozesses liefert der folgende Satz:

Satz 3.3.4.
Der stochastische Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist selbstähnlich mit Index α, das heißt es gilt

$$\mathfrak{L}(E_{ct_1}, \ldots, E_{ct_k}) = \mathfrak{L}(c^\alpha \cdot E_{t_1}, \ldots, c^\alpha \cdot E_{t_k}) \tag{3.3.2}$$

für alle $c > 0$, alle $k \in \mathbb{N}^*$ und alle $t_1, \ldots, t_k \in [0, \infty)$.

Beweis.
Der Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ besitzt aufgrund seiner Definition stetige Pfade. Für alle $\omega \in \Omega$ und alle $t \geq 0$ gilt also $\lim\limits_{s\to t} E_s(\omega) = E_t(\omega)$, was

$$\mathbb{P}\left(\lim_{s\to t} E_s = E_t\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

für alle $t \geq 0$ impliziert. Es folgt für alle $t \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(\lim_{s\to t} E_s - E_t \neq 0\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\lim_{s\to t} E_s - E_t = 0\right) = 1 - 1 = 0,$$

was wegen der Stetigkeit von oben

$$\lim_{s\to t} \mathbb{P}(E_s - E_t \neq 0) = 0$$

für alle $t \geq 0$ bedeutet. Folglich hat man für alle $t \geq 0$ und für alle $\epsilon > 0$

$$\lim_{s\to t} \mathbb{P}(|E_s - E_t| > \epsilon\}) = 0, \tag{3.3.3}$$

das heißt $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist gemäß Definition 1.3.12 stetig in Wahrscheinlichkeit. Sei nun $t \geq 0$ beliebig und wähle eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $[0, \infty)$ mit $t_n \to t$ für $n \to \infty$. Wegen (3.3.3) erhält man für jedes $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|E_{t_n} - E_t| > \epsilon) = 0,$$

$(E_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also in Wahrscheinlichkeit gegen den reellen Limes E_t. Aufgrund von Satz 36.3 aus [A] gilt daher sogar

$$E_{t_n} \xrightarrow{\mathfrak{L}} E_t,$$

der stochastische Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist also stetig in Verteilung. Damit ist bereits ein erster wichtiger Schritt zum Beweis der Selbstähnlichkeit getan.

Seien nun $c > 0$, $m \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_m < \infty$ und $s_1, \ldots, s_m \in [0, \infty)$ beliebig. Es gilt wegen Lemma 3.3.3 und (3.2.8)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(E_{ct_i} \leq s_i \text{ für } 1 \leq i \leq m\right) &= \mathbb{P}\left(D_{s_i} \geq ct_i \text{ für } 1 \leq i \leq m\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left(c^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D_{s_i} \geq t_i \text{ für } 1 \leq i \leq m\right) \\
&= \mathbb{P}\left(D_{c^{-\alpha}s_i} \geq t_i \text{ für } 1 \leq i \leq m\right) \\
&= \mathbb{P}\left(E_{t_i} \leq c^{-\alpha}s_i \text{ für } 1 \leq i \leq m\right) \\
&= \mathbb{P}\left(c^{\alpha} \cdot E_{t_i} \leq s_i \text{ für } 1 \leq i \leq m\right),
\end{aligned}$$

das heißt die Bedingung (2.3.9) ist mit $\alpha I \in L(\mathbb{R})$ und $d_t = 0$ für alle $t \geq 0$ erfüllt, da eine Verteilung durch ihre Verteilungsfunktion eindeutig bestimmt ist. Es folgt die Behauptung. □

Im Folgenden bezeichne $\mathbb{E}X$ für eine Zufallsgröße X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ den Erwartungswert von X, falls dieser existiert; und im Fall $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$ bezeichne $\mathrm{Var}X$ die Varianz von X. Der folgende Satz beinhaltet unter anderem eine Aussage über $\mathbb{E}E_t$ für $t > 0$.

Satz 3.3.5.
Es sei $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ der Ersteintritts-Prozess für $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$. Für jedes $t > 0$ gelten die folgenden Aussagen:

(a)

$$\mathfrak{L}(E_t) = \mathfrak{L}\left(\left(\frac{D}{t}\right)^{-\alpha}\right), \tag{3.3.4}$$

wobei α den Index des selbstähnlichen Prozesses $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ bezeichnet, der mit dem Index der streng stabilen Verteilung von D übereinstimmt.

(b) Für jedes $p > 0$ existiert das p-te Moment von E_t und es gibt eine positive, endliche Konstante $C(\alpha, p) \in (0, \infty)$ mit

$$\mathbb{E}E_t^p = C(\alpha, p) \cdot t^{\alpha p}. \tag{3.3.5}$$

Insbesondere gilt also

$$\mathbb{E}E_t = C(\alpha, 1) \cdot t^{\alpha}. \tag{3.3.6}$$

(c) Die Zufallsgröße E_t besitzt die Lebesgue-Dichte

$$f_t(x) = \frac{t}{\alpha} \cdot x^{-1-\frac{1}{\alpha}} \cdot g_\alpha\left(tx^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \ (x \in \mathbb{R}^+) \ , \tag{3.3.7}$$

wobei g_α die Lebesgue-Dichte von D bezeichnet.

Beweis.
Sei $t > 0$ beliebig.

(a) Wählt man zusätzlich $s \in (0, \infty)$ beliebig, so liefert Satz 3.2.2 (b) mit $k = 1$, $c = s$ und $t_1 = 1$

$$\mathfrak{L}(D_s) = \mathfrak{L}\left(s^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D_1\right) = \mathfrak{L}\left(s^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D\right).$$

Wegen Lemma 3.3.3 gilt dann

$$\mathbb{P}(E_t \leq s) = \mathbb{P}(D_s \geq t) = \mathbb{P}\left(s^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D \geq t\right) = \mathbb{P}\left(\left(\frac{D}{t}\right)^{-\alpha} \leq s\right),$$

woraus die Behauptung folgt, da eine Verteilung durch ihre Verteilungsfunktion eindeutig bestimmt ist. Dabei ist zu beachten, dass D und damit auch $\left(\frac{D}{t}\right)^{-\alpha}$ positiv sind, und dass wegen $D_0 = 0$ und weil die Pfade von $(D_t)_{t \in [0,\infty)}$ streng monoton wachsend sind $E_t(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt, was die ausschließliche Betrachtung von $s \in (0, \infty)$ rechtfertigt.

(b) Man definiert zunächst die Funktion $H_t : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ durch

$$H_t(y) = \left(\frac{y}{t}\right)^{-\alpha}.$$

H_t ist messbar bezüglich der Borelschen σ-Algebren und aus Teil (a) folgt $\mathfrak{L}(E_t) = \mathfrak{L}(H_t \circ D)$. Sei nun $p > 0$ beliebig. Es gilt dann aufgrund des Transformationssatzes

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}E_t^p &= \int_\Omega E_t^p \, d\mathbb{P} = \int_0^\infty x^p \, \mathbb{P}^{E_t}(dx) = \int_0^\infty x^p \, \mathbb{P}^{H_t \circ D}(dx) \\
&= \int_0^\infty x^p \, \left(\mathbb{P}^D\right)^{H_t}(dx) = \int_0^\infty (H_t(x))^p \, \mathbb{P}^D(dx) \\
&= \int_0^\infty (H_t(x))^p \cdot g_\alpha(x) \, dx \\
&= t^{\alpha p} \int_0^\infty x^{-\alpha p} \cdot g_\alpha(x) \, dx = C(\alpha, p) \cdot t^{\alpha p}
\end{aligned}$$

mit

$$C(\alpha, p) := \int_0^\infty x^{-\alpha p} \cdot g_\alpha(x) \, dx. \tag{3.3.8}$$

Es bleibt zum Beweis von (b) noch zu zeigen, dass $C(\alpha,p) \in (0,\infty)$ gilt: Da es sich bei g_α um eine Lebesgue-Dichte handelt, gilt für alle $x \in [0,\infty)$ $0 \le g_\alpha(x) \le 1$, es ist also aufgrund der Definition sofort klar, dass $C(\alpha,p)$ positiv ist. Für $x \to \infty$ ergibt sich $x^{-\alpha p} \cdot g_\alpha(x) \to 0$, da g_α beschränkt ist. Um das Verhalten des Integranden für $x \to 0$ untersuchen zu können, erinnere man sich daran, dass im Hinblick auf (3.2.3) für kleine $x > 0$ die Ungleichung

$$0 \le g_\alpha(x) \le K \cdot x^{\frac{1-\alpha/2}{\alpha-1}} \cdot e^{-|1-\alpha|\cdot\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$$

erfüllt ist. Wegen $0 < \alpha < 1$ gilt

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} < 0,$$

daher konvergiert der Exponentialterm für $x \to 0$ gegen 0. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, ergibt sich $g_\alpha(x) \to 0$ für $x \to 0$ und sogar

$$\lim_{x\to 0} x^{-\alpha p} \cdot g_\alpha(x) = 0.$$

Insgesamt kann man folgern, dass $C(\alpha,p) < \infty$ gilt.

(c) Wegen $\mathfrak{L}(E_t) = \mathfrak{L}(H_t \circ D)$ und da die Funktion $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto H_t^{-1}(x) = tx^{-\frac{1}{\alpha}}$ streng monoton fallend ist, erhält man mittels der Kettenregel für alle $x > 0$

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \frac{d}{dx}\,\mathbb{P}(E_t \le x) = \frac{d}{dx}\,\mathbb{P}(H_t \circ D \le x) = \frac{d}{dx}\,\mathbb{P}(D \ge H_t^{-1}(x)) \\ &= \frac{d}{dx}\,\left(1 - \mathbb{P}\left(D < H_t^{-1}(x)\right)\right) = \frac{d}{dx}\,\left(1 - \mathbb{P}\left(D \le H_t^{-1}(x)\right)\right) \\ &= -\left[\frac{d}{dx}\,H_t^{-1}(x)\right] \cdot g_\alpha(H_t^{-1}(x)) = -\left[\frac{d}{dx}\,\left(tx^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right] \cdot g_\alpha(H_t^{-1}(x)) \\ &= \frac{t}{\alpha} \cdot x^{-1-\frac{1}{\alpha}} \cdot g_\alpha(tx^{-\frac{1}{\alpha}})\ . \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Auch $\mathrm{Var}E_t$ kann für jedes $t > 0$ leicht berechnet werden:

Satz 3.3.6.
Es sei $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ der Ersteintritts-Prozess für $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$. Für jedes $t > 0$ existiert die Varianz von E_t und ist sogar endlich, genauer gilt

$$\mathrm{Var}E_t = \left(C(\alpha,2) - (C(\alpha,1))^2\right) \cdot t^{2\alpha}. \tag{3.3.9}$$

Beweis.
Sei $t > 0$ beliebig. Die Zufallsgröße E_t besitzt wegen Satz 3.3.5(b) den endlichen Erwartungswert $\mathbb{E}E_t = C(\alpha,1)\cdot t^\alpha$, die Varianz von E_t ist also definiert. Aufgrund

des Verschiebungssatzes gilt $\mathrm{Var}E_t = \mathbb{E}E_t^2 - (\mathbb{E}E_t)^2$, und da wegen (3.3.5) auch $\mathbb{E}E_t^2$ endlich ist, gilt $\mathrm{Var}E_t < \infty$. Genauer hat man

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}E_t &= \mathbb{E}E_t^2 - (\mathbb{E}E_t)^2 \\ &\underset{(3.3.5)}{=} C(\alpha,2)\cdot t^{2\alpha} - (C(\alpha,1)\cdot t^{\alpha})^2 \\ &= \big(C(\alpha,2) - (C(\alpha,1))^2\big)\cdot t^{2\alpha}, \end{aligned}$$

was den Beweis abschließt. □

Die spezielle Gestalt von $\mathbb{E}E_t$ $(t > 0)$ kann man ausnutzen, um zu weiteren Ergebnissen zu gelangen:

Satz 3.3.7.
Der Ersteintritts-Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ *für* $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ *besitzt keine stationären Zuwächse.*

Beweis.
Es werde angenommen, dass $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ doch stationäre Zuwächse habe. In diesem Fall gilt $\mathbb{E}E_n = \mathbb{E}(E_1 + (E_2 - E_1) + \ldots + (E_n - E_{n-1})) = n\cdot\mathbb{E}E_1 = C(\alpha,1)\cdot n$ für jede ganze Zahl $n > 0$, was wegen $\alpha \neq 1$ im Widerspruch zu (3.3.6) steht. $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ kann also keine stationären Zuwächse besitzen. □

Eine letzte Eigenschaft des Ersteintritts-Prozesses liefert der folgende Satz, dessen Beweis einige Arbeit erfordert und auf die Ergebnisse über den stabilen Subordinator aus Kapitel 2 zurückgreift.

Satz 3.3.8.
Der Ersteintritts-Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ *für* $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ *hat keine unabhängigen Zuwächse.*

Beweis.
Es seien $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \infty$ beliebig und es werde angenommen, dass der Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ doch unabhängige Zuwächse besitze. Unter Berücksichtigung von $\mathbb{E}E_t = C(\alpha,1)\cdot t^{\alpha}$ $(t > 0)$ und der Tatsache, dass die Zufallsgröße E_t für jedes $t > 0$ Momente beliebiger (positiver) Ordnung besitzt, folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((E_{t_3} - E_{t_2})\cdot(E_{t_2} - E_{t_1})) &= \mathbb{E}(E_{t_3} - E_{t_2})\cdot\mathbb{E}(E_{t_2} - E_{t_1}) \\ &= (\mathbb{E}E_{t_3} - \mathbb{E}E_{t_2})\cdot(\mathbb{E}E_{t_2} - \mathbb{E}E_{t_1}) \\ &= (C(\alpha,1))^2\cdot\big((t_3t_2)^{\alpha} - (t_3t_1)^{\alpha} - t_2^{2\alpha} + (t_2t_1)^{\alpha}\big) \\ &=: R(t_1,t_2,t_3). \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite hat man

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((E_{t_3} - E_{t_2}) \cdot (E_{t_2} - E_{t_1})) &= \mathbb{E}(E_{t_3}E_{t_2} - E_{t_3}E_{t_1} - E_{t_2}^2 + E_{t_2}E_{t_1}) \\ &= \mathbb{E}(E_{t_3}E_{t_2}) - \mathbb{E}(E_{t_3}E_{t_1}) - \mathbb{E}E_{t_2}^2 + \mathbb{E}(E_{t_2}E_{t_1}) \\ &=: L(t_1, t_2, t_3),\end{aligned}$$

$R(t_1, t_2, t_3)$ und $L(t_1, t_2, t_3)$ stimmen also überein. Im nächsten Schritt sollen die partiellen Ableitungen der Funktionen R und L berechnet werden, wobei zunächst nach t_2 und anschließend nach t_1 abgeleitet wird. Im Fall der Funktion R geht das mittels Anwendung der bekannten Differentiationsregeln sehr einfach:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_1 \partial t_2} &= \frac{\partial}{\partial t_1}\left((C(\alpha, 1))^2 \cdot \left(\alpha t_3^\alpha t_2^{\alpha-1} - 2\alpha t_2^{2\alpha-1} + \alpha t_2^{\alpha-1} t_1^\alpha\right)\right) \\ &= (C(\alpha, 1))^2\, \alpha^2 (t_2 t_1)^{\alpha-1}\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Im Fall der Funktion L bedarf es zunächst einiger Vorüberlegungen:

- Der Prozess $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist der stabile Subordinator mit Parameter α im Sinne von Definition 2.2.5.
- $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist das Inverse von $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$.

