Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 28.06.11 vor der Vorlesung
Besprechung der Übungsaufgaben: 30.06.11 / 01.07.11

Aufgabe 40: **Diracsche Delta-Distribution (δ-„Funktion“)** (mündlich, 5 Punkte)

Die δ-Distribution ist dadurch definiert, dass für beliebig oft differenzierbare und für $|x| \to \infty$ hinreichend schnell abfallende Testfunktionen $f(x)$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) \mathrm{d}x = f(x_0) \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)\delta(x - x_0) f(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Die n-te Ableitung der δ-Funktion wird mit

$$\delta^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\delta(x)$$

bezeichnet. Die Heavisidesche Stufenfunktion ist gegeben durch:

$$\Theta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq x_0 \\ 0 & \text{für} \quad x < x_0 \end{cases}.$$

a) Man zeige folgende formale Eigenschaften:

(i) $\Theta'(x) = \delta(x)$,

(ii) $x\delta'(x) = -\delta(x)$,

(iii) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}|x| = 2\delta(x)$.

b) Man berechne:

(i) $\delta(x^2 - a^2) = \ldots,$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x - x_0) f(x) \mathrm{d}x = \ldots$

c) Die Funktion $f(x)$ habe einfache Nullstellen bei x_i mit $f'(x_i) \neq 0$. Zeigen Sie

(i) $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$.

Berechnen Sie mit (i)

(ii) $\delta(ax)$ und

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\sin(2\pi x)) e^{-|x|} \mathrm{d}x$.

d) Sind die Ausdrücke $\delta(x^2)$ und $[\delta(x)]^2$ sinnvoll?

e) Prüfen Sie die Darstellung $\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2}$.

f) Die dreidimensionale δ-Funktion ist definiert durch $\delta(\vec{r} - \vec{a}) = \delta(x - a_x)\delta(y - a_y)\delta(z - a_z)$.

(i) Geben Sie die Darstellung in sphärischen Polarkoordinaten an.

(ii) Zeigen Sie, dass $\delta(r) = 2\pi r^2 \delta(\vec{r})$, wobei $r = \|\vec{r}\|$ ist.

Aufgabe 41: Wirbelfreie Felder / Divergenzfreie Felder (schriftlich, 5 Punkte)

Zwei Sätze von grundlegender Bedeutung in der Elektrodynamik sind:

Satz 1: Wirbelfreie Felder / irrotational fields

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, $\quad$ ($\vec{F}$ wirbelfrei)

2) $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$ wegunabhängig für vorgegebene Endpunkte a, b,

3) $\oint \vec{F} \cdot \vec{l} = 0$ entlang jedes geschlossenen Weges,

4) $\vec{F}$ ist Gradient eines Skalarfelds U : $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$.

Satz 2: Divergenzfreie Felder / solenoidal fields

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$, $\quad$ ($\vec{F}$ divergenzfrei)

2) $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ unabhängig von Oberflächen für vorgegebenen Rand S,

3) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$ für geschlossene Oberflächen,

4) $\vec{F}$ ist Rotation eines Vektorfelds $\vec{W}$: $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{W}$

Beweisen Sie die Äquivalenz der einzelnen Teilaussagen.

Aufgabe 42: Wheatstone'sche Brücke (schriftlich, 5 Punkte)

Betrachten Sie die abgebildete Schaltung („Wheatstonesche Brückenschaltung“).

a) Um einen unbekannten Widerstand R_x zu ermitteln, wird der veränderliche Widerstand R_s so abgestimmt, dass die Punkte a und b auf dem gleichen Potential liegen. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$R_x = R_s \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

b) Betrachten Sie nun eine leicht veränderte Schaltung, bei der die Punkte a und b über einen Widerstand der Größe r verbunden sind. Weiterhin sei $R = R_1 = R_2$. Zeigen Sie, dass über den Widerstand r folgender Strom fließt:

$$i = \frac{U(R_s - R_x)}{(R + 2r)(R_s + R_x) + 2R_s R_x}$$

Aufgabe 43: Blinklicht (mündlich, 5 Punkte)

Bei einer Durchbruchspannung von 72 V blitzt die abgebildete Lampe kurz auf, wobei der Kondensator C vollständig entladen wird. Wie groß muss der Widerstand R gewählt werden, damit die Lampe zweimal pro Sekunde aufleuchtet ($U = 95$ V, $C = 0{,}150$ μF)?

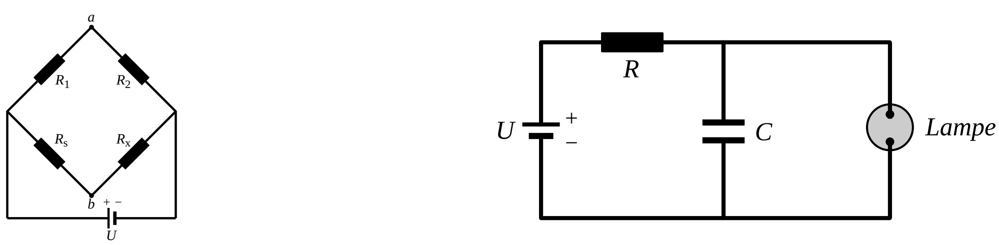

Abbildung 1: Wheatstone'sche Brücke (links) und Blitzlampe (rechts)