Übungen zu den theor. Ergänzungen zur Physik II (SS 2011) Übungsblatt 6

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (in den Übungen) 30.06.11
Besprechung der Übungsaufgaben: 04.07.11

Aufgabe 13: **Possionklammer-Formalismus** (schriftlich, 10 Punkte)

Die physikalischen Größen $f = f(\vec{q}, \vec{p}, t)$, $g = g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $h = h(\vec{q}, \vec{p}, t)$ mit $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ sowie $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, seien differenzierbare Funktionen (Observable). Für die zeitliche Entwicklung dieser Größen gilt (vgl. Vorlesung) z.B.:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\} + \partial_t f \ ,$$

wobei $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ die Hamilton-Funktion des betrachteten Systems ist und $\{\ldots, \ldots\}$ die Poissonklammer

$$\{f, g\} = \{f, g\}_{\vec{q},\vec{p}} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Poissonklammern:

Linearität: $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, h\} + c_2 \{g, h\}$; $c_i = \text{const.}$

Antisymmetrie: $\{f, g\} = -\{g, f\}$

Nullelement: $c = \text{const} \Longrightarrow \{c, f\} = 0$

Produktregel: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\} g$

b) Zeigen Sie für den Fall des harmonischen Oszillators mit

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2$$

dass

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= \{p, H\} &= -kx \end{aligned}$$

gilt und bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung.

c) Weisen Sie das Poissonsche Theorem nach:

$f = f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $g = g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ seien Erhaltungsgrößen, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g.$$

Dann ist auch die mit f und g gebildete Poissonklammer $\{f, g\}$ eine Erhaltungsgröße.

Aufgabe 14: Eindimensionales zweiatomiges Molekül (mündlich, 10 Punkte)

Ein lineares zweiatomiges Molekül bestehe aus zwei Massen m_1 und m_2, die durch eine Feder der Federkonstante k verbunden sind (vgl. Skizze). Die Auslenkungen aus den Gleichgewichtslagen seien x_1, x_2, die Molekülbewegung finde nur entlang der x-Achse statt.

a) Bestimmen Sie die kinetische Energie T und potentielle Energie V für beliebige Auslenkungen x_1, x_2. Wie lautet die Lagrange-Funktion, wie die zugehörige Hamiltonfunktion?

b) Bestimmen Sie mittels der Hamilton-Gleichung die Bewegungsgleichungen für die zwei Auslenkungen x_1 und x_2.

c) Mit einem Ansatz $x_j(t) = c_j e^{i\omega t}$ für $j = 1, 2$ bestimme man die Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 des Systems.

d) Interpretieren und skizzieren Sie mögliche Schwingungsformen des Systems.

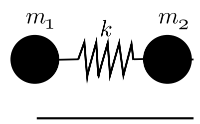

Abbildung 1: Lineares zweiatomiges Molekül