Diese beiden Aussagen kann man wie folgt begründen: Der stochastische Prozess $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ besitzt gemäß Satz 3.2.2 sowohl stationäre, unabhängige Zuwächse als auch streng monoton wachsende Pfade (und somit wegen $D_0 = 0$ den Zustandsraum $[0, \infty)$). Seien nun $s, t \in [0, \infty)$ und $\omega \in \Omega$ beliebig. Wegen $t + s \geq t$ gilt dann aber $D_{t+s}(\omega) \geq D_t(\omega)$ und folglich auch $D_{t+s}(\omega) - D_t(\omega) \geq 0$, das heißt $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ besitzt nichtnegative Zuwächse. Es bleibt also für die erste Aussage zu zeigen, dass $\mathbb{E}e^{-sD_t} = e^{-ts^\alpha}$ für alle $s, t \in [0, \infty)$ erfüllt ist. Für $t = 0$ ist die Behauptung klar. Sei von jetzt an $t \in (0, \infty)$ beliebig. Der Definitionsbereich der analytischen Transformierten von D_t besitzt wegen Lemma 40.2 aus [A] die Form $\mathfrak{R} + i\mathbb{R}$ für ein Intervall $\mathfrak{R}$ in $\mathbb{R}$, wobei $(-\infty, 0] \subset \mathfrak{R}$ gilt, da $\mathfrak{L}(D_t)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, \infty)$ ist. Für jedes $s \in [0, \infty)$ ist daher die Laplace-Transformierte φ_{D_t} von D_t definiert, und zwar durch $\varphi_{D_t}(s) = \mathbb{E}e^{-sD_t}$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\varphi_{D_t}(s) = e^{-ts^\alpha}$ für alle $s \in [0, \infty)$ erfüllt ist. Satz 3.2.2(d) liefert $\mathfrak{L}(D_t) = \mathfrak{L}(t^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D)$, daher stimmen die Laplace-Transformierten der beiden Zufallsgrößen D_t und $t^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D$ überein. Aus Satz 42.1 in [A] ergibt sich somit für alle $s \in [0, \infty)$

$$\varphi_{D_t}(s) = \varphi_{t^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D}(s) = \varphi_D(t^{\frac{1}{\alpha}} s) = e^{-ts^\alpha},$$

wobei die letzte Gleichheit aus (3.2.9) folgt. Der Prozess $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ besitzt somit alle Eigenschaften des stabilen Subordinators mit Parameter α.

Dass $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ und $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ zueinander invers sind, sieht man wie folgt: Sowohl $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ als auch $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ besitzen aufgrund früherer Überlegungen rechtsseitig stetige Pfade (vergleiche Satz 3.2.7(i) und den Beweis von Satz 3.3.4), ferner sind die Pfade von $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ wegen Satz 3.2.2 streng monoton wachsend. Sei nun $\omega \in \Omega$ beliebig und wähle $s, s' \in [0,\infty)$ mit $s < s'$. Es gilt $E_s(\omega) = \inf\{t \geq 0 : D_t(\omega) > s\} \leq \inf\{t \geq 0 : D_t(\omega) > s'\} = E_{s'}(\omega)$, das heißt auch die Pfade von $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ sind monoton wachsend. Ferner hat man für jedes $t \in [0,\infty)$ und jedes $\omega \in \Omega$ aufgrund der Tatsache, dass $[0,\infty) \ni t' \mapsto D_{t'}(\omega)$ streng monoton wachsend ist,

$$E_t(\omega) = \inf\{s \geq 0 : D_s(\omega) > t\} = \sup\{s \geq 0 : D_s(\omega) \leq t\},$$

das heißt $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist das Inverse von $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$.

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 2.2.6 erfüllt und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1 \partial t_2} &= \frac{\partial^2(\mathbb{E}(E_{t_3}E_{t_2}) - \mathbb{E}(E_{t_3}E_{t_1}) - \mathbb{E}E_{t_2}^2 + \mathbb{E}(E_{t_2}E_{t_1}))}{\partial t_1 \partial t_2} \\
&= \frac{\partial^2\, \mathbb{E}(E_{t_1}E_{t_2})}{\partial t_1 \partial t_2} = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 (t_1(t_2-t_1))^{\alpha-1} \qquad (3.3.11) \\
&= \Gamma(\alpha)^{-2}(t_1t_2)^{\alpha-1}\left(1 - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)\right)^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Wegen $R(t_1,t_2,t_3) = L(t_1,t_2,t_3)$ müssen nun aber auch die Ausdrücke auf der rechten Seite von Gleichung (3.3.10) und auf der rechten Seite von Gleichung (3.3.11) übereinstimmen, was zum Widerspruch führt, da $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \infty$ beliebig gewählt waren. Der Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ kann also keine unabhängigen Zuwächse besitzen. □

Um nun auch einen Grenzwertsatz für den Zählprozess $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ beweisen zu können, bedarf es einer letzten Vorüberlegung, die allerdings offensichtlich ist.

Satz 3.3.9.
Es seien $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ wie in Definition 3.1.1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $t \in [0,\infty)$ gilt

$$\{\omega \in \Omega : T_n(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega : N_t(\omega) \geq n\}. \qquad (3.3.12)$$

Satz 3.3.10.
Es seien $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ der Zählprozess aus Definition 3.1.1, $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ der Ersteintritts-Prozess für $(D_t)_{t\in[0,\infty)}$ und $\tilde{b} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ die in Satz 3.2.3 erhaltene Funktion. Für jedes $T \subset [0,\infty)$ gilt

$$\left(\frac{1}{\tilde{b}(c)} \cdot N_{ct_1}, \ldots, \frac{1}{\tilde{b}(c)} \cdot N_{ct_k}\right) \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} (E_{t_1}, \ldots, E_{t_k}) \qquad (3.3.13)$$

für alle $k \in \mathbb{N}^*$ und jede Wahl $t_1, \ldots, t_k \in T$. Die Bedingung (3.3.13) *kann man auch schreiben als*

$$\left(\frac{1}{\tilde{b}(c)} \cdot N_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)} \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}(T)} (E_t)_{t\in[0,\infty)}.$$

Beweis.
Es seien $k \in \mathbb{N}^*$, $0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty$ und $s_1, \ldots, s_m \in [0, \infty)$ beliebig. Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichne $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist. Wegen Satz 3.3.9 gilt für jedes $x \geq 0$ und jedes $t \in [0, \infty)$

$$\{\omega \in \Omega : N_t(\omega) \geq x\} = \{\omega \in \Omega : N_t(\omega) \geq \lceil x \rceil\} = \{\omega \in \Omega : T_{\lceil x \rceil}(\omega) \leq t\}$$

bzw.

$$\{\omega \in \Omega : N_t(\omega) < x\} = \{\omega \in \Omega : T_{\lceil x \rceil}(\omega) > t\}.$$

Beachtet man außerdem, dass $\mathfrak{L}(D_t)$ für alle $t > 0$ stetig ist, da wegen Satz 3.2.2(d) $\mathfrak{L}(D_t) = \mathfrak{L}(t^{\frac{1}{\alpha}} \cdot D)$ gilt und D ferner die Lebesgue-Dichte g_α besitzt, so folgt unter Beachtung von $\mathfrak{L}(D_0) = \delta_0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{1}{\tilde{b}(c)} \cdot N_{ct_i} < s_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(N_{ct_i} < \tilde{b}(c) s_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T_{\lceil \tilde{b}(c) s_i \rceil} > c t_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(b_{\tilde{b}(c)} T_{\lceil \tilde{b}(c) s_i \rceil} > b_{\tilde{b}(c)} c t_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\right) \\
&\xrightarrow[c \to \infty]{(*)} \mathbb{P}\left(D_{s_i} > t_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\right) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left(D_{s_i} \geq t_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\right) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left(E_{t_i} \leq s_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\right) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left(E_{t_i} < s_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\right).
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $(*)$ ergibt sich dabei wegen $c b_{\tilde{b}(c)} \to 1$ für $c \to \infty$ (vgl. Satz 3.2.3) aus Satz 3.2.4, die vorletzte Gleichheit gilt im Hinblick auf Lemma 3.3.3 und der letzte Schritt ist zulässig, da gemäß Satz 3.3.5(c) E_t für jedes $t > 0$ eine Lebesgue-Dichte besitzt. Es folgt die Behauptung. $\square$

Das soeben erhaltene Ergebnis soll im Folgenden noch verbessert werden. Dazu beachte man zunächst, dass die Pfade der Prozesse $(E_t)_{t \in [0,\infty)}$ und

$$N^c := \left(\frac{1}{\tilde{b}(c)} \cdot N_{ct}\right)_{t \in [0,\infty)}$$

für beliebiges $c > 0$ Funktionen auf $[0, \infty)$ mit Werten in $[0, \infty)$ sind. Ferner besitzt $(E_t)_{t \in [0,\infty)}$ stetige Pfade, und aufgrund der Definition des Zählprozesses $(N_t)_{t \in [0,\infty)}$ ist unmittelbar klar, dass dessen Pfade rechtsseitig stetig sind und in jedem $t \in (0, \infty)$ einen linksseitigen Limes besitzen. Zusammengefasst kann man sagen, dass für jedes $\omega \in \Omega$ und $c > 0$ sowohl $[0, \infty) \ni t \mapsto E_t(\omega)$ als auch $[0, \infty) \ni t \mapsto N_t^c(\omega)$ Elemente von $D([0, \infty), \mathbb{R})$ sind.

Satz 3.3.11.
Sind $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$, $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ *und* $\tilde{b}$ *so wie in Satz 3.3.10, dann gilt sogar*

$$\left(\frac{1}{\tilde{b}(c)}\cdot N_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)} \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} (E_t)_{t\in[0,\infty)}.$$

Beweis.
Kann man zeigen, dass die Bedingungen aus Satz 1.3.13 erfüllt sind, folgt die Behauptung. Wähle dazu zunächst $T\subset[0,\infty)$ beliebig. Satz 3.3.10 impliziert dann sofort

$$\left(\frac{1}{\tilde{b}(c)}\cdot N_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)} \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}(T)} (E_t)_{t\in[0,\infty)}.$$

Im Beweis von Satz 3.3.4 wurde ferner gezeigt, dass der Ersteintritts-Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ stetig in Wahrscheinlichkeit ist. Seien nun also $\omega\in\Omega$ und $c>0$ beliebig. Aus der Definition des Zählprozesses ergibt sich unmittelbar, dass die Funktion

$$[0,\infty)\ni t\mapsto \frac{1}{\tilde{b}(c)}\cdot N_{ct}(\omega)$$

monoton wachsend ist. Es bleibt zu zeigen, dass auch der Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ monoton wachsende Pfade besitzt, was jedoch bereits im Beweis von Satz 3.3.8 geleistet wurde. □

3.4 Ein Grenzwertsatz für den CTRW $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$

In diesem Abschnitt wird das Hauptresultat des vorliegenden Kapitels, nämlich ein Grenzwertsatz für den in Definition 3.1.1 eingeführten skalierten und transformierten Random Walk in stetiger Zeit $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ bewiesen. Zuvor ist jedoch noch einiges an Vorarbeit zu leisten. Begonnen wird mit einem Grenzwertsatz, der das Ergebnis von Satz 3.2.5 erheblich verbessert. Es sei darauf hingewiesen, dass im Hinblick auf Satz 3.2.7 sowohl $(F_n\circ S_{nt})_{t\in[0,\infty)}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ als auch $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ Zufallselemente von $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ sind.

Satz 3.4.1.
Seien $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ *der in Satz 3.2.5 erhaltene Grenzprozess und* $(F_n)_{n\geq 0}\in RV(-E)$ *die Folge von linearen Operatoren auf* $\mathbb{R}^d$*, für die*

$$F_n\circ\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{\mathfrak{L}} A$$

erfüllt ist (*vgl.* (3.2.14)). *Dann gilt*

$$(F_n\circ S_{nt})_{t\in[0,\infty)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathfrak{L}} (A_t)_{t\in[0,\infty)}.$$

Beweis.
Aufgrund von Satz 1.3.8 genügt es zu zeigen, dass

$$(F_n \circ S_{nt})_{t\in[0,\infty)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathfrak{L}(T)} (A_t)_{t\in[0,\infty)} \tag{3.4.1}$$

für alle $T \subset [0,\infty)$ gilt und dass Skorokhods Δ-Bedingung erfüllt ist. Satz 3.2.5 liefert die erste Bedingung, es bleibt daher die Gültigkeit von

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ c\downarrow 0}} \mathbb{P}\left(\sup_{\substack{t-c<t_1<t\le t_2<t+c\\ 0\le t_1<t_2\le N}} (|F_n\circ S_{nt_1} - F_n\circ S_{nt}| \wedge |F_n\circ S_{nt} - F_n\circ S_{nt_2}|) > \epsilon\right) = 0$$

für alle $\epsilon > 0$ und $N > 0$ zu zeigen. Seien dazu $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ beliebig. Wegen (3.4.1) gilt

$$F_n \circ S_n \xrightarrow{\mathfrak{L}} A_1$$

(wähle $T = \{1\}$ und $k = 1$), die Familie $(F_n \circ S_n)_{n\ge 1}$ von Zufallsvektoren mit Werten in $\mathbb{R}^d$ ist daher straff (vgl. Satz 43.3 aus [A]). Es gibt also eine kompakte Teilmenge $K_\delta \subset \mathbb{R}^d$ derart, dass

$$\sup_{n\ge 1} \mathbb{P}(F_n\circ S_n \notin K_\delta) < \delta \tag{3.4.2}$$

gilt. K_δ ist beschränkt und abgeschlossen, es gibt daher ein $R(\delta) > 0$, so dass K_δ vollständig in der abgeschlossenen, d-dimensionalen Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius $R(\delta)$ enthalten ist. Aus (3.4.2) folgt somit

$$\sup_{n\ge 1} \mathbb{P}(|F_n\circ S_n| > R(\delta)) < \delta. \tag{3.4.3}$$

Wähle jetzt im Hinblick auf Satz 2.3.5 unter Beachtung der $\left(t^E\right)$-Operator-Stabilität von $\mathfrak{L}(A)$ ein $c_0(\delta) > 0$ derart, dass für alle $0 < c \le c_0(\delta)$

$$\left\|c^E\right\| < \frac{\epsilon}{2R(\delta)} \tag{3.4.4}$$

gilt, wobei $\|\cdot\|$ die in Definition 2.1.1 eingeführte Norm bezeichnet. Seien nun zusätzlich $N > 0$, $c' \in (0, c_0(\delta))$ und $s,t \in [0,N]$ mit $s < t$ und $t - s \le c'$ beliebig und definiere

$$r_n(s,t) := \left\|F_n \circ F^{-1}_{[nt]-[ns]}\right\|$$

für $n \ge 1$. Es gilt

$$r_n(s,t) = \left\|F_n \circ F^{-1}_{\frac{[nt]-[ns]}{n}\cdot n}\right\| \le \sup_{0\le\lambda\le c'+\frac{1}{n}} \left\|F_n\circ F^{-1}_{\lambda n}\right\| = \left\|F_n \circ F^{-1}_{\lambda_n n}\right\| \tag{3.4.5}$$

für ein

$$\lambda_n \in \left[0, c' + \frac{1}{n}\right],$$

wobei sich der zweite Schritt der Ungleichung folgendermaßen ergibt: Wegen $[nt] - [ns] \leq [n(t-s)] + 1 \leq n(t-s) + 1 \leq nc' + 1$ hat man

$$0 \leq \frac{[nt] - [ns]}{n} \leq c' + \frac{1}{n} ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Für jede Teilfolge $(n_k)_{k\geq 1}$ der natürlichen Zahlen ist die Folge $(\lambda_{n_k})_{k\geq 1}$ wegen $0 \leq \lambda_n \leq c' + \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ beschränkt, aufgrund des Satzes von Bolzano-Weierstraß besitzt $(\lambda_{n_k})_{k\geq 1}$ also eine konvergente Teilfolge $(\lambda_{n_{k_m}})_{m\geq 1}$, die wegen des Vergleichssatzes (Satz 22.1 aus [H]) gegen ein $\lambda \in [0, c']$ konvergiert. Es muss nun zwischen mehreren Fällen unterschieden werden:

