**Übungen zur Physik II (SS 2011)** **Übungsblatt 1**

Prof. Dr. S. J. Linz / Prof. Dr. C. Fallnich 08.04.2011

Mündliche Übung

Besprechung der Übungsaufgaben: 14.04.11 / 15.04.11

**Aufgabe 1: Vorbereitendes zur Maxwell-Verteilung** (mündlich, 20 Punkte)

a) Die Stammfunktion des Integranden im Gauß-Integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

ist nicht durch elementare Funktionen darstellbar. Um den Wert des vorstehenden Integrals dennoch zu berechnen, betrachten Sie die für jedes $x \in \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \left(\int_0^x e^{-u^2}\, du\right)^2 \quad \text{und} \quad g(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\, dt$$

definierten reellwertigen Funktionen $f$ und $g$.

i) Zeigen Sie zunächst, dass die für alle $x \in \mathbb{R}$ durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ gegebene Funktion $f + g$ konstant ist, indem Sie nachweisen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f'(x) + g'(x) = 0.$$

ii) Folgern Sie nun hieraus, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}.$$

iii) Nach *b*) gilt dann trivialerweise auch

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = \frac{\pi}{4}.$$

Zeigen Sie $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ und berechnen Sie anschließend den Wert den Gauß-Integrals.

b) Zeigen Sie, dass für jede nicht-negative ganze Zahl $n$ gilt:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx = n!$$

Hinweis: vollständige Induktion.

c) Berechnen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$ das Integral:

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha^{-2}x^2}\, dx.$$

Hinweis: Aufgabenteil b).

d) Berechnen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$ das Integral:

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha^{-2}x^2}\, dx.$$

Hinweis: Aufgabenteil a).

e) Lösen Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ das folgende Anfangswertproblem:

$$y'(x) = \lambda x y(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = y_0.$$

Hinweis: Trennung der Variablen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (in den Übungen) 14.04.11
Besprechung der Übungsaufgaben: 18.04.11

**Aufgabe 1: Hamilton-Prinzip für ein freies Teilchen** (schriftlich, 5 Punkte)

Ein freies Teilchen bewege sich entlang der $x$-Achse und werde zur Zeit $t = 0$ bei $x = 0$ mit der Geschwindigkeit $v(t = 0) = v_0$ gestartet.

a) Geben Sie die kinetische Energie des Teilchens an.

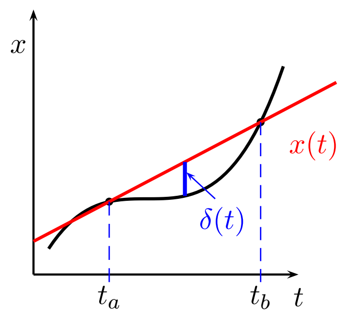
b) Berechnen Sie die Trajektorie $x(t)$ für das Teilchen.

c) Geben Sie die Lagrange-Funktion des Teilchens an.

d) Zeigen Sie, ausgehend vom Hamiltonschen Prinzip in der Form

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t)\, \mathrm{d}t = \text{extremal},$$

dass die unter b) berechnete Lösung die Wirkung $S$ wirklich minimiert.
Betrachten Sie dazu eine "gestörte" Lösung $x_v(t) = x(t) + \delta(t)$ mit $\delta(t_a) = 0 = \delta(t_b)$, die Sie statt $x(t)$ in die Lagrangefunktion einsetzen, und begründen Sie, warum $S$ für $\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} = 0$ und damit auch für $\delta = 0$ (wieso?) minimal wird.




**Aufgabe 2: Hamilton-Prinzip für Teilchen unter Erdanziehung** (mündlich, 5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse $m$ bewege sich entlang der vertikalen $z$-Achse unter Einfluss der Erdanziehung, d.h. $V(z) = -mgz$ und werde zur Zeit $t = 0$ bei $z = 0$ mit $v(t = 0) = v_0$ gestartet.

a) Berechnen Sie die Trajektorie $z(t)$ für das Teilchen.

b) Geben Sie die Lagrange-Funktion für die Bewegung des Teilchens an.

c) Zeigen Sie (ähnlich wie in Aufgabe 1), dass die unter Teil a) berechnete Lösung $z(t)$ die Wirkung

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(z, \dot{z}, t)\, \mathrm{d}t$$

tatsächlich minimiert, wobei Sie analog zu Aufgabe 1d) vorgehen.