Abgabe der Übungsaufgaben: 15.11.10

Aufgabe 19: **Differentialgeometrie 1** (schriftlich, 5 Punkte)
Eine Raumkurve $\vec{r}(t)$ sei in parametrisierter Form gegeben als

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (a\cos t, a\sin t, v_0 t)\,,$$

wobei $a > 0$ und v_0 reelle Konstanten sind.

a) Skizzieren und interpretieren Sie $\vec{r}(t)$.
b) Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\vec{t}$, die Hauptnormale $\vec{n}$ und die Krümmung κ von $\vec{r}(t)$.
c) Berechnen Sie die Binormale $\vec{b}$ und die Torsion τ von $\vec{r}(t)$.

Aufgabe 20: **Differentialgeometrie 2** (schriftlich, 6 Punkte)

a) Gegeben sei die Raumkurve $\vec{r}(t) = x_i(t)\vec{e}_i$. Zeigen Sie, dass für die Krümmung κ und die Torsion τ gilt

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \qquad \text{und} \qquad \tau = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \left(\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}}\right)}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}.$$

b) Die Raumkurve $\vec{r}(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)$ sei vorgegeben. Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$, die Krümmung κ und die Torsion τ. Was ergibt sich für das begleitende Dreibein zur Zeit $t = 0$?

Aufgabe 21: **Eindeutigkeit bei Trajektorien** (schriftlich, 4 Punkte)
Gegeben seien zwei Trajektorien $\vec{r}_1(s)$ und $\vec{r}_2(s)$, wobei deren Krümmungen und Torsionen übereinstimmen, d.h. $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$ und $\tau_1(s) = \tau_2(s)$ für alle $s \geq 0$.

a) Zeigen Sie, dass dann die Größe

$$C = |\vec{t}_2(s) - \vec{t}_1(s)|^2 + |\vec{n}_2(s) - \vec{n}_1(s)|^2 + |\vec{b}_2(s) - \vec{b}_1(s)|^2$$

konstant ist für alle $s \geq 0$.
Tipp: Leiten Sie zunächst C nach s ab.

b) Zeigen Sie weiter mit Hilfe von a), dass die Trajektorien $\vec{r}_1(s)$ und $\vec{r}_2(s)$ identisch sind, falls in einem Punkt a die Gleichung $\vec{r}_1(a) = \vec{r}_2(a)$ gilt und die ersten drei Ableitungen der Trajektorien in a übereinstimmen.

Aufgabe 22: **Basketball** (schriftlich, 5 Punkte)
Der Strafwurf beim Basketball findet von einem Punkt aus statt, der 4,3 m vom Basispunkt des Korbs entfernt ist, dessen Oberrand sich in einer Höhe von 3 m über dem Boden befindet. Mit welcher Geschwindigkeit muß der Ball geworfen werden, wenn die Abwurfhöhe 2,13 m und der Abwurfwinkel 55° ist?

Aufgabe 23: **Eulersche Winkel** (mündlich, 14 Punkte)

a) Man zeige, dass die durch

$$D(\alpha,\beta,\gamma) := D_{z'}(\gamma)D_{y'}(\beta)D_z(\alpha) \tag{1}$$

definierte Drehung mit den Eulerschen Winkel α, β, γ (siehe Abbildung) auch als

$$D(\alpha,\beta,\gamma) := D_z(\alpha)D_y(\beta)D_z(\gamma) \tag{2}$$

geschrieben werden kann, wobei nun die Drehungen ausschließlich um die Achsen des ursprünglichen Dreibein (x, y, z) erfolgen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Relationen

$$\begin{aligned} D_{y'}(\beta) &= D_z(\alpha)D_y(\beta)D_z^{-1}(\alpha), \\ D_{z'}(\gamma) &= D_{y'}(\beta)D_z(\gamma)D_{y'}^{-1}(\beta) \end{aligned}$$

gelten.

b) Wie lautet die inverse Drehmatrix D^{-1} zu D aus der Darstellung der Gleichung (2)?

c) Bestimmen Sie (z.B. aus einer Skizze) die Eulerwinkel α, β, γ für eine Drehung des Koordinatensystems, die den Vektor

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{nach} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

überführt. Testen Sie das Ergebnis durch explizite Berechnung.

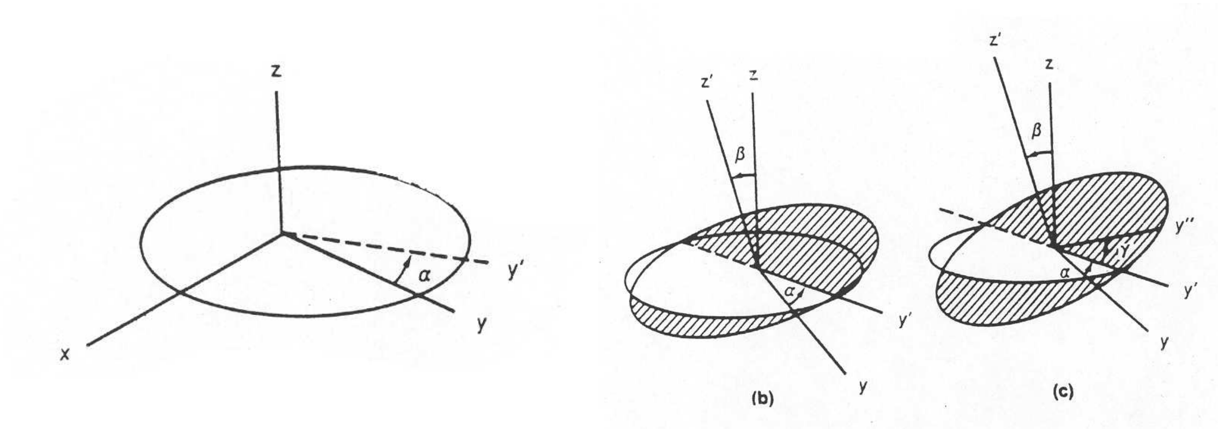

Abbildung 1: Eulerwinkel

Aufgabe 24: **Fußball** (mündlich, 6 Punkte)

Werder Bremen musste bei einem Spiel gegen Schalke 04 vor etwa drei Jahren ein Freistoßtor aus 19 m Entfernung hinnehmen. Der Rundfunkreporter meinte, dass der Ball genau unter der Querlatte (d.h. in Höhe von ca. 2,30 m) waagerecht die Torlinie überquert hat (a), obwohl die Bremer mit ihren 1,90 m großen Spielern im Abstand von 9,15 m vom Freistoßpunkt eine Abwehrmauer gebildet hatten. In der Fernsehaufzeichnung sah es eher so aus, dass der Ball auf dem Flug 4 m vor dem Tor seinen höchsten Punkt hatte (b).

a) Welche Version ist richtig?

b) Wie groß waren die Anfangsgeschwindigkeit und der Abschusswinkel des Balls?