<u>Fall 1 :</u> $\lambda > 0$

Nach Voraussetzung gilt $(F_n)_{n\geq 0} \in RV(-E)$, das heißt für alle $\lambda' > 0$ ist

$$F_{[\lambda' n]} \circ F_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} (\lambda')^{-E}$$

erfüllt. Aufgrund des Satzes von der gleichmäßigen Konvergenz für r.v. lineare Operatoren 2.4.8 ist die Konvergenz sogar gleichmäßig in λ' auf allen kompakten Teilmengen von $(0, \infty)$. Die Menge

$$\tilde{\Lambda} := \{\lambda\} \cup \left\{\lambda_{n_{k_m}} :\ m \geq 1,\ \lambda_{n_{k_m}} > 0\right\}$$

ist eine solche kompakte Teilmenge; für $\epsilon > 0$ wie oben gibt es also ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ und für alle $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$

$$\left\|F_{[\tilde{\lambda} n]} \circ F_n^{-1} - \tilde{\lambda}^{-E}\right\| < \frac{\epsilon}{2R(\delta)}$$

gilt. Da für alle $n \geq n_0$ und alle $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$

$$\left\|F_{[\tilde{\lambda} n]} \circ F_n^{-1} - \tilde{\lambda}^{-E}\right\| = \left\|F_n \circ F_{[\tilde{\lambda} n]}^{-1} - \tilde{\lambda}^{E}\right\|$$

erfüllt ist, folgt wegen der Dreiecksungleichung

$$\left\|F_n \circ F_{[\tilde{\lambda} n]}^{-1}\right\| - \left\|\tilde{\lambda}^{E}\right\| \leq \left\|F_n \circ F_{[\tilde{\lambda} n]}^{-1} - \tilde{\lambda}^{E}\right\| < \frac{\epsilon}{2R(\delta)}$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$. Betrachtet man nun die Teilfolge von $(n_{k_m})_{m\geq 1}$, deren Elemente n' größer gleich n_0 sind, die Ungleichung $c' + \frac{1}{n'} \leq c_0(\delta)$ erfüllen und der Bedingung $\lambda_{n'} > 0$ genügen, und bezeichnet man diese Teilfolge kurz mit (n'), so erhält man für alle $n' \in (n')$

$$\left\|F_{n'} \circ F_{[\lambda_{n'} n']}^{-1}\right\| - \left\|\lambda_{n'}^{E}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2R(\delta)}.$$

Da außerdem für alle $n' \in (n')$ nach Voraussetzung $0 < \lambda_{n'} \leq c' + \frac{1}{n'} \leq c_0(\delta)$ und daher wegen (3.4.4)

$$\left\|\lambda_{n'}^E\right\| < \frac{\epsilon}{2R(\delta)}$$

gilt, folgt für alle $n' \in (n')$

$$r_{n'}(s,t) \leq \left\|F_{n'} \circ F_{[\lambda_{n'} n']}^{-1}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2R(\delta)} + \left\|\lambda_{n'}^E\right\| < \frac{\epsilon}{2R(\delta)} + \frac{\epsilon}{2R(\delta)} = \frac{\epsilon}{R(\delta)} .$$

<u>Fall 2 :</u> $\lambda = 0$
In dieser Situation muss erneut zwischen zwei Fällen unterschieden werden:
<u>Fall 2a :</u>
Es gibt ein M, so dass $\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m} \leq M$ für alle $m \geq 1$ erfüllt ist. Sei

$$Z := \sup_{0 \leq i \leq M} \left\|F_i^{-1}\right\| .$$

Es gilt $F_n \to 0$ für $n \to \infty$ und somit auch $F_{n_{k_m}} \to 0$ für $m \to \infty$, daher existiert im Fall $Z > 0$ ein m_0, so dass

$$\left\|F_{n_{k_m}}\right\| < \frac{\epsilon}{R(\delta) Z}$$

für alle $m \geq m_0$ gilt. Daraus folgt wegen Satz 2.1.1 für alle $m \geq m_0$

$$\left\|F_{n_{k_m}} \circ F_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m}}^{-1}\right\| \leq \left\|F_{n_{k_m}}\right\| \cdot \left\|F_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m}}^{-1}\right\| \leq \left\|F_{n_{k_m}}\right\| \cdot \sup_{0 \leq i \leq M} \left\|F_i^{-1}\right\| < \frac{\epsilon}{R(\delta)} .$$

Für $Z = 0$ ist diese Ungleichung offensichtlich ebenfalls erfüllt, und zwar für alle $m \geq m_0 := 1$. Insgesamt ergibt sich für alle $m \geq m_0$

$$r_{n_{k_m}}(s,t) \leq \left\|F_{n_{k_m}} \circ F_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m}}^{-1}\right\| < \frac{\epsilon}{R(\delta)} .$$

<u>Fall 2b :</u>
Es gilt $\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m} \to \infty$ für $m \to \infty$. Wegen $\lambda = 0$ hat man außerdem

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{\lambda_{n_{k_m}}} = \infty .$$

Wähle nun ein $\lambda_0 > 1$ mit

$$\left\|\lambda_0^{-E}\right\| < \frac{1}{4}.$$

Nach Voraussetzung gilt $(F_n)_{n \geq 0} \in RV(-E)$, das heißt für alle $\lambda' > 0$ ist

$$F_{[\lambda' n]} \circ F_n^{-1} \xrightarrow[n \to \infty]{} (\lambda')^{-E}$$

erfüllt, und wie bereits oben erwähnt ist die Konvergenz sogar gleichmäßig in λ' auf allen kompakten Teilmengen von $(0,\infty)$. Es gibt daher ein n_0, so dass

$$\left\| F_{[\lambda' n]} \circ F_n^{-1} - (\lambda')^{-E} \right\| < \frac{1}{4}$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $\lambda' \in [1, \lambda_0]$ gilt. Insbesondere hat man für alle $n \geq n_0$ wegen der Dreiecksungleichung

$$\left\| F_{[\lambda_0 n]} \circ F_n^{-1} \right\| \leq \left\| F_{[\lambda_0 n]} \circ F_n^{-1} - \lambda_0^{-E} \right\| + \left\| \lambda_0^{-E} \right\| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \, .$$

Nun ist aber die Funktion $(0,\infty) \ni \lambda' \mapsto (\lambda')^{-E}$ und damit auch

$$(0,\infty) \ni \lambda' \mapsto \left\| (\lambda')^{-E} \right\|$$

stetig (siehe S.52). Es gibt daher ein $C > 0$ derart, dass $\left\| F_{[\lambda' n]} \circ F_n^{-1} \right\| \leq C$ für alle $n \geq n_0$ und alle $\lambda' \in [1, \lambda_0]$ gilt. Wegen $\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m} \to \infty$ für $m \to \infty$ kann man nun ein m_0 finden, so dass $\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m} \geq n_0$ für alle $m \geq m_0$ gilt. Wähle $m \geq m_0$ beliebig und schreibe

$$\frac{1}{\lambda_{n_{k_m}}} = \mu \lambda_0^l$$

für ein $l \in \mathbb{Z}$ und ein $1 \leq \mu < \lambda_0$. Es folgt mit Satz 2.1.1

$$\begin{aligned}
\left\| F_{n_{k_m}} \circ F^{-1}_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m}} \right\| &= \left\| F_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m} \frac{1}{\lambda_{n_{k_m}}}} \circ F^{-1}_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m}} \right\| = \left\| F_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m} \mu \lambda_0^l} \circ F^{-1}_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m}} \right\| \\
&\leq \underbrace{\left\| F_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m} \mu \lambda_0^l} \circ F^{-1}_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m} \lambda_0^l} \right\|}_{\leq C, \text{ da } \mu \in [1,\lambda_0)} \cdot \underbrace{\left\| F_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m} \lambda_0^l} \circ F^{-1}_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m} \lambda_0^{l-1}} \right\|}_{< \frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left\| F_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m} \lambda_0} \circ F^{-1}_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m}} \right\|}_{< \frac{1}{2}} \\
&< C \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^l ,
\end{aligned}$$

und wegen

$$\mu \lambda_0^l = \frac{1}{\lambda_{n_{k_m}}} \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty$$

(das heißt $l \to \infty$ für $m \to \infty$) folgt daraus

$$\left\| F_{n_{k_m}} \circ F^{-1}_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m}} \right\| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \, .$$

Es gibt also ein $m_1 \geq m_0$, so dass für alle $m \geq m_1$ die Ungleichung

$$\left\| F_{n_{k_m}} \circ F^{-1}_{\lambda_{n_{k_m}} n_{k_m}} \right\| < \frac{\epsilon}{R(\delta)}$$

erfüllt ist, was

$$r_{n_{k_m}}(s,t) < \frac{\epsilon}{R(\delta)}$$

für alle $m \geq m_1$ impliziert.

Für jede Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ natürlicher Zahlen liefert also jeder der drei möglichen Fälle die Existenz einer Teilfolge (n'), so dass für alle $n' \in (n')$

$$r_{n'}(s,t) < \frac{\epsilon}{R(\delta)} \tag{3.4.6}$$

gilt. Da die Schranke $\left\|F_n \circ F_{\lambda_n n}^{-1}\right\|$ für $r_n(s,t)$ in (3.4.5) nicht von $s,t \in [0,N]$ mit $s < t$ und $t - s \leq c'$ abhängt, hat man sogar

$$r_{n'}(s,t) < \frac{\epsilon}{R(\delta)}$$

für alle $n' \in (n')$ und alle $s,t \in [0,N]$ mit $0 < t - s \leq c'$. Insgesamt folgt für alle derartigen Tupel (s,t) und alle $n' \in (n')$ unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Y_i $(i \geq 1)$ unabhängig und identisch verteilt sind

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left|F_{n'} \circ \sum_{i=1}^{[n't]} Y_i - F_{n'} \circ \sum_{i=1}^{[n's]} Y_i\right| > \epsilon\right) \\
= \ &\mathbb{P}\left(\left|F_{n'} \circ \sum_{i=[n's]+1}^{[n't]} Y_i\right| > \epsilon\right) \\
= \ &\mathbb{P}^{F_{n'} \circ \sum_{i=[n's]+1}^{[n't]} Y_i}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |x| > \epsilon\right\}\right) \\
= \ &\left(\mathbb{P}^{\sum_{i=[n's]+1}^{[n't]} Y_i}\right)^{F_{n'}}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |x| > \epsilon\right\}\right) \\
= \ &\left(\mathbb{P}^{\sum_{i=1}^{[n't]-[n's]} Y_i}\right)^{F_{n'}}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |x| > \epsilon\right\}\right) \\
= \ &\mathbb{P}\left(\left|F_{n'} \circ \sum_{i=1}^{[n't]-[n's]} Y_i\right| > \epsilon\right) \\
= \ &\mathbb{P}\left(\left|F_{n'} \circ F_{[n't]-[n's]}^{-1} \circ F_{[n't]-[n's]} \circ S_{[n't]-[n's]}\right| > \epsilon\right) \\
\leq \ &\mathbb{P}\left(\left\|F_{n'} \circ F_{[n't]-[n's]}^{-1}\right\| \cdot \left|F_{[n't]-[n's]} \circ S_{[n't]-[n's]}\right| > \epsilon\right) \\
= \ &\mathbb{P}\left(r_{n'}(s,t) \cdot \left|F_{[n't]-[n's]} \circ S_{[n't]-[n's]}\right| > \epsilon\right) \\
\leq \ &\mathbb{P}\left(\left|F_{[n't]-[n's]} \circ S_{[n't]-[n's]}\right| > R(\delta)\right) \\
\leq \ &\sup_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(|F_n \circ S_n| > R(\delta)\right) \underset{(3.4.3)}{<} \delta \ ,
\end{aligned}$$

wobei im siebten Schritt Satz 2.1.1 eingeht und im letzten Schritt $F_0 \circ S_0 \equiv 0$ zu beachten ist.

Fasst man das bisher Gezeigte zusammen, so weiß man also, dass für alle $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ ein $c_0(\delta) > 0$ existiert, so dass es für jede Wahl von $N > 0$ und $c' \in (0, c_0(\delta))$ und für jede Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ natürlicher Zahlen eine Teilfolge (n') gibt mit

$$\mathbb{P}\left(\left|F_{n'} \circ S_{[n't]} - F_{n'} \circ S_{[n's]}\right| > \epsilon\right) < \delta$$

für alle $s, t \in [0, N]$ mit $s < t$ und $t - s \leq c'$ und für alle $n' \in (n')$. Es folgt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\substack{t-c<t_1<t\leq t_2<t+c \\ 0\leq t_1<t_2\leq N}} \left(\left|F_{n'} \circ S_{[n't_1]} - F_{n'} \circ S_{[n't]}\right| \wedge \left|F_{n'} \circ S_{[n't]} - F_{n'} \circ S_{[n't_2]}\right|\right) > \epsilon\right)$$
$$< \delta$$

für alle $n' \in (n')$ und $c \leq c'$ und somit die Behauptung. $\square$

Es seien $\tilde{b} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ die in Satz 3.2.3 erhaltene, regulär variierende Funktion mit Index α und $F : \mathbb{R}^+ \to GL(\mathbb{R}^d)$ die regulär variierende Funktion mit Index $-E$, die im Abschnitt vor Satz 3.2.5 eingeführt wurde und auch im letzten Satz unverzichtbar war. Ferner sei $\tilde{F} : \mathbb{R}^+ \to GL(\mathbb{R}^d)$ durch $\tilde{F}(c) = \tilde{F}_c := F_{\tilde{b}(c)}$ definiert.

Satz 3.4.2.
Die Funktion $\tilde{F}$ ist regulär variierend mit Index $-\alpha E$.

Beweis. (vgl. den Beweis von [MS1], Proposition 4.2.3)
Sei $\lambda > 0$ beliebig. Zu zeigen ist, dass

$$\lim_{c\to\infty} \tilde{F}_{\lambda c} \circ \tilde{F}_c^{-1} = \lambda^{-\alpha E}$$

gilt. Dazu definiert man zunächst eine Funktion $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ derart, dass für alle $c > 0$

$$(\delta(c))^\alpha = \frac{\tilde{b}(\lambda c)}{\lambda^\alpha \tilde{b}(c)}$$

erfüllt ist. Da die Funktion $\tilde{b}$ regulär variierend mit Index α ist, hat man per Definition

$$\lim_{c\to\infty} \frac{\tilde{b}(\lambda c)}{\tilde{b}(c)} = \lambda^\alpha,$$

es folgt also $(\delta(c))^\alpha \to 1$ für $c \to \infty$. Schreibt man jetzt

$$\tilde{F}_{\lambda c} \circ \tilde{F}_c^{-1} = F_{\tilde{b}(\lambda c)} \circ F_{\tilde{b}(c)}^{-1} = F_{\tilde{b}(\lambda c)} \circ F_{\lambda^\alpha \tilde{b}(c)}^{-1} \circ F_{\lambda^\alpha \tilde{b}(c)} \circ F_{\tilde{b}(c)}^{-1}$$

und beachtet man, dass wegen $\tilde{b}(c) \to \infty$ $(c \to \infty)$ und $F_{\lambda^\alpha c} \circ F_c^{-1} \to (\lambda^\alpha)^{-E}$ $(c \to \infty)$ auch $F_{\lambda^\alpha \tilde{b}(c)} \circ F_{\tilde{b}(c)}^{-1} \to (\lambda^\alpha)^{-E}$ $(c \to \infty)$ gilt, so erhält man

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to\infty} \tilde{F}_{\lambda c} \circ \tilde{F}_c^{-1} &= \lim_{c\to\infty} F_{\tilde{b}(\lambda c)} \circ F_{\lambda^\alpha \tilde{b}(c)}^{-1} \circ (\lambda^\alpha)^{-E} \\
&= \lim_{c\to\infty} F_{(\delta(c))^\alpha \cdot \lambda^\alpha \tilde{b}(c)} \circ F_{\lambda^\alpha \tilde{b}(c)}^{-1} \circ (\lambda^\alpha)^{-E} \\
&= \lim_{c\to\infty} ((\delta(c))^\alpha)^{-E} \circ (\lambda^\alpha)^{-E} \\
&\underset{(2.1.4a)}{=} (\lambda^\alpha)^{-E} = \exp\left(-E \log \lambda^\alpha\right) = \exp(-\alpha E \log \lambda) = \lambda^{-\alpha E},
\end{aligned}$$

wobei im dritten Schritt $\lambda^\alpha \tilde{b}(c) \to \infty$ $(c \to \infty)$ benutzt wird. □

Nun sind alle notwendigen Vorbereitungen getroffen und das Hauptresultat des vorliegenden Kapitels kann bewiesen werden:

Satz 3.4.3.
Für $t \geq 0$ sei $M_t = A_{E_t}$ für den Ersteintritts-Prozess $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ und den Grenzprozess $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ aus Satz 3.2.5. M_t ist dann ein Zufallsvektor auf Ω mit Werten in $\mathbb{R}^d$.

