

Stabilité d'un film mince en écoulement sur une surface poreuse

Uwe Thiele^a, Benoît Goyeau^b, Manuel G. Velarde^c

^a Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme, Nöthnitzer Str. 38, D-01187 Dresden, Germany.

^b Laboratoire FAST, Universités Paris VI et Paris XI, UMR CNRS 7608

Bât. 502 Campus Universitaire F-91405 Orsay Cedex, France.

^c Instituto Pluridisciplinar, Universidad Complutense, E-28040 Madrid, Spain.

Résumé :

On présente une étude de stabilité d'un film mince en écoulement le long d'un substrat solide, chauffé par le bas et couvert d'une couche poreuse. L'équation d'évolution de la surface libre est obtenue à l'aide d'un développement aux petits nombres d'onde et une étude de stabilité linéaire met en évidence la dépendance des nombres de Reynolds et Marangoni critiques en fonction des caractéristiques de la couche poreuse. Une attention particulière est portée au cas isotherme.

Abstract :

A stability analysis of a thin liquid film flowing down a heated solid substrate covered by a porous layer is presented. An evolution equation for the free surface of the liquid film is derived using a long-wave approximation. A linear stability analysis shows the dependence of the critical Reynolds and Marangoni numbers with the characteristics of the porous layer. Special attention is given to the isothermal case.

Mots clès :

film mince, stabilité linéaire, milieu poreux

1 Introduction

L'étude de la stabilité d'un film mince en écoulement sur un substrat solide a fait l'objet d'un grand nombre de travaux ces dernières décénies. La déstabilisation de ces écoulements est souvent décrite à l'aide d'une équation d'évolution de l'épaisseur du film basée sur une approximation aux faibles nombres d'ondes de l'équation de Navier Stokes. Dans la plupart des travaux, le substrat solide est supposé parfaitement lisse et imperméable conduisant à l'écriture d'une condition limite d'adhérence à l'interface liquide-solide. Pourtant, un certain nombres de situations pratiques mettent en jeu des écoulements sur des surfaces rugueuses ou recouvertes d'une couche poreuse. Ce genre de configuration a principalement fait l'objet d'études concernant l'étalement de films ou de gouttes [1, 2] mais jamais du point de vue de la stabilité de l'écoulement du film. Du point de vue de la modélisation, l'une des difficultés rencontrée dans ce genre de configuration concerne la représentation des mécanismes à l'interface fluide-poreux. En effet, dans le cas où les régions fluide et poreuse sont décrites séparément (modèle à deux domaines) les équations de conservations dans chacune d'entres elles sont explicitement couplées par des conditions limites interfaciales dont l'écriture reste un sujet d'actualité [3].

Le travail présenté ci-dessous concerne l'étude de la stabilité d'un film mince en écoulement sur une couche poreuse recouvrant un substrat solide incliné pouvant être chauffé. Dans un premier temps, l'équation d'évolution de l'épaisseur du film est obtenue à partir d'une approximation aux grands nombre d'onde et dans un deuxième temps, une étude de stabilité linéaire met en évidence la dépendance des nombres de Reynolds et Marangoni critiques en fonction des caractéristiques de la couche poreuse. Le cas isotherme est plus particulièrement étudié.

2 Modélisation mathématique

On considère l'écoulement bidimensionnel d'un film tombant sur une couche poreuse saturée par le même liquide et recouvrant un substrat solide dont la surface est chauffée de manière uniforme (figure 1). Un modèle à deux domaines est adopté pour lequel les équations de con-

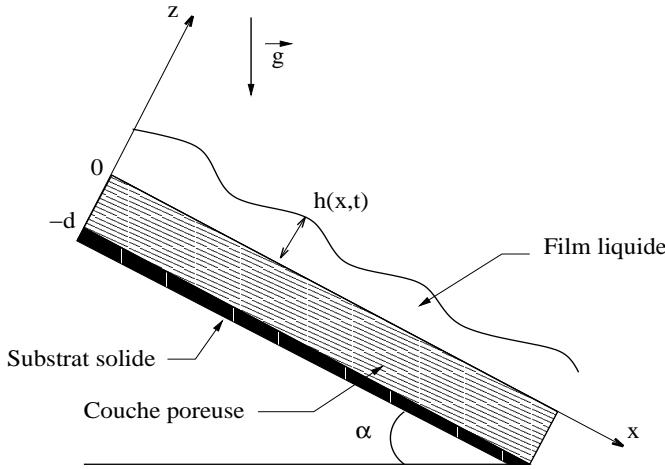


Figure 1: Schéma d'un film tombant sur une couche poreuse.

