Übungen zu den theor. Ergänzungen zur Physik II (SS 2011) **Übungsblatt 7**

Besprechung der Übungsaufgaben: 11.07.11

Aufgabe 15: Perle auf rotierendem Drahtring (mündlich, 10 Punkte)

Eine Perle (Masse m) gleite auf einem glatten Drahtring (Radius a), der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seinen vertikalen Durchmesser dreht.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems an. Benutzen Sie die Koordinate θ gemäß Skizze.

b) Wie lautet die Bewegungsgleichung der Perle? Skalieren Sie die Zeit gemäß $t^2 \longrightarrow \frac{t^2 g}{a}$ und setzen Sie $\lambda = \frac{\omega^2 a}{g}$.

c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtszustände, d.h. Zustände mit $\ddot{\theta} = 0$.

d) Untersuchen Sie die gefundenen Gleichgewichtszustände auf ihre Stabilität, indem Sie in den um die Gleichgewichtszustände linearisierten Bewegungsgleichungen nach den λ-Werten suchen, für die infinitesimale Abweichungen von den Gleichgewichtszuständen zur Zeit $t = 0$ im Limes $t \longrightarrow \infty$ zerfallen.

e) Bestimmen Sie die Gleichung für die Zustandsraumtrajektorie, d.h. $\dot{\theta}$ als Funktion von θ.

f) Zeichnen sie für $\lambda > 1$ und $\lambda < 1$ die möglichen Zustandsraumtrajektorien in ein θ-$\dot{\theta}$-Diagramm ein („Zustandsraumporträt“).

g) Zeichnen Sie das Bifurkationsdiagramm, d.h. als Funktion des „Kontrollparameters“ λ die stabilen bzw. instabilen Gleichgewichtslösungen.

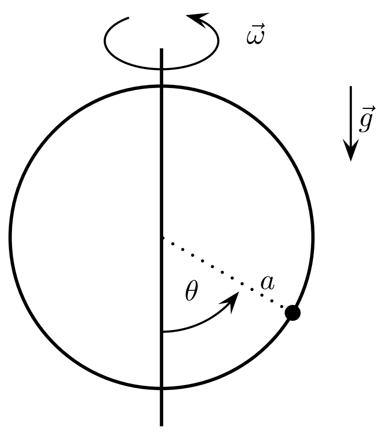

Abbildung 1: Perle auf rotierendem Drahtring

Aufgabe 16: **Verallgemeinerte Landau-Gleichung** (mündlich, 10 Punkte)

Die verallgemeinerte Landau-Gleichung für die reelle skalare Variable $x(t)$ ist gegeben durch

$$\dot{x} = \epsilon x - bx^3 - cx^5 \ , \tag{1}$$

mit ϵ, b und c als (konstante) Kontrollparameter.

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte bzw. stationäre Lösungen von Gl. (1), die durch die Bedingung $\dot{x} = 0 \quad \forall t$ gegeben sind.

b) Gleichung (1) kann auch als Bewegung in einem eindimensionalen Potential $V(x)$ mit $\dot{x} = -\partial_x V(x)$ betrachtet werden. Skizzieren Sie grob die verschiedenen Potentialformen für positive bzw. negative ϵ, b und / oder c und entscheiden Sie, welche der Fixpunkte unter a) stabil bzw. instabil sind.

c) Testen Sie die verschiedenen Fixpunkte aus a) auf <u>lineare</u> Stabilität, d.h. betrachten Sie kleine Abweichungen vom Fixpunkt x^*, d.h. $x(t) = x^* + \delta(t)$ mit $|\delta(t)| \ll 1$, berechnen Sie die linearisierten Bewegungsgleichungen für $\delta(t)$ und überprüfen Sie, ob $\delta(t \to \infty) \longrightarrow 0$ geht oder divergiert.

d) Skizzieren Sie die Bifurkationsdiagramme von Gl. (1), d.h. die Abhängigkeit der Langzeitlösungen / Fixpunkte als Funktion von ϵ für die verschiedenen Vorzeichenkombinationen von b und c.