(a) Es gilt

$$\left(\tilde{F}_c \circ X_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)} \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} (M_t)_{t\in[0,\infty)} = (A_{E_t})_{t\in[0,\infty)}. \tag{3.4.7}$$

(b) Für jedes $m \in \mathbb{N}^*$ und jede Wahl $0 < t_1 < \ldots < t_m < \infty$ gilt

$$\mathfrak{L}\left(M_{t_1}, \ldots, M_{t_m}\right) = \int_{(\mathbb{R}^+)^m} \mathfrak{L}\left(A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}\right) \; \mathbb{P}^{\left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right)}(ds_1, \ldots, ds_m).$$

Beweis.
Es seien $\tilde{b}$, F und $\tilde{F}$ wie im Abschnitt vor Satz 3.4.2 und $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ der in Definition 3.1.1 eingeführte Zählprozess.

(a) Die Prozesse $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ und

$$\left(\tilde{F}_c \circ S_{\tilde{b}(c)t}\right)_{t\in[0,\infty)} = \left(F_{\tilde{b}(c)} \circ S_{\tilde{b}(c)t}\right)_{t\in[0,\infty)}$$

für alle $c > 0$ sind gemäß Satz 3.2.7 Zufallselemente von $D([0,\infty),\mathbb{R}^d)$, ferner wurde im Abschnitt vor Satz 3.3.11 gezeigt, dass sämtliche Pfade der Prozesse $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ und

$$N^c = \left(\frac{1}{\tilde{b}(c)} \cdot N_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)} \quad (c > 0)$$

in $D([0,\infty),\mathbb{R})$ liegen. Aufgrund des Hauptresultates des ersten Kapitels (Satz 1.1.6) sind sowohl $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ als auch $D\left([0,\infty),\mathbb{R}\right)$ separabel, daher ist zum einen auch

$$\hat{D} = D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right) \times D\left([0,\infty),\mathbb{R}\right)$$

separabel, und zum anderen stimmt die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B}(\hat{D})$ für die Produkttopologie auf dem Produktraum $\hat{D}$ mit dem Produkt der Borelschen $\sigma-$Algebra $\mathfrak{B}\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\right)$ über $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ und der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}\right)\right)$ über $D\left([0,\infty),\mathbb{R}\right)$ überein (vgl. [Bi], S.224f):

$$\mathfrak{B}(\hat{D}) = \mathfrak{B}\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\right) \otimes \mathfrak{B}\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}\right)\right).$$

Betrachtet man nun die beiden Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathfrak{L}\left((A_t)_{t\in[0,\infty}\right)$ und $\mathfrak{L}\left((E_t)_{t\in[0,\infty)}\right)$ auf den Räumen $\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right), \mathfrak{B}\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\right)\right)$ bzw. $\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}\right), \mathfrak{B}\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}\right)\right)\right)$, so ist das Produktmaß

$$\hat{P} = \mathfrak{L}\left((A_t)_{t\in[0,\infty}\right) \otimes \mathfrak{L}\left((E_t)_{t\in[0,\infty)}\right)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(\hat{D}, \mathfrak{B}(\hat{D})\right)$; gleiches gilt für die Produktmaße

$$\mathfrak{L}\left(\left(\tilde{F}_c \circ S_{\tilde{b}(c)t}\right)_{t\in[0,\infty)}\right) \otimes \mathfrak{L}\left(\left(\frac{1}{\tilde{b}(c)} \cdot N_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)}\right)$$

für jedes $c > 0$. Wegen Theorem 3.2 aus [Bi] folgt unter Beachtung von Satz 3.4.1 und von Satz 3.3.11

$$\mathfrak{L}\left(\left(F_{\tilde{b}(c)} \circ S_{\tilde{b}(c)t}\right)_{t\in[0,\infty)}\right) \otimes \mathfrak{L}\left(\left(\frac{1}{\tilde{b}(c)} \cdot N_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)}\right) \xrightarrow[c\to\infty]{w} \hat{P}, \tag{3.4.8}$$

da wegen $\tilde{b}(c) \to \infty$ für $c \to \infty$ auch

$$\left(F_{\tilde{b}(c)} \circ S_{\tilde{b}(c)t}\right)_{t\in[0,\infty)} \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} (A_t)_{t\in[0,\infty)}$$

gilt. Nun sind aber nach Voraussetzung $(J_i)_{i\geq 1}$ und $(Y_i)_{i\geq 1}$ stochastisch unabhängig; wählt man daher $c > 0$ beliebig, so sind auch die Prozesse

$$\left(F_{\tilde{b}(c)} \circ S_{\tilde{b}(c)t}\right)_{t\in[0,\infty)} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{\tilde{b}(c)} \cdot N_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)}$$

als messbare Verarbeitungen stochastisch unabhängig. Da $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ und $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ ebenfalls stochastisch unabhängig sind, läßt sich (3.4.8) auch schreiben als

$$\mathfrak{L}\left(\left(F_{\tilde{b}(c)} \circ S_{\tilde{b}(c)t}\ ,\ \frac{1}{\tilde{b}(c)} \cdot N_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)}\right) \xrightarrow[c\to\infty]{w} \mathfrak{L}\left((A_t, E_t)_{t\in[0,\infty)}\right).$$

Um aus dieser Tatsache die Behauptung zu folgern, soll Satz 1.2.5 angewendet werden. Zu diesem Zweck werden zunächst einige Teilmengen des Skorokhod-Raumes $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ definiert:

- $C\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ sei die Menge der stetigen Funktionen in $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$.
- $C_0 = C_0([0,\infty),[0,\infty))$ sei die Menge aller streng monoton wachsenden Funktionen in $C([0,\infty),\mathbb{R})$, die Werte in $[0,\infty)$ annehmen ($d=1$).
- $D_0 = D_0([0,\infty),[0,\infty))$ sei die Menge aller monoton wachsenden Funktionen in $D([0,\infty),\mathbb{R})$, die Werte in $[0,\infty)$ annehmen ($d=1$).

Alle diese Teilmengen von $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ seien mit ihrer Relativtopologie und der zugehörigen Borelschen σ-Algebra ausgestattet. Um nun zur Anwendung von Satz 1.2.5 zu kommen, wählt man

$$(E,\mathfrak{E}) = \left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\times D_0, \mathfrak{B}\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\right)\otimes\mathfrak{B}(D_0)\right)$$

und

$$(E',\mathfrak{E}') = \left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right), \mathfrak{B}\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\right)\right).$$

Da sowohl $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ als auch D_0 separabel sind (letztere Menge als Teilmenge der separablen Menge $D([0,\infty),\mathbb{R})$), ist auch deren Produkt separabel und es gilt

$$\mathfrak{B}\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\right)\otimes\mathfrak{B}(D_0) = \mathfrak{B}\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\times D_0\right)$$

(vgl. [Bi] S.224f), daher erfüllen $(E,\mathfrak{E})$ und $(E',\mathfrak{E}')$ die Voraussetzungen des Satzes. Theorem 3.1 aus [W] liefert außerdem, dass die durch

$$D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\times D_0 \ni (f,g)\mapsto f\circ g\in D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$$

definierte Kompositionsabbildung in jedem Tupel

$$(f,g)\in\left(C\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\times D_0\right)\cup\left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\times C_0\right)$$

stetig ist. Wegen

$$\mathfrak{L}\left(\left(\tilde{F}_c\circ S_{\tilde{b}(c)t}\ ,\ \frac{1}{\tilde{b}(c)}\cdot N_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)}\right)\xrightarrow[c\to\infty]{w}\mathfrak{L}\left((A_t,E_t)_{t\in[0,\infty)}\right)$$

und

$$\left(\tilde{F}_c\circ S_{\tilde{b}(c)\cdot\frac{1}{\tilde{b}(c)}\cdot N_{ct}}\right)_{t\in[0,\infty)} = \left(\tilde{F}_c\circ X_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)}\quad(c>0)$$

genügt es also unter Hinweis auf Satz 1.2.5 zu zeigen, dass für alle $c>0$ die Pfade von

$$\left(\tilde{F}_c\circ S_{\tilde{b}(c)t}\ ,\ \frac{1}{\tilde{b}(c)}\cdot N_{ct}\right)_{t\in[0,\infty)}$$

und von $(A_t, E_t)_{t\in[0,\infty)}$ Elemente von $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right) \times D_0$ sind und dass die Kompositionsabbildung $\mathbb{P}^{(A_t,E_t)_{t\in[0,\infty)}}$-fast sicher stetig ist. Die ersten beiden Behauptungen folgen sofort, da – wie zu Beginn des Beweises erwähnt – für alle $c > 0$ die Pfade von $(\tilde{F}_c \circ S_{\tilde{b}(c)t})_{t\in[0,\infty)}$ und von $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ in $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ liegen und sowohl N^c für alle $c > 0$ als auch $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ Zufallselemente von $D([0,\infty),\mathbb{R})$ sind, wobei man ferner beachten muss, dass die Pfade von N^c für alle $c > 0$ und von $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ nach Definition der Prozesse nichtnegativ und monoton wachsend sind. Die dritte Behauptung folgt wegen

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{(A_t,E_t)_{t\in[0,\infty)}}\left(\left(C\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right) \times D_0\right) \cup \left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right) \times C_0\right)\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}^{(A_t,E_t)_{t\in[0,\infty)}}\left(\left(\left(C\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right) \times D_0\right) \cup \left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right) \times C_0\right)\right)^c\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}^{(A_t,E_t)_{t\in[0,\infty)}}\left(\left(C\left([0,\infty,\mathbb{R}^d\right) \times D_0\right)^c \cap \left(D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right) \times C_0\right)^c\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}^{(A_t,E_t)_{t\in[0,\infty)}}\left(\left(C\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\right)^c \times C_0^c\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}^{(A_t)_{t\in[0,\infty)}}\left(\left(C\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\right)^c\right) \cdot \mathbb{P}^{(E_t)_{t\in[0,\infty)}}\left(C_0^c\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}^{(A_t)_{t\in[0,\infty)}}\left(\left(C\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)\right)^c\right) \cdot \left(1 - \mathbb{P}^{(E_t)_{t\in[0,\infty)}}\left(C_0\right)\right) = 1,
\end{aligned}$$

wobei für den dritten Schritt wiederum zu bemerken ist, dass $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Zufallselement von $D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right)$ ist und die Pfade von $(E_t)_{t\in[0,\infty)}$ in D_0 liegen. Es folgt Teil (a).

(b) Es seien $m \in \mathbb{N}^*$ und $0 < t_1 < \ldots < t_m < \infty$ beliebig. Zu zeigen ist, dass für jede Wahl $B_1, \ldots, B_m$ von Borelschen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{\left(M_{t_1},\ldots,M_{t_m}\right)}\left(B_1 \times \ldots \times B_m\right)\\
&= \int_{(\mathbb{R}^+)^m} \mathbb{P}^{\left(A_{s_1},\ldots,A_{s_m}\right)}\left(B_1 \times \ldots \times B_m\right)\ \mathbb{P}^{\left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right)}\left(ds_1,\ldots,ds_m\right)
\end{aligned}$$

erfüllt ist. Seien derartige Mengen $B_1, \ldots, B_m$ beliebig gewählt. Es gilt unter Beachtung der Glättungsregel für bedingte Erwartungswerte und wegen (52.2) aus [A]

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left(M_{t_1},\ldots,M_{t_m}\right) \in B_1 \times \ldots \times B_m\right) = \mathbb{E}\ 1_{B_1\times\ldots\times B_m}\left(M_{t_1},\ldots,M_{t_m}\right)\\
= \;& \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(1_{B_1\times\ldots\times B_m}\left(M_{t_1},\ldots,M_{t_m}\right) \mid \left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right)\right)\right)\\
= \;& \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(1_{B_1\times\ldots\times B_m}\left(M_{t_1},\ldots,M_{t_m}\right) \mid \left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right) = \cdot\right) \circ \left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right)\right)\\
= \;& \int_\Omega \mathbb{E}\left(1_{B_1\times\ldots\times B_m}\left(M_{t_1},\ldots,M_{t_m}\right) \mid \left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right) = \cdot\right)\\
&\quad \circ \left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right)\ d\mathbb{P}\\
= \;& \int_{(\mathbb{R}^+)^m} \mathbb{E}\left(1_{B_1\times\ldots\times B_m}\left(M_{t_1},\ldots,M_{t_m}\right) \mid \left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right) = (s_1,\ldots,s_m)\right)\\
&\qquad \mathbb{P}^{\left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right)}(ds_1,\ldots,ds_m)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{(\mathbb{R}^+)^m} \mathbb{E}\left(1_{B_1\times\ldots\times B_m}\left(A_{E_{t_1}},\ldots,A_{E_{t_m}}\right) \mid (E_{t_1},\ldots,E_{t_m}) = (s_1,\ldots,s_m)\right) \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}^{\left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right)}(ds_1,\ldots,ds_m) \\
&\underset{(*)}{=} \int_{(\mathbb{R}^+)^m} \mathbb{E}\ 1_{B_1\times\ldots\times B_m}\left(A_{s_1},\ldots,A_{s_m}\right)\ \mathbb{P}^{\left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right)}(ds_1,\ldots,ds_m) \\
&= \int_{(\mathbb{R}^+)^m} \mathbb{P}^{\left(A_{s_1},\ldots,A_{s_m}\right)}\left(B_1\times\ldots\times B_m\right)\ \mathbb{P}^{\left(E_{t_1},\ldots,E_{t_m}\right)}(ds_1,\ldots,ds_m),
\end{aligned}
$$

wobei $(*)$ mittels Satz 52.5 aus [A] folgt, wenn man die Funktion

$$h : D\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right) \times (0,\infty)^m \to \overline{\mathbb{R}}$$

durch

$$h(f,(t_1,\ldots,t_m)) = 1_{B_1\times\ldots\times B_m}(f(t_1),\ldots,f(t_m))$$

definiert und $X = (A_t)_{t\in[0,\infty)}$ sowie $Y = (E_{t_1},\ldots,E_{t_m})$ wählt.

□

Im Folgenden sollen einige Eigenschaften des in Satz 3.4.3 erhaltenen Grenzprozesses $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ bewiesen werden. Der nächste Satz zeigt, dass $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ operator-selbstähnlich ist:

Satz 3.4.4.
Der Prozess $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist operator-selbstähnlich mit Exponent αE, das heißt für alle $c > 0$, alle $k \in \mathbb{N}^*$ und alle $t_1,\ldots,t_k \in [0,\infty)$ gilt

$$\mathfrak{L}\left(M_{ct_1},\ldots,M_{ct_k}\right) = \mathfrak{L}\left(c^{\alpha E}\circ M_{t_1},\ldots,c^{\alpha E}\circ M_{t_k}\right). \tag{3.4.9}$$

Beweis.
Der erste Schritt besteht darin zu zeigen, dass $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ stetig in Verteilung ist. Dazu betrachtet man eine beliebige Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $[0,\infty)$, die gegen ein $t \in [0,\infty)$ konvergiert. Zu zeigen ist dann, dass

$$\mathfrak{L}(M_{t_n}) \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(M_t)$$

gilt. Sei dazu $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Da der Prozess $(A_t)_{t\in[0,\infty)}$ gemäß Satz 3.2.6(c) stetig in Verteilung ist, gilt

$$\mathfrak{L}\left(A_{t_n}\right) \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(A_t),$$

man hat also

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ \mathbb{P}^{A_{t_n}}(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ \mathbb{P}^{A_t}(dx).$$

Die Funktion f ist nach Voraussetzung beschränkt, daher gibt es eine Konstante $M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Es gilt also für alle $t' \in [0, \infty)$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \; \mathbb{P}^{A_{t'}}(dx) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \; \mathbb{P}^{A_{t'}}(dx) \leq M \cdot \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbb{P}^{A_{t'}} = M.$$

Insgesamt folgt, dass die Funktion

$$[0, \infty) \ni t' \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \; \mathbb{P}^{A_{t'}}(dx) \in \mathbb{R}$$

stetig und beschränkt ist. Ruft man sich nun den Beweis von Satz 3.3.4 ins Gedächtnis, der unter anderem die Stetigkeit in Verteilung von $(E_t)_{t \in [0,\infty)}$ lieferte, so kann man

$$\mathfrak{L}\left(E_{t_n}\right) \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(E_t)$$

und insbesondere

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \; \mathbb{P}^{A_s}(dx) \right) \; \mathbb{P}^{E_{t_n}}(ds) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \; \mathbb{P}^{A_s}(dx) \right) \; \mathbb{P}^{E_t}(ds)$$

folgern. Es gilt aber wegen Satz 3.4.3(b) für alle $t' \in (0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \; \mathbb{P}^{M_{t'}}(dx) = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \; \mathbb{P}^{A_s}(dx) \right) \; \mathbb{P}^{E_{t'}}(ds),$$

daher ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \; \mathbb{P}^{M_{t_n}}(dx) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \; \mathbb{P}^{M_t}(dx).$$

Man hat also

$$\mathfrak{L}\left(M_{t_n}\right) \xrightarrow{w} \mathfrak{L}(M_t),$$

das heißt $(M_t)_{t \in [0,\infty)}$ ist stetig in Verteilung.