servation (masse, quantité de mouvement et énergie) dans le film s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\rho c(T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T) = k_{th} \nabla^2 T, \quad (3)$$

où \mathbf{u} représente le champ de vitesse, p la pression et T la température. ρ , μ , c , et k_{th} désignent respectivement la densité, la viscosité dynamique, la chaleur spécifique et la conductivité thermique du fluide. De la même manière, en supposant l'équilibre thermique local et l'absence d'effet d'inertie au sein de la couche poreuse, les écoulements et les transferts au sein de cette dernière peuvent être décrits par

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\rho}{b} \tilde{\mathbf{u}}_t = -\nabla \tilde{p} + \mu_{eff} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \rho \mathbf{g} - \frac{\mu}{\kappa} \tilde{\mathbf{u}}, \quad (5)$$

$$(\rho c)_{eff} \tilde{T}_t + (\rho c) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} = k_{th}^{eff} \nabla^2 \tilde{T}, \quad (6)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est la vitesse de filtration, \tilde{p} la pression et \tilde{T} la température. μ_{eff} , $(\rho c)_{eff}$ et k_{th}^{eff} représentent les propriétés effectives du milieu poreux (viscosité, chaleur volumique et conductivité thermique) et κ et b désignent la perméabilité et la porosité.

Les équations (1)-(6) sont associées à un ensemble de conditions limites aux différentes interfaces du système. A la surface libre ($z = h$), la condition de saut dynamique, la continuité des flux de chaleur et la condition de saut cinématique s'écrivent respectivement

$$-(p - p_\infty) \mathbf{n} + 2\mu \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n} = 2\sigma K \mathbf{n} + \nabla_s \sigma \quad \text{en } z = h, \quad (7)$$

$$k_{th} \nabla T \cdot \mathbf{n} + \alpha_{th} (T - T_\infty) = 0 \quad \text{en } z = h, \quad (8)$$

$$w - h_t - uh_x = 0 \quad \text{en} \quad z = h, \quad (9)$$

où $\underline{\mathbf{P}} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)/2$ est le tenseur taux de déformation, $\mathbf{n} = (-h_x, 1)/\sqrt{1+h_x^2}$ est la normale à la surface, $\nabla_s = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}$ et $K = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{n}$ représente la courbure de l'interface, σ étant la tension superficielle. Dans l'équation (8) α_{th} est le coefficient d'échange et T_∞ désigne la température de l'air. La condition (9) impose de maintenir le milieu poreux saturé.

A l'interface fluide-poreux ($z = 0$), la nature des équations de Navier-Stokes et de Darcy Brinkman permet de satisfaire la continuité des vitesses

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (10)$$

et de s'affranchir ainsi de la traditionnelle condition de glissement proposée par [4]. Par contre, la prise en compte des hétérogénéités spatiales de la région interfaciale nécessite l'écriture d'une condition de saut sur les contraintes tangentielles [5]

$$\mu_{\text{eff}} \tilde{u}_z - \mu u_z = \frac{\xi}{\sqrt{\kappa}} \tilde{u} \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (11)$$

où le coefficient de saut ξ tient compte des variations spatiales de la géométrie de l'interface [3]. Si $\xi = 0$ (interface poreuse idéale, i.e. parfaitement homogène) la continuité des contraintes tangentielles est satisfaite. La continuité des contraintes normales s'écrit quant à elle sous la forme

$$\tilde{p} + \mu_{\text{eff}} \tilde{w}_z = p + \mu w_z \quad \text{en} \quad z = 0, \quad (12)$$

Du point de vue thermique, les conditions à l'interface fluide-poreux sont

$$T = \tilde{T} \quad \text{en} \quad z = 0, \quad (13)$$

$$k_{\text{th}} T_z = k_{\text{th}}^{\text{eff}} \tilde{T}_z \quad \text{en} \quad z = 0, \quad (14)$$

