Übungen zu den theor. Ergänzungen zur Physik II (SS 2011) Übungsblatt 2

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (in den Übungen) 28.04.11
Besprechung der Übungsaufgaben: 02.05.11

Aufgabe 3: Zweidimensionale Welt (mündlich, 5 Punkte)
In einer zweidimensionalen Welt hätte das Newtonsche Gravitationspotential die Form

$$V(r) = \alpha \ln r,$$

wobei $\alpha > 0$ die Stärke, und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Distanz vom Zentrum ist.

a) Konstruieren Sie für einen Massenpunkt m

   (1) die Geschwindigkeit,
   (2) die kinetische Energie und
   (3) die Lagrange-Funktion

   in Polarkoordinaten (r, φ), wenn er sich in obigem Potential bewegt.

b) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Bewegung des Massenpunktes her.

c) Gibt es eine Fluchtgeschwindigkeit wie beim Kepler-Problem?

Hinweis: Falls Sie die Formel für die Länge einer Kurve in Polarkoordinaten vergessen haben, können Sie, ausgehend von kartesischen Koordinaten, durch Differentiation nach der Zeit die kinetische Energie in Polarkoordinaten berechnen, d.h. $x(r, \varphi) = r \cos \varphi$, $\dot{x}(r, \varphi) = ?$ Analog $y(r, \varphi)$, $\dot{y}(r, \varphi)$.

Aufgabe 4: Mehrdeutigkeit der Lagrange-Funktion (mündlich, 5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung eines eindimensionalen mechanischen Systems sich nicht ändert, wenn die totale Zeitableitung einer beliebigen differenzierbaren Funktion $f = f(x, t)$ zu L addiert wird,

$$L(x, \dot{x}, t) \to L'(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x, t).$$

Warum gilt dies nicht, wenn f auch eine Funktion der Geschwindigkeit wäre, d.h. $f = f(x, \dot{x}, t)$?

Aufgabe 5: Teilchen im oszillierenden Feld (schriftlich, 10 Punkte)
Ein Teilchen der Masse m bewege sich in der x-Richtung im zeitabhängigen Potential

$$V(x, t) = -f_0 \; x \sin(\omega t + \phi),$$

wobei ω eine konstante Antriebsfrequenz und ϕ eine konstante Phase ist. Zur Zeit $t = 0$ sei $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion des Teilchens an.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung des Teilchens.

c) Geben Sie die Hamilton-Funktion des Teilchens an und berechnen Sie die zugehörigen Hamilton-Gleichungen.

d) Bestimmen Sie unter Verwendung der Anfangsbedingung die Geschwindigkeit $v(t)$ des Teilchens aus der Hamilton-Gleichung für $p(t)$.

e) Bestimmen Sie die momentane Position $x(t)$ zur Zeit t durch Lösen einer der beiden anderen Hamilton-Gleichungen.

f) Skizzieren und charakterisieren Sie $x(t)$ für die verschiedene Phasen $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ und $\phi = \pi$.

g) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit das Teilchen permanent driftet, d.h. sich mit der Zeit entweder nach $-\infty$ oder $+\infty$ bewegt?

h) Begründen Sie für den Fall $\phi = 0$ anhand der Lösung für $v(t)$, warum das Driften des Teilchens überhaupt möglich ist.

i) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Teilchens und diskutieren Sie deren Verhalten als Funktion von t.