Seien nun $k \in \mathbb{N}^*$ und $t_1, \ldots, t_k \in [0, \infty)$ beliebig. Aus Satz 1.3.8 folgt unter Berücksichtigung von (3.4.7)

$$\mathfrak{L}\left(\tilde{F}_c \circ X_{ct_1}, \ldots, \tilde{F}_c \circ X_{ct_k} \right) \xrightarrow[c \to \infty]{w} \mathfrak{L}\left(M_{t_1}, \ldots, M_{t_k}\right)$$

und somit auch

$$\mathfrak{L}\left(\tilde{F}_c \circ X_{c(st_1)}, \ldots, \tilde{F}_c \circ X_{c(st_k)} \right) \xrightarrow[c \to \infty]{w} \mathfrak{L}\left(M_{st_1}, \ldots, M_{st_k}\right) \tag{3.4.10}$$

für alle $s > 0$. Ferner hat man für alle $s > 0$ und $c > 0$

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{F}_c \circ X_{(cs)t_1}, \ldots, \tilde{F}_c \circ X_{(cs)t_k} \right) \\ &= \left(\tilde{F}_c \circ \tilde{F}_{cs}^{-1} \circ \tilde{F}_{cs} \circ X_{(cs)t_1}, \ldots, \tilde{F}_c \circ \tilde{F}_{cs}^{-1} \circ \tilde{F}_{cs} \circ X_{(cs)t_k} \right), \end{aligned}$$

und da die Funktion $\tilde{F}$ wegen Satz 3.4.2 regulär variierend mit Index $-\alpha E$ ist, gilt

$$\lim_{c\to\infty} \tilde{F}_{cs} \circ \tilde{F}_c^{-1} = s^{-\alpha E} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{c\to\infty} \tilde{F}_c \circ \tilde{F}_{cs}^{-1} = s^{\alpha E}$$

für alle $s > 0$. Zusammen folgt unter erneutem Hinweis auf (3.4.7) für alle $s > 0$ (für $c \to \infty$ gilt auch $cs \to \infty$)

$$\left(\tilde{F}_c \circ X_{(cs)t_1}, \ldots, \tilde{F}_c \circ X_{(cs)t_k}\right) \xrightarrow[c\to\infty]{\mathfrak{L}} \left(s^{\alpha E} \circ M_{t_1}, \ldots, s^{\alpha E} \circ M_{t_k}\right). \tag{3.4.11}$$

Wählt man nun eine Funktion $f : \mathbb{R}^{kd} \to \mathbb{R}$, die stetig und beschränkt ist, so gilt wegen (3.4.10) für alle $s > 0$

$$\mathbb{R} \ni \int_{\mathbb{R}^{kd}} f(x)\ \mathbb{P}^{\left(\tilde{F}_c\circ X_{c(st_1)},\ldots,\tilde{F}_c\circ X_{c(st_k)}\right)}(dx) \xrightarrow[c\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^{kd}} f(x)\ \mathbb{P}^{\left(M_{st_1},\ldots,M_{st_k}\right)}(dx) \in \mathbb{R},$$

und wegen (3.4.11) hat man für alle $s > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni \int_{\mathbb{R}^{kd}} & f(x)\ \mathbb{P}^{\left(\tilde{F}_c\circ X_{(cs)t_1},\ldots,\tilde{F}_c\circ X_{(cs)t_k}\right)}(dx) \\ & \xrightarrow[c\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^{kd}} f(x)\ \mathbb{P}^{\left(s^{\alpha E}\circ M_{t_1},\ldots,s^{\alpha E}\circ M_{t_k}\right)}(dx) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da der Limes einer konvergenten Folge reeller Zahlen eindeutig bestimmt ist, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^{kd}} f(x)\ \mathbb{P}^{\left(M_{st_1},\ldots,M_{st_k}\right)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^{kd}} f(x)\ \mathbb{P}^{\left(s^{\alpha E}\circ M_{t_1},\ldots,s^{\alpha E}\circ M_{t_k}\right)}(dx)$$

für alle $s > 0$. Mit Theorem 1.3 aus [Bi] ergibt sich dann aber sofort

$$\mathfrak{L}\left(M_{st_1}, \ldots, M_{st_k}\right) = \mathfrak{L}\left(s^{\alpha E} \circ M_{t_1}, \ldots, s^{\alpha E} \circ M_{t_k}\right)$$

für alle $s > 0$, was zu beweisen war. □

Satz 3.4.5.
Es sei $(M_t)_{t\in[0,\infty)} = \left(A_{E_t}\right)_{t\in[0,\infty)}$ der in Satz 3.4.3 erhaltene Grenzprozess.

(a) Für jedes $t > 0$ gilt

$$\mathfrak{L}(M_t) = \int_0^\infty \left(\mathfrak{L}(A)\right)^{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha} g_\alpha(s)\ ds = \frac{t}{\alpha}\int_0^\infty \left(\mathfrak{L}(A)\right)^\xi g_\alpha\left(\frac{t}{\xi^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \xi^{-\frac{1}{\alpha}-1}\ d\xi, \tag{3.4.12}$$

wobei g_α die Lebesgue-Dichte der Zufallsgröße D bezeichnet.

(b) Für jedes $t > 0$ besitzt der Zufallsvektor M_t die Lebesgue-Dichte

$$h_t(x) = \int_0^\infty p_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}(x)\, g_\alpha(s)\, ds = \frac{t}{\alpha} \int_0^\infty p_\xi(x)\, g_\alpha\left(\frac{t}{\xi^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \xi^{-\frac{1}{\alpha}-1}\, d\xi \quad (x \in \mathbb{R}^d), \tag{3.4.13}$$

wobei p_t die Lebesgue-Dichte von A_t bezeichnet (vgl. Satz 3.2.6).

Beweis.
Sei $t > 0$ beliebig.

(a) Im Beweis von Satz 3.3.5 wurde die Funktion

$$H_t : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ y \mapsto \left(\frac{y}{t}\right)^{-\alpha}$$

eingeführt, die auch im vorliegenden Beweis eine entscheidende Rolle spielt. Wegen Satz 3.3.5(a) gilt $\mathfrak{L}\,(E_t) = \mathfrak{L}\,(H_t \circ D)$, daher erhält man im Hinblick auf $\mathfrak{L}(A_t) = (\mathfrak{L}(A))^t$ und Satz 3.4.3(b)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(M_t) &= \int_0^\infty \mathfrak{L}(A_s)\, \mathbb{P}^{E_t}(ds) = \int_0^\infty (\mathfrak{L}(A))^s\ \mathbb{P}^{H_t \circ D}(ds) \\
&= \int_0^\infty (\mathfrak{L}(A))^s\ \left(\mathbb{P}^D\right)^{H_t}(ds) = \int_0^\infty (\mathfrak{L}(A))^{H_t(s)}\ \mathbb{P}^D(ds) \\
&= \int_0^\infty (\mathfrak{L}(A))^{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha} g_\alpha(s)\, ds,
\end{aligned}$$

der erste Teil von (3.4.12) ist also bereits bewiesen. Definiere nun für $s > 0$

$$\xi := \xi(s) = \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha = \frac{t^\alpha}{s^\alpha},$$

das heißt

$$s = \left(\frac{t^\alpha}{\xi}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{t}{\xi^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Es gilt dann

$$\frac{ds}{d\xi} = -\frac{t}{\alpha} \cdot \xi^{-\frac{1}{\alpha}-1}$$

und mittels Substitution folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (\mathfrak{L}(A))^{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha} g_\alpha(s)\, ds &= -\frac{t}{\alpha} \int_\infty^0 (\mathfrak{L}(A))^\xi\, g_\alpha\left(\frac{t}{\xi^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \xi^{-\frac{1}{\alpha}-1}\, d\xi \\
&= \frac{t}{\alpha} \int_0^\infty (\mathfrak{L}(A))^\xi\, g_\alpha\left(\frac{t}{\xi^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \xi^{-\frac{1}{\alpha}-1}\, d\xi.
\end{aligned}$$

(b) Zunächst einmal muss gezeigt werden, dass es sich bei h_t tatsächlich um eine Lebesgue-Dichte handelt: Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt aber $h_t(x) \in [0,\infty]$, da p_t und g_α Lebesgue-Dichten sind, ferner ist die Abbildung $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto h_t(x)$ messbar und man sieht sofort $\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x)\ \lambda^d(dx) = 1$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x)\ \lambda^d(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty p_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}(x)\ g_\alpha(s)\ ds\ \lambda^d(dx)\\ &= \int_0^\infty g_\alpha(s)\int_{\mathbb{R}^d} p_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}(x)\ \lambda^d(dx)\ ds\\ &= \int_0^\infty g_\alpha(s)\ ds\ =\ 1,\end{aligned}$$

da $p_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}$ die Dichte des $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvektors $A_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}$ und g_α die Dichte der positiven Zufallsgröße D ist.

Sei nun $B \in \mathfrak{B}^d$ beliebig. Zu zeigen ist, dass

$$\mathbb{P}^{M_t}(B) = \int_B h_t(x)\ \lambda^d(dx)$$

gilt:

$$\begin{aligned}\int_B h_t(x)\ \lambda^d(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(x)\int_0^\infty p_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}(x)\ g_\alpha(s)\ ds\ \lambda^d(dx)\\ &= \int_0^\infty g_\alpha(s)\int_{\mathbb{R}^d} 1_B(x)\ p_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}(x)\ \lambda^d(dx)\ ds\\ &= \int_0^\infty g_\alpha(s)\ (\mathfrak{L}(A))^{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}(B)\ ds\\ &\underset{(3.4.12)}{=} \mathbb{P}^{M_t}(B)\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen worden, dass es sich bei der angegebenen Funktion tatsächlich um eine Lebesgue-Dichte von M_t handelt. Um die zweite Gleichheit in (3.4.13) zu beweisen, nimmt man die gleiche Substitution wie oben vor. Es folgt unmittelbar

$$\int_0^\infty p_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}(x)\ g_\alpha(s)\ ds = \frac{t}{\alpha}\int_0^\infty p_\xi(x)\ g_\alpha\left(\frac{t}{\xi^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\xi^{-\frac{1}{\alpha}-1}\ d\xi.$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

In Analogie zu Satz 3.3.7 kann man zeigen:

Satz 3.4.6.
Der Prozess $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ besitzt keine stationären Zuwächse.

Beweis.
Es seien $t > 0$ und $h > 0$ beliebig. Gilt $E_{t+h}(\omega) = E_h(\omega)$ für ein $\omega \in \Omega$, so folgt daraus natürlich $E_{t+h}(\omega) \leq E_h(\omega)$. Hat man auf der anderen Seite

$$\inf\{s \geq 0 : D_s(\omega) > t + h\} = E_{t+h}(\omega) \leq E_h(\omega) = \inf\{s \geq 0 : D_s(\omega) > h\},$$

so ergibt sich wegen $t+h > h$ auch $E_{t+h}(\omega) = E_t(\omega)$. Insgesamt erhält man unter Beachtung von Lemma 3.3.3

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega : E_{t+h}(\omega) = E_h(\omega)\} &= \{\omega \in \Omega : E_{t+h}(\omega) \leq E_h(\omega)\}\\ &= \{\omega \in \Omega : D_{E_h(\omega)}(\omega) \geq t + h\}\end{aligned}$$

und somit

$$\mathbb{P}\left(M_{t+h} - M_h = 0\right) = \mathbb{P}\left(A_{E_{t+h}} = A_{E_h}\right) \geq \mathbb{P}\left(E_{t+h} = E_h\right) = \mathbb{P}\left(D_{E_h} \geq t + h\right).$$

Ferner liefert das Theorem III.4 aus [Be] $\mathbb{P}\left(D_{E_h} > h\right) = 1$, und zusammen ergibt sich für jedes $h > 0$ die Existenz eines $t_0(h) > 0$ mit $\mathbb{P}\left(M_{t+h} - M_h = 0\right) > 0$ für alle $0 < t \leq t_0(h)$. Andererseits besitzt wegen Satz 3.4.5(b) M_t für jedes $t > 0$ eine Lebesgue-Dichte und ist demzufolge stetig, daher gilt $\mathbb{P}(M_t = 0) = 0$ für alle $t > 0$. Für beliebiges $h > 0$ und $0 < t \leq t_0(h)$ besitzen die Zufallsvektoren $M_{t+h} - M_h$ und M_t daher nicht die gleiche Verteilung, was den Beweis abschließt. □

Satz 3.4.7.
Es sei $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ der in Satz 3.4.3 erhaltene Grenzprozess. Die Verteilung von M_t ist für kein $t > 0$ streng operator-stabil.

Beweis.
Aufgrund der zweiten Verteilungsannahme (V2) liegt Y_1 im strengen generalisierten Anziehungsbereich der operator-stabilen Verteilung $\mathfrak{L}(A)$, wobei A ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor auf Ω ist. Wegen Satz 2.3.3 ist $\mathfrak{L}(A)$ unendlich teilbar, daher gibt es im Hinblick auf Satz 2.2.1 eine eindeutig bestimmte, stetige Funktion $\Psi_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mit $\Psi_A(0) = 0$, so dass die Fourier-Transformierte ϕ_A von A für alle $x \in \mathbb{R}^d$ der Bedingung $\phi_A(x) = e^{\Psi_A(x)}$ genügt. Es folgt

$$|\phi_A(x)| = \left|e^{\Psi_A(x)}\right| = \left|e^{\Re(\Psi_A(x))+i\cdot\Im(\Psi_A(x))}\right| = \left|e^{\Re(\Psi_A(x))}\right| \cdot \left|e^{i\cdot\Im(\Psi_A(x))}\right| = \left|e^{\Re(\Psi_A(x))}\right|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$, was wegen Lemma 41.1 aus [A] $\left|e^{\Re(\Psi_A(x))}\right| \leq 1$ impliziert. Das heißt aber, dass $\Re\left(\Psi_A(x)\right) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ erfüllt sein muss. Da $\mathfrak{L}(A)$ operator-stabil ist, gilt wegen Satz 2.3.2 sogar $|\phi_A(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ und somit $\Re\left(\Psi_A(x)\right) < 0$. Satz 3.2.6(b) liefert $\left(\mathfrak{L}(A)\right)^t = \mathfrak{L}(t^E \circ A)$ für alle $t > 0$; wählt man daher $t > 0$ beliebig, so müssen die Fourier-Transformierten $\phi_{(A,t)}$

von $(\mathfrak{L}(A))^t$ und $\phi_{(t^E,A)}$ von $\mathfrak{L}(t^E \circ A)$ auf ganz $\mathbb{R}^d$ übereinstimmen. Da ferner $(\mathfrak{L}(A))^t$ und $\mathfrak{L}(t^E \circ A)$ unendlich teilbar sind, gibt es aufgrund von Satz 2.2.1 eine eindeutig bestimmte Funktion $\Psi_{(A,t)} = \Psi_{(t^E,A)}$ mit

$$e^{\Psi_{(A,t)}(x)} = \phi_{(A,t)}(x) = \phi_{(t^E,A)}(x) = e^{\Psi_{(t^E,A)}(x)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Sei von nun an auch $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ beliebig. Die Gültigkeit der Gleichung

$$\Re\left(\Psi_{(A,t)}(x)\right) = \Re\left(\Psi_{(t^E,A)}(x)\right) \tag{3.4.14}$$

impliziert dann

$$t \cdot \Re\left(\Psi_A(x)\right) = \Re\left(\Psi_A\left(\left(t^E\right)^*(x)\right)\right), \tag{3.4.15}$$

was man sich wie folgt klarmachen kann:

i. Die Lévy-Khintchine-Darstellung (Satz 2.2.2) liefert die genaue Gestalt der Funktionen Ψ_A und $\Psi_{(A,t)}$: Es gilt

$$\Psi_A(x) = i\langle a, x\rangle - \frac{1}{2} \cdot Q(x) + \int_{\mathbb{R}^d \backslash \{0\}} \left(e^{i\langle x,y\rangle} - 1 - \frac{i\langle x, y\rangle}{1+|y|^2}\right) \phi(dy)$$

mit einem $a \in \mathbb{R}^d$, einer nichtnegativ definiten quadratischen Form Q auf $\mathbb{R}^d$ und einem σ-endlichen Borel-Maß ϕ auf $\left(\mathbb{R}^d \backslash \{0\}, \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d \backslash \{0\}\right)\right)$, das die Bedingung (2.2.4) erfüllt, und

$$\begin{aligned}\Psi_{(A,t)}(x) &= i\langle ta, x\rangle - \frac{1}{2} \cdot tQ(x) + \int_{\mathbb{R}^d \backslash \{0\}} \left(e^{i\langle x,y\rangle} - 1 - \frac{i\langle x, y\rangle}{1+|y|^2}\right) t\phi(dy) \\ &= i\langle ta, x\rangle - t\left[\frac{1}{2} \cdot Q(x) - \int_{\mathbb{R}^d \backslash \{0\}} \left(e^{i\langle x,y\rangle} - 1 - \frac{i\langle x, y\rangle}{1+|y|^2}\right) \phi(dy)\right].\end{aligned}$$

ii. Die Fourier-Transformierte von $\mathfrak{L}(t^E \circ A)$ genügt wegen der Transformationsformel der Gleichung

$$\begin{aligned}\phi_{(t^E,A)}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,y\rangle}\ \mathbb{P}^{t^E \circ A}(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,y\rangle}\ \left(\mathbb{P}^A\right)^{t^E}(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\left\langle x, t^E(y)\right\rangle}\ \mathbb{P}^A(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\left\langle \left(t^E\right)^*(x), y\right\rangle}\ \mathbb{P}^A(dy) \\ &= \phi_A\left(\left(t^E\right)^*(x)\right),\end{aligned}$$

daher folgt $\Psi_{(t^E,A)}(x) = \Psi_A\left(\left(t^E\right)^*(x)\right)$.