Enfin, sur le substrat solide ($z = -d$) les conditions limites dynamique et thermique s'écrivent

$$\tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{en} \quad z = -d, \quad (15)$$

$$T = T_s \quad \text{en} \quad z = -d. \quad (16)$$

3 Equation d'évolution

La mise sous forme adimensionnelle du système (1)-(16) est obtenue à l'aide des variables adimensionnelles suivantes [6, 7] :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{h}}{\epsilon} x', & z &= \bar{h} z', & t &= \frac{\bar{h}^2 \rho}{\mu \epsilon} t, & T' &= \frac{(T - T_\infty)}{\Delta T} \\ (u, \tilde{u}) &= \frac{\mu}{\rho \bar{h}} (u', \tilde{u}'), & (w, \tilde{w}) &= \epsilon \frac{\mu}{\rho \bar{h}} (w', \tilde{w}'), & (p, \tilde{p}) &= \frac{\mu^2}{\rho \bar{h}^2} (p', \tilde{p}') \end{aligned} \quad (17)$$

où \bar{h} est l'épaisseur moyenne du film et où ϵ désigne le rapport $\bar{h}/L \ll 1$, L étant l'échelle caractéristique de la déformation de la surface libre. $\Delta T = T_s - T_\infty$ est l'écart de température entre le substrat solide et l'air ambiant. Dans la suite, on notera $\delta = d/\bar{h}$ l'épaisseur adimensionnelle de la couche poreuse. L'ensemble des champs adimensionnels sont ensuite développés sous la forme générique $\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + O(\epsilon^2)$ et les solutions des problèmes à l'ordre 1

et $O(\epsilon)$ sont obtenues analytiquement. L'équation d'évolution de l'épaisseur du film est alors établie en introduisant h_τ et h_{τ_1} (obtenus à partir de la condition (9)) dans la décomposition $h_t = h_\tau + \epsilon h_{\tau_1} + O(\epsilon^2)$ pour finalement obtenir

$$\begin{aligned} h_t &= -\operatorname{Re} [F_1(h)]_x \\ &- \epsilon \left[\operatorname{Re}^2 F_2(h) h_x - \operatorname{Re} \cot \alpha F_3(h) h_x + \frac{\operatorname{Ma}^* \operatorname{Bi}^*}{(1 + \operatorname{Bi}^* h)^2} F_4(h) h_x + F_3(h) \frac{h_{xxx}}{\operatorname{Bo}^*} \right]_x \end{aligned} \quad (18)$$

Dans cette expression, les $F_i(h)$ sont des fonctions polynomiales de h

$$\begin{aligned} F_1(h) &= \frac{h^3}{3} + r_1 \frac{h^2}{2} + r_2 h, \\ F_2(h) &= \frac{2}{15} h^6 + r_3 h^5 + r_4 h^4 + r_5 h^3 + r_6 h^2 + r_7 h + r_8, \\ F_3(h) &= \frac{1}{3} h^3 + r_9 h^2 + r_{10} h + r_{11}, \\ F_4(h) &= \frac{1}{2} h^2 + r_{12} h + r_{13}. \end{aligned} \quad (19)$$

et où les r_i désignent des constantes dépendantes des constantes d'intégration des solutions à l'ordre 1 et $O(\epsilon)$. Dans l'équation (18), Re est le nombre de Reynolds et Ma^* et Bi^* représentent les nombres effectifs de Marangoni et de Biot définis par

$$\operatorname{Ma}^* = \frac{\operatorname{Ma}}{1 + \operatorname{Bi} \frac{\delta}{\Lambda_{eff}}} \quad , \quad \operatorname{Bi}^* = \frac{\operatorname{Bi}}{1 + \operatorname{Bi} \frac{\delta}{\Lambda_{eff}}}, \quad (20)$$

4 Stabilité linéaire

4.1 Cas général

La solution de l'équation (18) est écrite sous la forme $h = 1 + \tilde{\epsilon} \exp(\beta t) \exp(ikx)$ puis est linéarisée par rapport à la variable $\tilde{\epsilon}$. En adoptant les notations

$$f_2 = \frac{2}{15} + \sum_{i=3}^8 r_i, \quad f_3 = \frac{1}{3} + \sum_{i=9}^{11} r_i, \quad f_4 = \frac{1}{2} + r_{12} + r_{13} \quad (21)$$

la relation de dispersion peut se mettre sous la forme

$$i\beta_i + \beta_r = -i\operatorname{Re} (1 + r_1 + r_2) k + \frac{\epsilon}{\operatorname{Bo}^*} k^2 (k_c^2 - k^2) f_3 \quad (22)$$

