Übungen zu den theor. Ergänzungen zur Physik II (SS 2011) Übungsblatt 5

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (in den Übungen) 09.06.11
Besprechung der Übungsaufgaben: 20.06.11

Aufgabe 11: Massenpunkt auf rotierender Stange (schriftlich, 10 Punkte)

Eine in der x-y-Ebene liegende Gerade rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung (siehe Abb. 1). Der momentane Winkel zur Horizontalen sei $\varphi(t)$ und der momentane Abstand eines auf der Geraden reibungsfrei bewegbaren Massenpunkts m bezogen auf den Ursprung sei $\rho(t)$. Es gibt keine eingeprägten Kräfte, $\vec{F} = 0$. Im Folgenden ist es nützlich, hierbei Zylinderkoordinaten zu verwenden.

a) Formulieren Sie die beiden Zwangsbedingungen g_1 und g_2, denen die Bewegung des Massenpunkts unterliegt, in Zylinderkoordinaten.

b) Wie lauten die Bewegungsgleichungen des Massenpunkts, wobei die wirkenden Zwangskräfte durch Kombination von Lagrange-Multiplikatoren und Gradienten der Zwangsbedingungen ausgedrückt werden?

c) Diffenzieren Sie die Zwangsbedingungen zweimal nach der Zeit, eliminieren Sie die entstehenden Beschleunigungen aus den Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie die beiden Lagrange-Multiplikatoren.

d) Wie lauten die Bewegungsgleichungen des Massenpunkts, wenn die Lagrange-Multiplikatoren elimiert wurden?

e) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $\rho(t)$, wobei Sie annehmen können, dass der Massenpunkt anfänglich, d.h. zur Zeit $t = 0$, im Punkt $\rho(0) = \rho_0$ ruht.

f) Bestimmen Sie die Bahnkurve $(\rho(t), \varphi(t), z(t))$ des Massenpunkts und interpretieren Sie die Bewegung physikalisch.

g) Nehmen Sie an, dass der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ nicht ruht, sondern mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\rho}(t = 0) \neq 0$ startet. Wie muss $\dot{\rho}(t = 0)$ aussehen, damit der Massenpunkt sich zum Zentrum hin bewegt und dort zur Ruhe kommt?

h) Was ergibt sich für die Zwangskräfte in ρ- und φ-Richtung? Welche Kraft wird von Z_φ kompensiert?

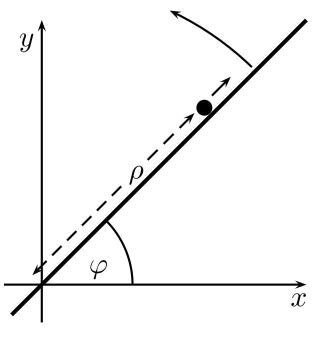

Abbildung 1: rotierende Stange

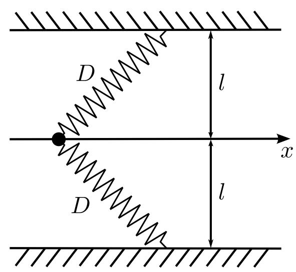

Abbildung 2: bistabiles Pendel

Aufgabe 12: Bewegung im bistabilen Potential (mündlich, 10 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m, das sich nur in x-Richtung bewegen kann, sei gemäß der Abbildung zwischen zwei Federn mit Federkonstanten D und Längen $l_0 > l$ im ungedehnten Zustand (Ruhelage) eingespannt (siehe Abb. 2).

a) Geben Sie die in dem System wirkenden Kräfte an, stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung auf, und bestimmen Sie daraus das Potential $U(x)$.

b) Wie lauten die Lagrange-Funktion und die Hamilton-Funktion für das System?

c) Berechnen Sie die möglichen Gleichgewichtslagen des Teilchens.

d) Das Potential lässt sich näherungsweise durch das bistabile Doppelmuldenpotential $V(x) = \frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{2}ax^2$ beschreiben, mit $a, b > 0$. Begründen Sie dies!

e) Skizzieren Sie das Potential aus Teil d) und diskutieren Sie qualitativ die möglichen Bahntypen. Geben Sie die genäherten Lagrange- und Hamilton-Funktionen an. Skizzieren Sie die Bahnen zu verschiedenen Energien im Phasenraum (x-$\dot{x}$-Raum).