iii. Die Gültigkeit von Gleichung (3.4.14) impliziert schließlich

$$\begin{aligned}t \cdot \Re\left(\Psi_A(x)\right) &= -\frac{1}{2} \cdot tQ(x) \\ &\quad + t \cdot \Re\left(\int_{\mathbb{R}^d \backslash \{0\}} \left(e^{i\langle x,y\rangle} - 1 - \frac{i\langle x, y\rangle}{1+|y|^2}\right) \phi(dy)\right) \\ &= \Re\left(\Psi_{(A,t)}(x)\right) = \Re\left(\Psi_{(t^E,A)}(x)\right) = \Re\left(\Psi_A\left(\left(t^E\right)^*(x)\right)\right).\end{aligned}$$

Da $t>0$ und $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ beliebig gewählt waren, gilt Gleichung (3.4.15) also für alle $t>0$ und $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Definiert man jetzt die Funktion $F : \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \to (0,\infty)$ durch

$$F(x) = -\Re\left(\Psi_A(x)\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, so ist F regulär variierend gemäß Definition 2.4.4: Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to GL\left(\mathbb{R}^d\right)$ definiert man durch

$$f(t) = \left(\left(t^E\right)^*\right)^{-1}.$$

Dabei ist zu beachten, dass wegen $\det\left(t^E\right) = \det\left(\left(t^E\right)^*\right)$ mit t^E auch $\left(t^E\right)^*$ invertierbar ist (vgl. dazu [Bo], Bemerkung 4 in Abschnitt 7.4, Rechenregeln auf S.251 und Satz 3 bzw. Satz 4 in Abschnitt 4.3). Es ist zu zeigen, dass f regulär variierend im Sinne von Definition 2.4.2 ist. Sei dazu $\lambda > 0$. Es gilt unter erneuter Beachtung der Rechenregeln auf Seite 251 in [Bo]

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} f(\lambda t) \circ f(t)^{-1} &= \lim_{t\to\infty} \left(\left(\left(\lambda t\right)^E\right)^*\right)^{-1} \circ \left(t^E\right)^* \\
&\underset{(2.1.4b)}{=} \lim_{t\to\infty} \left(\left(\lambda^E \circ t^E\right)^*\right)^{-1} \circ \left(t^E\right)^* \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\left(t^E\right)^* \circ \left(\lambda^E\right)^*\right)^{-1} \circ \left(t^E\right)^* \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\left(\lambda^E\right)^*\right)^{-1} \circ \left(\left(t^E\right)^*\right)^{-1} \circ \left(t^E\right)^* \\
&= \left(\left(\lambda^E\right)^*\right)^{-1} = \left(\lambda^{E^*}\right)^{-1} \underset{(2.1.4c)}{=} \lambda^{-E^*},
\end{aligned}$$

f ist also regulär variierend mit Index $-E^* \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$. Die Funktion $R : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definiert man durch $R(t) = t$. Es gilt dann für alle $\lambda > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(\lambda t)}{R(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda t}{t} = \lambda,$$

folglich ist R regulär variierend mit Index 1. Sei nun $(x_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Folge von Elementen aus $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ konvergiert. Man hat

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{F\left((f(t))^{-1}(x_t)\right)}{R(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{-\Re\left(\Psi_A\left((f(t))^{-1}(x_t)\right)\right)}{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{-\Re\left(\Psi_A\left(\left(t^E\right)^*(x_t)\right)\right)}{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} -\Re\left(\Psi_A(x_t)\right) = -\Re\left(\Psi_A(x)\right) > 0,
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt (3.4.15) eingeht und die letzte Gleichheit aus der Stetigkeit von Ψ_A und der damit einhergehenden Stetigkeit von $\Re\left(\Psi_A\right)$ folgt. Somit ist gezeigt, dass F regulär variierend mit Exponent $-E^*$ ist.

Wegen Satz 2.3.4 liegen unter Beachtung der $\left(t^E\right)$-Operator-Stabilität von $\mathfrak{L}(A)$ sämtliche Eigenwerte von E und somit auch von E^* in der Halbebene $\left\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq \frac{1}{2}\right\}$, F ist also gemäß Definition 2.4.4 regulär variierend in ∞ und Satz 2.4.6 kann angewendet werden. Es sei $j \leq d$ die Anzahl der Eigenwerte von E^*. Numeriert man diese derart, dass $\Re(z_1) \leq \ldots \leq \Re(z_j)$ gilt, so folgt $Q = \frac{1}{\Re(z_1)}$ und $q = \frac{1}{\Re(z_j)} > 0$. Für hinreichend kleines $\delta > 0$ gibt es dann positive, reelle Konstanten a, c_1 und c_2 mit

$$c_1|x|^{\frac{1}{\Re(z_j)}-\delta} \leq F(x) \leq c_2|x|^{\frac{1}{\Re(z_1)}+\delta} \tag{3.4.16}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ mit $|x| \geq a$. Der Einfachheit halber sei im Folgenden $b_1 := \frac{1}{\Re(z_j)} - \delta$ (ohne Einschränkung $b_1 > 0$) und $b_2 := \frac{1}{\Re(z_1)} + \delta > 0$.

Sei nun erneut $t > 0$ beliebig. Unter Beachtung von (3.4.13) und des Satzes von Fubini hat der Zufallsvektor M_t die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned}
\phi_{M_t}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,y\rangle}\ \mathbb{P}^{M_t}(dy) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,y\rangle}\ h_t(y)\ \lambda\!\!\lambda^d(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,y\rangle} \int_0^\infty p_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}(y)\ g_\alpha(s)\ ds\ \lambda\!\!\lambda^d(dy) \\
&= \int_0^\infty g_\alpha(s) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,y\rangle} p_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}(y)\ \lambda\!\!\lambda^d(dy)\ ds \\
&= \int_0^\infty e^{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \Psi_A(x)} g_\alpha(s)\ ds \quad (x \in \mathbb{R}^d),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,y\rangle} p_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}(y)\ \lambda\!\!\lambda^d(dy) &= \phi_{A_{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha}}(x) \;=\; \phi_{\left(A,\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha\right)}(x) \\
&= \exp\left(\Psi_{\left(A,\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha\right)}(x)\right) \;=\; e^{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \Psi_A(x)}
\end{aligned}$$

folgt. Benutzt man nun die Reihenentwicklung der Dichte g_α (Gleichung (4.2.4) in [UZ]), so kann man folgern, dass es Konstanten $c_0, s_0 > 0$ mit

$$g_\alpha(s) \geq c_0 s^{-\alpha-1} \tag{3.4.17}$$

für alle $s \geq s_0$ gibt. Setzt man

$$r_0 := \max\left\{a, s_0^{\alpha/b_2} t^{-\alpha/b_2} c_2^{-1/b_2}\right\},$$

so erhält man für alle $x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ mit $|x| \geq r_0$ die Gültigkeit von (3.4.16). Wird dann für ein derartiges $x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ die Konstante

$$s_1 := t c_2^{1/\alpha} |x|^{b_2/\alpha} \geq 0$$

definiert, so gilt für alle $s \geq s_1$ wegen $s_1 \geq tc_2^{1/\alpha} r_0^{b_2/\alpha} \geq tc_2^{1/\alpha} s_0 t^{-1} c_2^{-1/\alpha} = s_0$ die Ungleichung (3.4.17). Insgesamt erhält man (im Hinblick auf $e^{-u} \geq 1 - u$ für alle $u \in \mathbb{R}$)

$$
\begin{aligned}
\Re\left(\phi_{M_t}(x)\right) &= \int_0^\infty \Re\left(e^{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \Psi_A(x)} g_\alpha(s)\right)\, ds \\
&= \int_0^\infty \Re\left(e^{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \Psi_A(x)}\right) g_\alpha(s)\, ds \\
&= \int_0^\infty e^{\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \Re(\Psi_A(x))} g_\alpha(s)\, ds \\
&\geq \int_{s_1}^\infty e^{-\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha F(x)} g_\alpha(s)\, ds \\
&\underset{(3.4.17)}{\geq} \int_{s_1}^\infty \left[1 - \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha F(x)\right] c_0 s^{-\alpha-1}\, ds \\
&\underset{(3.4.16)}{\geq} \int_{s_1}^\infty \left[1 - \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha c_2|x|^{b_2}\right] c_0 s^{-\alpha-1}\, ds \\
&= \int_{s_1}^\infty c_0 s^{-\alpha-1}\, ds - \int_{s_1}^\infty \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha c_2|x|^{b_2} c_0 s^{-\alpha-1}\, ds \\
&= \lim_{T\to\infty} c_0 \left[-\frac{1}{\alpha} s^{-\alpha}\right]_{s_1}^T - \lim_{T\to\infty} c_0 c_2 |x|^{b_2} t^\alpha \left[-\frac{1}{2\alpha} s^{-2\alpha}\right]_{s_1}^T \\
&= \frac{c_0}{\alpha} s_1^{-\alpha} - c_0 c_2 |x|^{b_2} t^\alpha \frac{1}{2\alpha} s_1^{-2\alpha} \\
&= \frac{c_0}{\alpha} s_1^{-\alpha} \left[1 - t^\alpha c_2 |x|^{b_2} \frac{s_1^{-\alpha}}{2}\right] \; = \; \frac{c_0}{\alpha} s_1^{-\alpha} \left[1 - s_1^\alpha \cdot \frac{s_1^{-\alpha}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{c_0}{\alpha} t^{-\alpha} c_2^{-1} |x|^{-b_2} \; = \; C|x|^{-b_2}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ mit $|x| > r_0$, wobei

$$
C := \frac{1}{2} \cdot \frac{c_0}{\alpha} t^{-\alpha} c_2^{-1} > 0
$$

nicht von x abhängt.

Es werde nun angenommen, dass die Verteilung von M_t doch streng operator-stabil sei. Wegen Satz 2.3.3 ist M_t dann unendlich teilbar, daher liefert die gleiche Argumentation wie zuvor die Existenz einer eindeutig bestimmten, stetigen Funktion $\Psi_{M_t} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mit $\Psi_{M_t}(0) = 0$, so dass $\phi_{M_t}(x) = e^{\Psi_{M_t}(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt, $\tilde{F} = -\Re\left(\Psi_{M_t}\right)$ regulär variierend ist und geeignete Konstanten $\tilde{a}, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$ existieren mit $\tilde{c}_1 |x|^{\tilde{b}_1} \leq \tilde{F}(x) \leq \tilde{c}_2 |x|^{\tilde{b}_2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ mit $|x| \geq \tilde{a}$. Es folgt für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ mit $|x| \geq \tilde{a}$

$$
\Re\left(\phi_{M_t}(x)\right) = \Re\left(e^{\Psi_{M_t}(x)}\right) = e^{\Re\left(\Psi_{M_t}(x)\right)} = e^{-\tilde{F}(x)} \leq e^{-\tilde{c}_1 |x|^{\tilde{b}_1}},
$$

das heißt für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ mit $|x| > \max\{r_0, \tilde{a}\}$ erhält man

$$C|x|^{-b_2} \leq \Re\left(\phi_{M_t}(x)\right) \leq e^{-\tilde{c}_1 |x|^{\tilde{b}_1}},$$

was zum Widerspruch führt. $\square$

Kapitel 4

Random Walks in stetiger Zeit in der Theoretischen Chemie

Im letzten Teil dieser Arbeit soll es darum gehen, ein konkretes Beispiel eines Random Walk in stetiger Zeit anzugeben, und zwar aus dem Bereich der Theoretischen Chemie.

4.1 Was ist Theoretische Chemie?

Die Theoretische Chemie ist ein Teilgebiet der Chemie, in dem die Rolle des klassischen Experiments von Computersimulationen übernommen wird. Zu der Zeit, als es noch keine Computersimulationen gab, konnten die Theorien der Chemiker nur durch Experimente überprüft werden, was oft zu Schwierigkeiten führte, da man bei einer Diskrepanz von Theorie und Experiment nicht wusste, ob die Theorie selbst oder die zugrunde gelegte Modellvorstellung eine Schwachstelle hatte. Ein Problem der Chemie besteht nämlich darin, dass nur für eine geringe Anzahl an Systemen (wie zum Beispiel das ideale Gas) die Gleichgewichtseigenschaften analytisch berechnet werden können, wohingegen die Eigenschaften der meisten Stoffe nur auf der Basis von Modellvorstellungen, die auf Näherungstheorien wie zum Beispiel der van der Waals-Gleichung für reale Gase beruhen, zu bestimmen sind. Wollte man also eine neue Theorie anhand eines Experiments mit einem realen Gas überprüfen und scheiterte dieser Versuch, so musste das nicht zwangsläufig bedeuten, dass die Theorie falsch war: Es konnte genausogut sein, dass die Näherungen das reale System nicht hinreichend genau beschrieben und man daher zu ungenauen Ergebnissen kam. Die Computersimulationen, die Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts ihren Einzug in die Chemie fanden, boten einen Ausweg aus diesem Dilemma: Man konnte nun das Ergebnis der Simulation des Modellsystems mit den berechneten Ergebnissen vergleichen – stimmten diese nicht überein, so war es klar, dass die Theorie falsch war. Diese Methode, eine

Theorie mittels Computersimulation zu überprüfen, bevor sie auf die reale Welt angewendet wird, bezeichnet man auch als *Computerexperiment*. Sie hat dazu geführt, dass einige angesehene Theorien revidiert werden mussten. Heutzutage werden fast alle neuen Theorien zunächst mittels eines Computerexperiments getestet, wobei man allerdings nicht vergessen darf, dass auch die Ergebnisse einer Computersimulation mit statistischen Fehlern behaftet sein können.

Ein großer Vorteil von Computerexperimenten besteht darin, dass im Gegensatz zu klassischen Experimenten die äußeren Bedingungen wie Druck oder Temperatur keine Probleme bereiten. Möchte man die Eigenschaften eines Stoffes bei hohem Druck oder hoher Temperatur untersuchen, so kann dies im klassischen Experiment sehr teuer oder sogar unmöglich sein, während der Computer in jedem Fall seine Berechnungen anstellt. Ähnlich sieht es aus im Fall sehr seltener oder in der Herstellung extrem teurer Substanzen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass sich die Theoretische Chemie zu einem sehr wichtigen Teilgebiet entwickelt hat; das Computerexperiment kann allerdings das klassische Experiment nicht ersetzen, sondern nur ergänzen, da es lediglich Zahlen und kein tieferes Verständnis liefert. (Vgl. [FS], Chapter 1.)