où le nombre d'onde critique k_c est défini par

$$k_c^2 = \frac{\operatorname{Bo}^*}{f_3} \left[\operatorname{Re}^2 f_2 - \operatorname{Re} \cot \alpha f_3 + \frac{\operatorname{Ma}^* \operatorname{Bi}^*}{(1 + \operatorname{Bi}^*)^2} f_4 \right]. \quad (23)$$

avec Bo , le nombre de Bond caractérisant le rapport des effets de la gravité et de la tension superficielle. Dans ces conditions, la gamme des nombres d'onde correspondants au mode instable est comprise entre $k = 0$ et k_c et les ondes de faible amplitude à k_c sont convectées à la vitesse $c = -\beta_i/k = \operatorname{Re} (1 + r_1 + r_2)$ correspondant à la vitesse de la surface $u(h)$ du film non perturbé. On constate que le développement de l'instabilité est indépendant du nombre de

Bond et qu'il apparaît pour $k = k_c = 0$. Les valeurs critiques de Ma^* , Re et Bi^* sont alors liées par l'expression

$$0 = \left[\text{Re}_c^2 f_2 - \text{Re}_c \cot \alpha f_3 + \frac{\text{Ma}_c^* \text{Bi}_c^*}{(1 + \text{Bi}_c^*)^2} f_4 \right] \quad (24)$$

où $f_3 \neq 0$. On introduit à présent la notation

$$M = \frac{\text{Ma}^* \text{Bi}^*}{(1 + \text{Bi}^*)^2} \quad (25)$$

et l'on représente figure 2 sa valeur critique en fonction de Re pour différentes valeurs du nombre de Darcy ($\text{Da} = \kappa / \bar{h}^2$) et de la porosité b pour une inclinaison $\alpha = \pi/4$ et pour une interface fluide-poreux idéale ($\chi = \xi/\mu = 0$). On constate figure 2 (a) que le comportement qualitatif

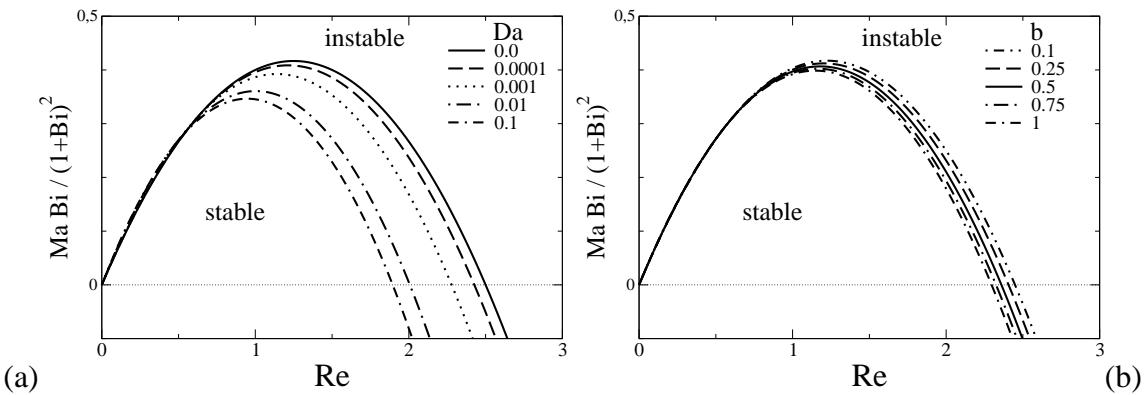


Figure 2: Nombre de Marangoni critique en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs a) du nombre de Darcy Da ($\delta=0.1$); b) de la porosité b ($\delta=3$).

de la courbe de stabilité est identique à celui décrit en l'absence de couche poreuse ($\text{Da} = 0$) par [8]. Toutefois, l'augmentation du nombre de Darcy conduit d'une part, à une diminution sensible de la gamme du nombre de Reynolds pour laquelle l'écoulement reste stable et, d'autre part, à une diminution de la valeur maximale $M = M_s = (f_3 \cot \alpha)^2 / (4 f_2 f_4)$. L'influence de la porosité, bien que modeste, agit dans le même sens (figure 2 (b)).

