

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (in den Übungen)  
Besprechung der Übungsaufgaben:

26.05.11  
30.05.11

**Aufgabe 9: Gekoppelte Pendel**

(schriftlich, 10 Punkte)

Zwei Pendel (Pendellänge  $l_i$ , Pendelmasse  $m_i$ ,  $i = 1, 2$ ) mit  $L$  als Abstand der Aufhängepunkte seien durch eine Feder mit Federkonstante  $k$  miteinander verkoppelt. Im nicht-ausgelenkten Zustand habe die Feder die Länge  $L$  und sei im Abstand  $a$  vom Aufhängepunkt an den Fadenpendeln befestigt (siehe Abb. 2).

- Welche systemangepassten generalisierten Koordinaten, die zur Beschreibung des Systems ausreichen, bieten sich an?
- Bestimmen Sie die potentielle und kinetische Energie des Systems und daraus dessen Lagrange-Funktion.
- Mittels der Euler-Lagrange-Gleichung bestimme man die Bewegungsgleichungen des Systems.
- Man löse die Bewegungsgleichungen für den Fall  $l_1 = l_2$ ,  $m_1 = m_2$  und kleiner Pendelschwingungen durch Entkopplung von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  mittels  $z_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $z_2 = \varphi_1 - \varphi_2$  mit den Anfangsbedingungen  $\varphi_1(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_1(0) = 0$ ,  $\varphi_2(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ .

Wie lauten die Lösungen für  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$ ?

**Aufgabe 10: Ebenes Doppelpendel**

(mündlich, 10 Punkte)

Ein ebenes Doppelpendel (siehe Abb. 1) bestehe aus einer masselosen Stange der Länge  $l_1$ , an deren Ende sich eine Masse  $m_1$  befindet und ein zweites Pendel gleicher Art (Länge  $l_2$ , Masse  $m_2$ ) befestigt sei. Die beiden Scharniere seien so gebaut, dass beide Teile des Doppelpendels sich nur in einer gemeinsamen Ebene, der  $x$ - $z$ -Ebene, bewegen können. Die Schwerkraft wirke in Richtung der negativen  $z$ -Achse, der Nullpunkt der potentiellen Energie befindet sich bei  $z = 0$ .

- Wie viele Freiheitsgrade hat dieses System und durch wie viele kartesische Koordinaten wird es beschrieben?
- Wie lauten die Zwangsbedingungen und vom welchem Typ sind sie?
- Geben Sie die kinetische und die potentielle Energie in kartesischen Koordinaten an!
- Wählen Sie als verallgemeinerte Koordinaten die Winkel  $\phi_1$  und  $\phi_2$ , die die beiden Stangen des Doppelpendels gegenüber der Senkrechten einnehmen. Wie hängen die kartesischen Koordinaten und die Zeitableitungen von ihnen ab?
- Wie lautet die Lagrangefunktion in den verallgemeinerten Koordinaten?
- Geben Sie die verallgemeinerten Impulse  $p_1$  und  $p_2$  an, die zu den Winkeln  $\phi_1$  und  $\phi_2$  gehören!

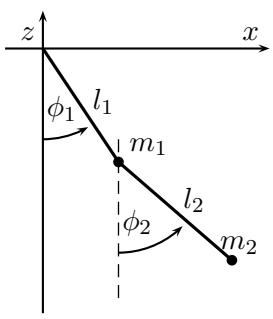


Abbildung 1: ebenes Doppelpendel

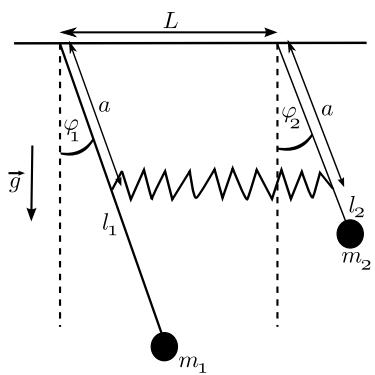


Abbildung 2: gekoppelte Pendel