4.2 Soft-Spheres-Systeme, die potentielle Energielandschaft und das Konzept der Metabassins

Ein wichtiges Arbeitsgebiet der Theoretischen Chemie sind die Gläser, deren Eigenschaften auch heute noch nicht vollständig verstanden werden. Gläser gehören zur Klasse der *amorphen Feststoffe*, das sind Feststoffe, in denen die Teilchen nicht zu einem regelmäßigen Muster angeordnet sind und die keinen definierten Schmelzpunkt besitzen. Ein Beispiel eines amorphen Feststoffes, der – neben Fensterglas – ein Bestandteil des alltäglichen Lebens ist, ist Honig. Obwohl die Herstellung von Glas seit mehreren Jahrtausenden bekannt ist, ist bis heute nicht hundertprozentig klar, welche physikalischen Prinzipien dahinterstecken.

Normalerweise kristallisiert eine Flüssigkeit, wenn man sie stark abkühlt, und geht in den festen Aggregatzustand über. Nun gibt es aber einige Materialien (wie zum Beispiel niedrig-molekulare organische Substanzen oder Legierungen), die, wenn man sie sehr schnell abkühlt, nicht kristallisieren, sondern zunächst im flüssigen Zustand verbleiben (man bezeichnet solche Flüssigkeiten als *unterkühlte Flüssigkeiten*). Setzt man den Kühlungsprozess noch weiter fort, nimmt die Viskosität der unterkühlten Flüssigkeit zu, das heißt sie wird immer zähflüssiger. Irgendwann ist eine Temperatur erreicht, bei der die Bewegung des Stoffes für das menschliche Auge nicht mehr sichtbar ist: ein Glas ist entstanden. (Die *Glasübergangstemperatur* T_g ist definiert als die Temperatur, bei der die Viskosität den Wert 10^{13} Poise erreicht.) Der Übergang von einer Flüssigkeit zu einem

Glas ist ein kinetisches Phänomen, da sich die Struktur des Stoffes nur minimal, seine Dynamik aber drastisch ändert. Stoffe, die bei schneller Abkühlung nicht kristallisieren, sondern zu einem Glas werden, bezeichnet man als *Glasbildner*, wobei man zwischen starken und fragilen Glasbildnern unterscheiden kann: Die *starken Glasbildner* gehorchen dem Arrhenius-Gesetz

$$\eta(T) \propto \exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) \ , \tag{4.2.1}$$

wobei η die Viskosität und T die Temperatur bezeichnet, E ist eine konstante Aktivierungsenergie und k_B ist die Boltzmann-Konstante. Die Viskosität der *fragilen Glasbildner* nimmt mit fallender Temperatur zunächst schwächer als die der starken Glasbildner zu, während sie in der Nähe von T_g wesentlich stärker wächst. Dies läßt sich durch eine Temperaturabhängigkeit der Aktivierungsenergie in (4.2.1) ausdrücken. (Vgl. [Do], S.1f und Abschnitt 1.1.)

Ein Modell eines Glasbildners ist ein System von $\frac{1}{5} \cdot N$ Teilchen der Sorte A und $\frac{4}{5} \cdot N$ Teilchen der Sorte B, die über das Potential

$$v\left(\vec{r_i}, \vec{r_j}\right) = \left(\frac{1}{r_{ij}}\right)^n \ \ (1 \leq i, j \leq N, i \neq j) \tag{4.2.2}$$

mit

$$r_{ij} = \sqrt{\left(\vec{r_i} - \vec{r_j}\right)^2} \ \text{ und } \ n \in \mathbb{N} \tag{4.2.3}$$

miteinander wechselwirken (dabei bezeichnet $\vec{r_i}$ die Koordinaten des i-ten Teilchens im $\mathbb{R}^3$). Ein solches System, das als *Soft-Spheres-System* bezeichnet wird, soll im Folgenden genauer betrachtet werden. Ausgehend von den Wechselwirkungspotentialen $v\left(\vec{r_i}, \vec{r_j}\right)$ lässt sich die potentielle Energie des Gesamtsystems gemäß

$$V\left(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_N}\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} v\left(\vec{r_i}, \vec{r_j}\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left(\frac{1}{r_{ij}}\right)^n \tag{4.2.4}$$

berechnen. Man erkennt sofort, dass die Energie einzig und allein von den Positionen der N Teilchen abhängt. Die Funktion V beschreibt eine extrem komplexe Fläche über dem Konfigurationsraum $\mathbb{R}^{3N}$, die als *potentielle Energielandschaft* (= *PEL*, vom englischen „potential energy landscape“) bezeichnet wird:

$$PEL = \left\{\left(\left(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_N}\right), V\left(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_N}\right)\right) : \left(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_N}\right) \in \mathbb{R}^{3N}\right\}.$$

In Abbildung 4.1 ist die potentielle Energielandschaft eines Soft-Spheres-Systems sehr vereinfacht dargestellt.

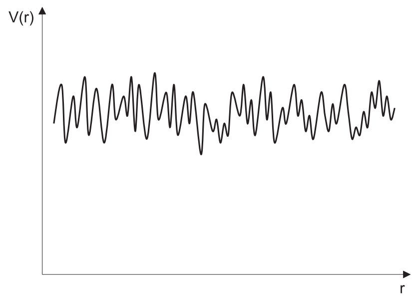

Abbildung 4.1: Die *PEL* eines Soft-Spheres-Systems (mit $r := (\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_N})$)

Die *PEL* enthält alle relevanten Informationen über das System. Um nun zu verstehen, was bei starker, rapider Abkühlung des Systems passiert, genügt es, sich mit den Minima der potentiellen Energielandschaft zu beschäftigen, da bei tiefen Temperaturen die hochenergetischen Zustände gar nicht erreicht werden und einzig und allein die Minima sinnvolle Informationen liefern. Um dieser Tatsache gerecht zu werden, arbeitet man nicht mit der *PEL* selbst, sondern vereinfacht sie auf folgende Weise zu einem zweckmäßigeren Modell:

Betrachtet man die potentielle Energielandschaft von oben, so ergibt sich ein Bild, das aus Bergen und Tälern – den Minima – besteht (siehe Abbildung 4.2, die Minima sind durch Kreuze gekennzeichnet).

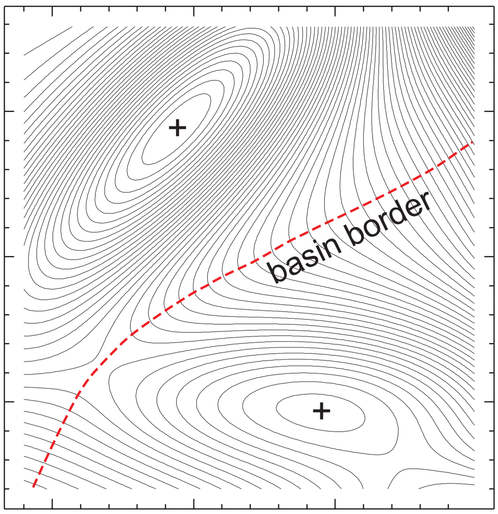

Abbildung 4.2: Die *PEL* aus der Vogelperspektive

Zu jedem Zeitpunkt des Abkühlungsprozesses befinden sich die N Teilchen des Soft-Spheres-Systems irgendwo im $3N$-dimensionalen Raum und haben ihren Positionen entsprechend eine gemeinsame potentielle Energie. Diese liegt aufgrund der niedrigen Temperaturen mit hoher Wahrscheinlichkeit in der Nähe eines Minimums. Anders ausgedrückt befindet sich das System sehr lange in der unmittelbaren Umgebung eines Minimums, bevor es extrem schnell in die Nähe eines anderen Minimums wechselt. Zeitlich gesehen hält sich das System also fast ausschließlich in den Minima der *PEL* auf. Stellt man sich nun vor, dass sich die Energie des Systems zeitlich entlang des in Abbildung 4.3 dargestellten Pfades ändert,

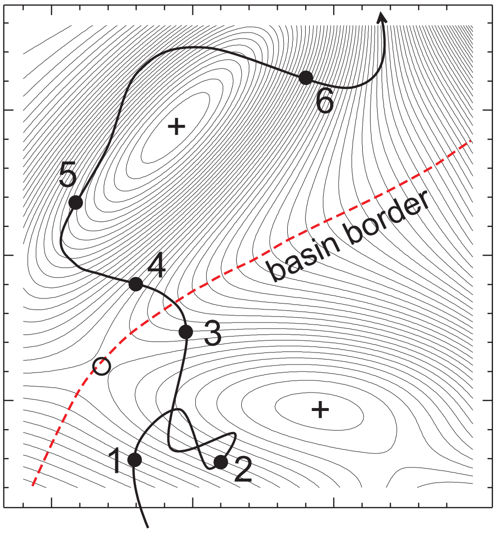

Abbildung 4.3: Wanderung des Soft-Spheres-Systems durch die *PEL*

und misst man die Energie zu den markierten Zeitpunkten, so ordnet man dem System zum Zeitpunkt t nicht seine tatsächliche Energie $V(t)$ zu, sondern die Energie $\varepsilon(t)$ des Minimums, in das ein Ball rollen würde, den man an der Stelle der tatsächlichen Energie platzieren würde („steepest descent“-Verfahren).

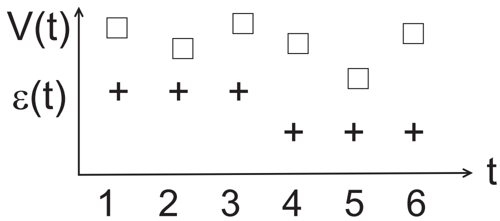

Abbildung 4.4: Zeitliche Änderung der Energie des Soft-Spheres-Systems

Dieses Modell, das statt des realen Pfades samt den zugehörigen Energien nur die Konfigurationen und Energien der entsprechenden Minima berücksichtigt, ist insofern eine zweckmäßige Vereinfachung der potentiellen Energielandschaft, als es nur die bei tiefen Temperaturen relevanten Informationen über das System verwendet. (Vgl. [Do], S.25f und S.54.)

Trägt man nun während des gesamten Abkühlungsprozesses in regelmäßigen Abständen die Energien der Minima gegen die Zeit auf, so erhält man einen sogenannten „fountain plot“, der in Abbildung 4.5 dargestellt ist.

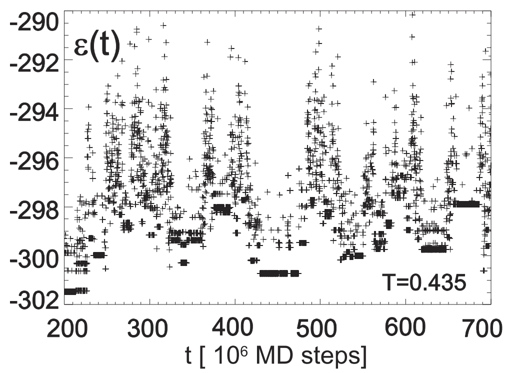

Abbildung 4.5: Der fountain-plot

Man kann sehr gut erkennen, dass es einige stabile Minimum-Konfigurationen gibt, in die das System während eines langen Zeitraums immer wieder hineinfällt (siehe zum Beispiel $t = 425$ bis $t = 475$). Alle Minima, in denen sich das System während dieses Zeitraums aufhält, werden zu einer Superstruktur zusammengefasst und als *Metabassin (MB)* bezeichnet. So wie beim Übergang von tatsächlichen Teilchenpositionen und tatsächlichen Energien zu Konfigurationen und Energien der Minima nimmt man auch hier eine Vereinfachung vor, indem man dem System, wenn es sich in einem *MB* befindet, die Konfiguration und Energie des Minimums aus dem *MB* zuordnet, das die niedrigste Energie besitzt. Im dritten Abschnitt wird näher erläutert, wie man solche Metabassins konstruiert. Während es zwischen den Minima innerhalb eines Metabassins starke Korrelationen gibt in dem Sinne, dass das System nach dem Verlassen eines niedrig-energetischen Minimums mit hoher Wahrscheinlichkeit wieder in das Minimum zurückfällt, treten solche Erscheinungen zwischen verschiedenen *MB*s nicht auf. (Vgl. [Do], Abschnitt 4.2.) Diese Tatsache ist ein erstes Indiz dafür, dass das Soft-Spheres-System, während es von einem Metabassin zum nächsten springt, einen Random Walk in stetiger Zeit ausführt. Diese Vermutung soll im vierten Abschnitt weiter begründet werden.

4.3 Molekulardynamik-(MD-)Simulation eines Soft-Spheres-Systems

Im Rahmen meiner Diplomarbeit habe ich mit meiner Kommilitonin Jasmin Grages ein Soft-Spheres-System am Computer simuliert. Unser Wunsch war es, nicht nur mathematisch zu arbeiten, sondern unser Nebenfach Chemie in die Arbeit mit einfließen zu lassen. Da wir während unseres Studiums eine Vorlesung über Theoretische Chemie gehört und ein begleitendes Computerpraktikum absolviert hatten, kam uns die Idee, uns an einen der beiden Dozenten, Herrn Prof. Dr. A. Heuer, zu wenden und um eine Zusammenarbeit mit unserem betreuenden Professor, Herrn Prof. Dr. G. Alsmeyer, zu bitten. Herr Heuer erzählte uns von den Projekten seines Arbeitskreises, der sich unter anderem mit Gläsern und ihren Eigenschaften beschäftigt, und bot uns an, im Arbeitskreis mitzuarbeiten. Unsere Aufgabe sollte es sein, ein Soft-Spheres-System mittels einer Molekulardynamik-Simulation (MD-Simulation) zu simulieren und die daraus erhaltenen Daten zu analysieren. Die Computerprogramme, die wir dabei verwenden sollten, mussten wir allerdings zum größten Teil nicht selbst schreiben, sondern konnten eine Reihe von Programmen nutzen, die von Herrn Dr. J. Reinisch (AK Heuer) entwickelt und von Frau Dr. A. Saksaengwijit (AK Heuer) erweitert worden waren. Wir teilten die Arbeit so auf, dass Frau Grages den Fall $n = 24$ und ich den Fall $n = 18$ (n aus (4.2.2)) untersuchte.

Das erste Ziel bestand darin, herauszufinden, welche Systemgröße N für die Simulation optimal ist. Wählt man N sehr groß, so dauert die Simulation extrem lange, da mit wachsender Systemgröße natürlich auch die Komplexität der potentiellen Energielandschaft zunimmt. Außerdem kommt noch hinzu, dass ab einer gewissen Systemgröße trotz steigender Komplexität der *PEL* nicht mehr Informationen gewonnen werden können, da das Gesamtsystem sich genauso verhält wie zwei, drei, ... oder sogar mehr als tausend unabhängige Teilsysteme. Es genügt daher, ein einziges derartiges Teilsystem zu untersuchen, um Aussagen über das Verhalten des Gesamtsystems treffen zu können. Auf der anderen Seite darf man N aber auch nicht zu klein wählen, da sonst wertvolle Informationen verloren gehen können. (Vgl. [Do], Seite 113.) Um herauszufinden, welches N optimal ist, führten wir für $N = 30$, $N = 65$, $N = 130$, $N = 600$ und $N = 1000$ eine Molekulardynamik-Simulation durch, bei der wir *periodische Randbedingungen* zugrundelegten:

Zu Beginn der Simulation werden die N Teilchen zufällig innerhalb eines Kastens der Länge, Breite und Höhe l verteilt. Man stellt sich nun vor, dass dieser Kasten an allen Seiten von Kästen der gleichen Größe umgeben ist, die eine Kopie des betrachteten Kastens darstellen, und dass sich dieses Muster endlos fortsetzt. Startet man die Simulation, so bewegen sich die Teilchen innerhalb des ursprünglich betrachteten Kastens aufgrund ihrer Wechselwirkungspotentiale. Geht man davon aus, dass die Bewegung in den anderen Kästen eine exakte Kopie der Bewegung im Ursprungskasten ist, so gelangt man zu der folgenden Beobachtung: Kommt es im Laufe der Simulation dazu, dass ein Teilchen den Ursprungskasten verläßt und eine Position innerhalb eines Nachbarkastens (zum Beispiel dem rechten) einnimmt, so tritt stattdessen die Kopie dieses Teilchens (aus dem linken Nachbarkasten) in den betrachteten Kasten ein. Auf diese Weise befinden sich immer N Teilchen in jedem Kasten, und die Daten der N Teilchen innerhalb des betrachteten Ursprungskastens sind die für die Auswertung

Entscheidenden.

