Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 19.04.11 vor der Vorlesung
Besprechung der Übungsaufgaben: 21.04.11 / 22.04.11

Aufgabe 2: Ableitung der Maxwell-Verteilung (schriftlich, 10 Punkte)

Es soll die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung $F_{\text{maxwell}}(v)$ der Teilchen eines idealen Gases abgeleitet werden. Das ideale Gas bestehe hierbei aus N Teilchen. Zu gegebener Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ bezeichne $NF(\vec{v})d^3v$ die Anzahl derjenigen Teilchen, die eine Geschwindigkeit im infinitesimalen Kubus mit den Kanten $[v_x, v_x + dv_x]$, $[v_y, v_y + dv_y]$ und $[v_z, v_z + dv_z]$ besitzen, wobei die Verteilungsfunktion $F(\vec{v})$ folgenden Annahmen genügt:

> F ist isotrop, d.h. F hängt nur vom Geschwindigkeitsbetrag $v := |\vec{v}|$ ab und die Verteilungsfunktionen der einzelnen Komponenten sind zudem statistisch unabhängig:
>
> $$F(\vec{v}) = F(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z).$$

Lösen Sie nun unter Verwendung der vorstehenden Annahmen folgende Aufgaben:

a) Begründen Sie zunächst, warum gilt,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{v})\, d^3v = 1,$$

wobei das $3d$-Integral über alle drei Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z läuft.

b) Zeigen Sie, dass es ein $g = g(v)$ gibt mit

$$\nabla_{\vec{v}} F(\vec{v}) = g(v)\vec{v} \quad (v \neq 0).$$

Was bedeutet dieses Ergebnis geometrisch?

c) Folgern Sie aus b), dass gilt,

$$\frac{1}{v_x}\frac{\partial f(v_x)}{\partial v_x} = \frac{g(v)}{f(v_y)f(v_z)} \qquad \text{(und zyklisch)}$$

und daraus wiederum, dass

$$g = \widetilde{\lambda} f(v_x)f(v_y)f(v_z)$$

für ein $\widetilde{\lambda} = const.$ erfüllt sein muss.

d) Damit ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f(v_i)}{\partial v_i} = \widetilde{\lambda} v_i f(v_i) \qquad \text{für } i = x, y, z.$$

Folgern Sie hieraus

$$F(\vec{v}) = Ae^{\lambda(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} = Ae^{\lambda v^2}$$

mit $\lambda := \frac{1}{2}\widetilde{\lambda}$ und einer Integrationskonstanten A. Warum muss λ negativ sein?

Hinweis: Aufgabe 1e) vom Übungsblatt 1 und Aufgabenteil a).

Nach d) kann λ geschrieben werden als $\lambda = -\frac{1}{\alpha^2}$.

e) Bestimmen Sie die Integrationskonstante A in Aufgabenteil d).

Hinweis: Aufgabenteil a) und Aufgabe 1a) vom Übungsblatt 1.

f) Geben Sie die Anzahl der Teilchen an, deren Geschwindigkeit zwischen v_x und $v_x + dv_x$ liegt.

g) Berechnen Sie die Anzahl der Teilchen, deren Geschwindigkeit im Intervall v und $v + dv$ liegt. Es sollte sich
$$N\frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}}v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}\,dv$$
ergeben.

Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung lautet dann:
$$F_{\text{maxwell}}(v) := 4\pi v^2 F(v) = \frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}}v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}\,dv.$$

h) Zeigen Sie, dass für die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen gilt,
$$\overline{v} := \int_0^\infty v F_{\text{maxwell}}(v)\,dv = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}.$$
Hinweis: Aufgabe 1c) vom Übungsblatt 1.

i) Zeigen Sie, dass für das mittlere Geschwindigkeitsquadrat der Teilchen gilt,
$$\overline{v^2} := \int_0^\infty v^2 F_{\text{maxwell}}(v)\,dv = \frac{3}{2}\alpha^2.$$
Hinweis: Aufgabe 1d) vom Übungsblatt 1.

j) Identifizert man nun die gesamte mittlere kinetische Energie,
$$U = \frac{1}{2}M\overline{v^2} \qquad (M = \text{Gesamtmasse des Gases}),$$
mit dem Resultat aus der kinetischen Gastheorie,
$$U = \frac{3}{2}nRT,$$
wobei $n := \frac{N}{N_A}$ mit der Avogadro-Konstanten N_A, so sollte sich
$$F_{\text{maxwell}}(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi nRT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2nRT}}$$
ergeben. Überprüfen Sie dies!

Aufgabe 3: Maxwell-Boltzmann-Verteilung (mündlich, 5 Punkte)

Berechnen Sie für eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung $F_{\text{maxwell}}(v)$ zur Temperatur T

a) die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_w und

b) die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = \int_0^\infty v F_{\text{maxwell}}(v)dv$.

c) Welche Werte ergeben sich für Sauerstoff- und Wasserstoffmoleküle bei $T = 300$ K. Was folgt aus dem Vergleich mit der Fluchtgeschwindigkeit der Erde von 11,2 km/s ? (molare Massen: $M_{O_2} = 32{,}00$ g/mol, $M_{H_2} = 2{,}02$ g/mol)

Aufgabe 4: Tauchsieder (mündlich, 3 Punkte)

Mit einem Tauchsieder wird 1 Liter Wasser bei konstantem Druck erwärmt. Dabei werden aber nur 80% der dem Netz entnommenen Energie zur Energiezufuhr an das Wasser genutzt. Welche elektrische Leistung muss der Tauchsieder haben, wenn innerhalb von 15 Minuten das Wasser von 10°C auf die Siedetemperatur 99,63°C gebracht werden soll?

Aufgabe 5: Dichteänderung (mündlich, 2 Punkte)

Bei einer Raumtemperatur von 18°C beträgt die Dichte von Messing 8,1g/cm^3. Welche Dichte besitzt Messing bei einer Temperatur von -35°C? (1cm^3 Messing vergrößert seinen Rauminhalt beim Erwärmen um 1K um 0,000 057cm^3.