4.2 Cas isotherme

Dans le cas isotherme ($\text{Ma} = 0$), le nombre de Reynolds critique est donné par $\text{Re}_c = \cot \alpha f_3 / f_2$. En l'absence de couche poreuse ($\text{Da} \rightarrow 0$), ce critère se réduit au résultat classique $\text{Re}_c^0 = \frac{5}{2} \cot \alpha$ obtenu par [9] et [10]. On représente figure 3 l'influence des variations des nombres de Reynolds et d'onde critiques en fonction du nombre de Darcy pour différentes valeurs de la porosité et pour une épaisseur $\delta = 0.1$. Les résultats, présentés en termes de rapport avec la valeur critique Re_c^0 , mettent en évidence une décroissance monotone importante avec l'augmentation de Da . La forte diminution est observée pour Da compris entre 10^{-4} et 10^{-2} correspondant à la transition entre le "comportement poreux" et "fluide" de la couche poreuse.

5 Conclusion

Une étude de stabilité d'un film mince en écoulement sur une surface poreuse recouvrant un substrat solide chauffé a été réalisée. Les résultats préliminaires montrent clairement le caractère

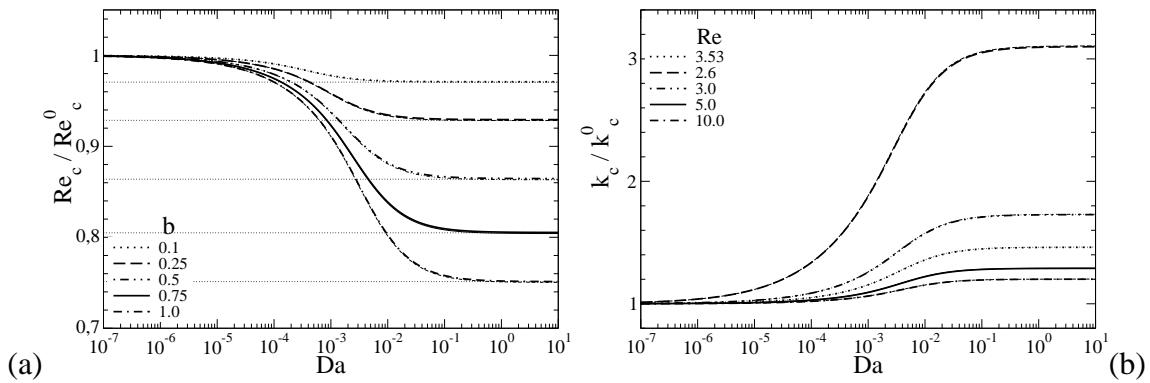


Figure 3: Stabilité linéaire : cas isotherme. a) Evolution du nombre de Reynolds critique; b) nombre d'onde critique ($b=1$)

déstabilisant de la couche poreuse sur le film tombant. L'influence des nombreux paramètres du problème (épaisseur δ , inclinaison α , coefficient de saut χ , intensité de l'écoulement, Ma,...) reste à étudier. Une analyse de stabilité non linéaire est actuellement en cours.

References

- [1] S. H. Davis and L. M. Hocking. Spreading and imbibition of viscous liquid on a porous base. *Phys. Fluids*, 11:48–57, 1999.
- [2] V. M. Starov, S. R. Kosvintsev, V. D. Sobolev, M. G. Velarde, and V. G. Zhdanov. Spreading of liquid drops over saturated porous layers. *J. of Colloids and Interface Science*, 246:372–379, 2002.
- [3] B. Goyeau, D. Lhuillier, D. Gobin, and M.G. Velarde. Momentum transport at a fluid-porous interface. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 46(21):4071–4081, 2003.
- [4] G. S. Beavers and D. D. Joseph. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.*, 30:197–207, 1967.
- [5] J. A. Ochoa-Tapia and S. Whitaker. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-I. Theoretical development. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38:2635–2646, 1995.
- [6] J.P. Burelbach, S.G. Bankoff, and S.H. Davis. Nonlinear stability of evaporating/condensing liquid films. *J. Fluid Mech.*, 195:463–494, 1988.
- [7] B. Scheid, A. Oron, P. Colinet, U. Thiele, and J. C. Legros. Nonlinear evolution of nonuniformly heated falling liquid films. *Phys. Fluids*, 14:4130–4151, 2002.
- [8] S. W. Joo, S. H. Davis, and S. G. Bankoff. Long-wave instabilities of heated falling films: two-dimensional theory of uniform layers. *J. Fluid Mech.*, 230:117–146, 1991.
- [9] T. B. Benjamin. Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 2:554, 1957.
- [10] C.S. Yih. Stability of liquid flow down an inclined plane. *Phys. Fluids*, 6:321–334, 1963.