Die Molekuardynamik-Simulation bestand darin, für jede der fünf Systemgrößen und die Temperatur $T = 1.1$ eine Equilibrierung des Systems vorzunehmen. Das war insofern wichtig, als die Teilchen zu Beginn rein zufällig in dem Kasten verteilt worden waren und zunächst einmal Positionen einnehmen mussten, die einem stabilen System entsprachen. Ausgehend von dieser Teilchenstruktur starteten wir dann mit der eigentlichen Simulation, die sowohl für $n = 18$ als auch für $n = 24$ ergab, dass eine Teilchenzahl von $N = 65$ optimal ist: Für $N = 30$ kristallisierte das System, die charakteristische Eigenschaft einer unterkühlten Flüssigkeit war also nicht gegeben; und die höheren Systemgrößen lieferten keine neuen Informationen. Folglich sollten wir beide den Teil der Simulation, der uns eigentlich interessierte, nämlich das Erstellen des fountain plot und somit die Bestimmung der Metabassins, für ein System, das aus 65 Teilchen besteht, durchführen. Herr Heuer bat mich außerdem, die Berechnungen auch für $N = 130$ und $N = 260$ durchzuführen, um einen Vergleich mit der niedrigeren Systemgröße herstellen und herausfinden zu können, ob sich die größeren Systeme tatsächlich wie zwei bzw. vier unabhängige Teilsysteme verhalten. Aufgrund von Computerproblemen musste ich die Simulation für $N = 130$ und $N = 260$ allerdings nach einigen Monaten abbrechen, sodass nur die Daten für $N = 65$ ausgewertet werden konnten.

Damit das Verhalten des Systems in verschiedenen Stadien des Abkühlungsprozesses untersucht werden konnte, führte ich die Simulationen mit verschiedenen Temperaturvorgaben durch, und zwar für die Fälle $T = 0.9$, $T = 1.0$, $T = 1.1$, $T = 1.3$, $T = 1.6$ und $T = 2.0$ (sowie $T = 1.2$ und $T = 1.3$ für $N = 65$). Die Simulationen lieferten neben dem fountain plot Angaben über Energien und Teilchenpositionen der Metabassins sowie über die Zeitspannen, die das System innerhalb der verschiedenen Metabassins verweilte. Wie man aus diesen Daten darauf schließen kann, dass die Wanderung des Soft-Spheres-Systems durch die *MB*s dem Prinzip des Random Walk in stetiger Zeit genügt, wird im nächsten Abschnitt beschrieben. An dieser Stelle soll nur noch kurz erläutert werden, wie der fountain plot zustande kommt und wie der Computer mit seiner Hilfe die Metabassins konstruiert:

Ein Simulationslauf besteht normalerweise aus 10^8 bis 10^{10} MD-Schritten. Würde man dem System bei jedem Schritt wie im zweiten Abschnitt beschrieben die Energie des zugehörigen Minimums zuweisen, so würde die Simulation viel zu lange dauern. Aus diesem Grund minimiert man nur nach jeweils 10^4 bis 10^6 MD-Schritten die Energie des Systems. Bezeichnet man die Konfiguration des Minimums, in dem sich das System zum Zeitpunkt t aufhält, mit $\xi(t)$, so erhält man also eine endliche Folge $\xi\,(t_i)$, $1 \leq i \leq m$, mit $m \in \mathbb{N}$. Stimmen nun $\xi(t_i)$ und $\xi(t_{i+1})$ überein, so ist nichts zu tun. Es kann zwar sein, dass das System zwischen den Zeitpunkten t_i und t_{i+1} noch andere Minima besucht hat, aber das Konzept der Metabassins besteht ja gerade darin, ständiges Hin- und

Herspringen zwischen einer gewissen Anzahl von Minima zu ignorieren und diese zu einer Superstruktur zusammenzufassen, so dass im Fall $\xi(t_i) = \xi(t_{i+1})$ auf dem Niveau der Metabassins keine Veränderung des Systems stattgefunden hat. Gilt hingegen $\xi(t_i) \neq \xi(t_{i+1})$, so muss auf das Zeitintervall $[t_i, t_{i+1}]$ die *„interval bisection"-Methode (IBM)* angewendet werden:

Man minimiert die Energie des Systems zum Zeitpunkt

$$t' := \frac{t_i + t_{i+1}}{2},$$

indem man wie im zweiten Abschnitt beschrieben auf $V(t')$ das „steepest descent"-Verfahren anwendet, und vergleicht $\xi(t')$ mit $\xi(t_i)$und $\xi(t_{i+1})$. Bei Übereinstimmung von $\xi(t_i)$ und $\xi(t')$ oder $\xi(t')$ und $\xi(t_{i+1})$ muss man das Zeitintervall $[t_i, t']$ bzw. $[t', t_{i+1}]$ nicht weiter untersuchen, bei Nichtübereinstimmung wird die *IBM* erneut angewendet usw. Auf diese Weise erhält man alle Zeitpunkte, zu denen relevante Übergänge zwischen Minima stattfinden.

Trägt man nun die minimierten Energien gegen die Zeit auf, so erhält man den fountain plot. Die *MB*s werden dann folgendermaßen konstruiert: Für jede Energie aus dem fountain plot ermittelt man den Zeitpunkt, zu dem die zugehörige Konfiguration das erste Mal auftrat und den Zeitpunkt, zu dem sie das letzte Mal auftrat. Liegt ein derartiges Zeitintervall komplett innerhalb eines anderen, so wird es nicht weiter beachtet und die beiden Minima befinden sich innerhalb desselben *MB*s. Gibt es zwischen zwei Intervallen eine Überschneidung, die mehr als fünfzig Prozent beträgt, so verschmelzen die beiden Intervalle zu einem Intervall und die beiden Minima gehören erneut zum selben Metabassin. Ist die Überschneidung geringer als fünfzig Prozent, so werden die Intervalle nach gewissen Regeln unterteilt und die Minima verschiedenen *MB*s zugewiesen. Auf diese Art und Weise ermittelt man nicht nur, welche Minima zu einem Metabassin vereint werden, sondern man weiß sogar, wie lang die Verweildauer in dem entsprechenden Metabassin ist. (Vgl. [Do], Abschnitt 4.2.) Wie bereits erwähnt sind Konfiguration und Energie eines *MB*s definiert als Konfiguration und Energie des Minimums innerhalb des Metabassins, das die niedrigste Energie besitzt. Damit ist klar, wie aus dem fountain plot auf die Daten geschlossen werden kann, die benötigt werden, um im nächsten Abschnitt das Vorliegen eines Random Walk in stetiger Zeit zu begründen (nämlich auf *MB*-Konfigurationen und Verweildauern innerhalb der Metabassins).

4.4 Warum ist die Wanderung des Soft-Spheres-Systems durch die Metabassins ein Random Walk in stetiger Zeit?

Unser letztes Ziel war es, zu begründen, warum die Bewegung des Soft-Spheres-Systems den Bedingungen eines Random Walk in stetiger Zeit genügt, wenn man nicht die tatsächlichen Koordinaten der N Teilchen betrachtet, sondern die Koordinaten der Metabassins, die während der Bewegung durchlaufen werden. Stellt man sich das gesamte System als ein Teilchen im $\mathbb{R}^{3N}$ vor, so kann man die Bewegung unter Verwendung von *MB*s folgendermaßen beschreiben: Das Teilchen, das sich zum Zeitpunkt $T_0 = 0$ (nach geeigneter Skalierung) im Ursprung befindet, springt nach einer Wartezeit J_1 in das erste Metabassin. Die Strecke, die es dabei zurücklegt, wird mit Y_1 bezeichnet, ihre Länge D_1 ist natürlich gerade der euklidische Abstand des ersten Metabassins vom Ursprung im $\mathbb{R}^{3N}$. Das Teilchen verweilt eine Zeit J_2, die – wie im letzten Abschnitt beschrieben – aus dem fountain plot ermittelt werden kann, im ersten Metabassin, bevor es ins zweite *MB* springt und dabei eine Strecke Y_2 der Länge D_2 zurücklegt, usw.

Aufgrund der in Abschnitt 3.1 gegebenen Definition eines Random Walk in stetiger Zeit mussten wir also zum einen zeigen, dass sowohl die Wartezeiten J_i $(i \geq 1)$ als auch die Sprungvektoren Y_i $(i \geq 1)$ unabhängig sind, und zum anderen die Unabhängigkeit von $(J_i)_{i\geq 1}$ und $(Y_i)_{i\geq 1}$ nachweisen. Aus Gründen der Einfachheit betrachteten wir jedoch nicht die Folge $(Y_i)_{i\geq 1}$ der Sprungvektoren selbst, sondern die Folge $(D_i)_{i\geq 1}$ ihrer Längen. Unsere Vorgehensweise soll hier kurz erläutert werden:

Die Molekulardynamik-Simulation lieferte uns wie im letzten Abschnitt beschrieben die *MB*-Konfigurationen und die Verweildauern innerhalb der Metabassins, die das Soft-Spheres-System während seiner Wanderung durch die potentielle Energielandschaft durchläuft. Bezeichnet M die Gesamtanzahl der aufgesuchten *MB*s, so erhielten wir also einen $\mathbb{R}^M$-wertigen Vektor $(J_i)_{1\leq i\leq M}$ und einen $\mathbb{R}^{3\cdot 65\cdot M}$-wertigen Vektor, der die 3-dimensionalen Koordinaten der M Metabassins enthielt. Die Informationen über die Positionen der Metabassins nutzten wir, um den euklidischen Abstand der *MB*s und somit die Längen der einzelnen Sprünge zu berechnen, die wir im Vektor $(D_i)_{1\leq i\leq M}$ zusammenfassten. Um zu begründen, dass die Wartezeiten von den Sprüngen unabhängig sind, berechneten wir den Korrelationskoeffizienten

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(J,D)}{\sqrt{\mathrm{Var}J}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}D}} = \frac{\mathbb{E}((J-\mathbb{E}J)\cdot(D-\mathbb{E}D))}{\sqrt{\mathbb{E}(J-\mathbb{E}J)^2}\cdot\sqrt{\mathbb{E}(D-\mathbb{E}D)^2}}$$

von $J = (J_i)_{1\leq i\leq M}$ und $D = (D_i)_{1\leq i\leq M}$, wobei der Erwartungswert in diesem Fall natürlich als Mittelwert zu verstehen ist. Unsere Ergebnisse für den Fall $n = 18$ und $N = 65$ sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst und bilden ein deutliches Indiz für die gewünschte Unabhängigkeit:

Temperatur	ρ
$T = 1.05$	0.0424259
$T = 1.2$	0.0134259
$T = 1.3$	0.0125918

Bei der Untersuchung der Unabhängigkeit der Wartezeiten J_i, $1 \leq i \leq M$, bzw. der Sprunglängen D_i, $1 \leq i \leq M$, wählten wir ein ähnliches Vorgehen, indem wir für jedes $1 \leq m \leq 50$ den Ausdruck

$$\rho_{\log J}(m) = \frac{\frac{1}{M-m} \cdot \sum_{n=1}^{M-m} \left((\log J_{n+m} - \mathbb{E}(\log J)) \cdot (\log J_n - \mathbb{E}(\log J)) \right)}{\mathbb{E}(\log J - \mathbb{E}(\log J))^2}$$

mit

$$\log J = (\log J_i)_{1 \leq i \leq M}$$

und den analogen Ausdruck $\rho_{\log D}(m)$ berechneten und gegen m auftrugen. Die Ergebnisse für den Fall $n = 18$, $N = 65$ und $T = 1.05$ sind in Abbildung 4.6 dargestellt.

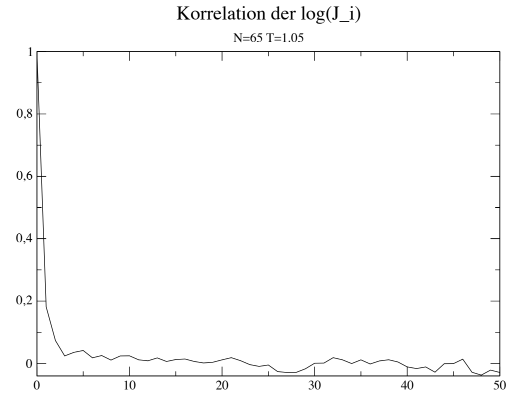

Abbildung 4.6: Die Korrelation der Wartezeiten

Man kann gut erkennen, dass schon für $m = 2$ der Wert von $\rho_{\log J}(m)$ kleiner als $0,1$ ist, was auf die Unabhängigkeit der Wartezeiten hindeutet. Eine ähnliche Kurve ergibt sich für die Korrelation der Sprungweiten.

Abschließend kann man sagen, dass unsere gesamten Ergebnisse die Behauptung untermauern, dass die Bewegung des Soft-Spheres-Systems durch die Metabassins den Bedingungen eines Random Walk in stetiger Zeit genügt.

Unsere Simulationen des Soft-Spheres-Systems bei niedrigen Temperaturen haben noch zu einigen anderen Resultaten geführt, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden, für Herrn Heuer und seinen Arbeitskreis aber durchaus von Interesse waren. Sie sind Bestandteil eines Artikels mit dem Titel „The potential energy landscape of glass-forming systems – What do we learn about the dynamics?“, den Herr Heuer über die Ergebnisse seines Arbeitskreises geschrieben hat und der voraussichtlich in der Zeitschrift „Journal of Physics: Condensed Matter (topical review)“ erscheinen wird.

Literaturverzeichnis

[A] G. Alsmeyer (2000)
Wahrscheinlichkeitstheorie. Universität Münster.

[Be] J. Bertoin (1996)
Lévy Processes. Cambridge University Press.

[Bi] P. Billingsley (1968)
Convergence of Probability Measures. Wiley, New York.

[Bin] N.H. Bingham (1971)
Limit Theorems for Occupation Times of Markov Processes. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 17, 1-22.

[Bo] S. Bosch (2001)
Lineare Algebra. Springer-Verlag.

[Do] B. Doliwa (2003)
The Dynamics of a Small Model Glass Former as Viewed from Its Potential Energy Landscape. Shaker Verlag, Aachen.

[Du] R. M. Dudley (1989)
Real Analysis and Probability. Wadsworth & Brooks/Cole.

[E] J. Elstrodt (2002)
Maß- und Integrationstheorie. Springer-Verlag.

[FG] B. Fristedt und L. Gray (1997)
A Modern Approach to Probability Theory. Birkhäuser, Boston.

[FS] D. Frenkel und B. Smit (1996)
Understanding Molecular Simulation: from Algorithms to Applications. Academic Press.

[H] H. Heuser (2000)
Lehrbuch der Analysis Teil 1. Teubner.

[JS] J. Jacod und A.N. Shiryaev (1987)
Limit Theorems for Stochastic Processes. Springer-Verlag.

[JM] Z.J. Jurek und J.D. Mason (1993)
Operator-Limit Distributions in Probability Theory. Wiley, New York.

[MS1] M.M. Meerschaert und H.-P. Scheffler (2001)
Limit Distributions for Sums of Independent Random Vektors. Heavy Tails in Theory and Practice. Wiley.

[MS2] M.M. Meerschaert und H.-P. Scheffler (2001)
Limit Theorems for Continuous Time Random Walks. Preprint, University of Nevada. Available at http://unr.edu/homepage/mcubed/.

[Sa] K.-I. Sato (1999)
Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press.

[Se] E. Seneta (1976)
Regularly Varying Functions. Lecture Notes in Mathematics 508, Springer-Verlag.

[Sk] A.V. Skorokhod (1956)
Limit Theorems for Stochastic Processes. Theory of Probability and its Applications 1, 261-290.

[St] C. Stone (1963)
Weak Convergence of Stochastic Processes defined on semi-infinite time intervals. Proceedings of the American Mathematical Society 14, 694-696.

[UZ] V.V. Uchaikin und V.M. Zolotarev (1999)
Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications. VSP, Utrecht.

[W] W. Whitt (1980)
Some useful Functions for Functional Limit Theorems. Mathematics of Operations Research 5, 67-85.

Ich versichere, dass ich diese Arbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, 25. Juni 2007

Mareike Assink