Abgabe der Übungsaufgaben: nach Absprache mit dem Übungsgruppenleiter (wg. Feiertag)

Aufgabe 10: **Taylor Entwicklung / Reihenentwicklung** (8 Punkte, schriftlich)
Ein außerordentlich wichtiges mathematisches Handwerkszeug der Physik ist die Taylor-Entwicklung einer Funktion $y = f(x)$, bei der nicht-algebraische Funktionen durch algebraische Potenzfunktionen (Potenzreihen) beliebig genau approximiert werden können. Die Taylorformel lautet

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k ,$$

wobei x_0 der Entwicklungspunkt, $f^{(k)}(x_0)$ die $k$te Ableitung von $f(x)$ genommen bei x_0 und $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$ mit $0! = 1$ ist. [Notwendig ist hierbei, dass $f(x)$ in dem Intervall, in dem x und x_0 liegen, beliebig oft differenzierbar ist.]

a) Zeigen Sie mittels Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$, dass für betragsmäßig kleine x die Formel

$$\sin x \approx \tan x \approx x \qquad \text{[x in rad]}$$

gilt, und testen Sie die Güte der Formeln für $|x| < 0.5$ mit dem Taschenrechner aus.

d) Zeigen Sie wiederum durch Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$, dass die folgenden Näherungen für kleine x gelten:

$$x \approx \frac{(e^x)^2 - 1}{2 \cos x} \approx -\ln(1-x) \approx \ln(1+x) \approx \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

c) Wenn man einen Körper der Länge L_0 um die Temperatur ΔT erwärmt, vergrößert sich seine Länge auf

$$L(\Delta T) = L_0 \sqrt[3]{1 + \gamma \Delta T}$$

mit dem Ausdehnungskoeffizienten γ. Welche Näherungsformel gilt für kleine ΔT?

d) Grenzwerte, die zunächst unbestimmbar aussehen, können mittels Taylor-Entwicklung leicht bestimmt werden. Entwickeln Sie dazu in den folgenden Beispielen den Zähler in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$ und berechnen Sie daraus den Grenzwert.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2 + \cos x - 1}{x^4}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

Aufgabe 11: **Transformationsverhalten von Vektorprodukten** (schriftlich, 4 Punkte)
Untersuchen Sie das Verhalten der folgenden Größen gegenüber Spiegelung und Inversion.

a) $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$

b) $\vec{p} = \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

c) $q = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

d) $\vec{p} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$

Entscheiden Sie damit, ob $\vec{p}$ ein axialer oder polarer Vektor und q ein Skalar oder Pseudoskalar ist, wenn $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ polare Vektoren sind.

Vorgehensweise: Untersuchen Sie die Wirkung einer (passiven) Transformation der Basis $\{\vec{e}_i\} \to \{\vec{e}_i\,'\}$ auf $\vec{p}$ und q.

Aufgabe 12: **Reziprokes Gitter in der Kristallphysik** (5 Punkte, schriftlich)
Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und die Vektoren $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$, die mit den vorherigen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ folgendermaßen zusammenhängen:

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{a}^* & = & \frac{1}{V}\,\vec{b} \times \vec{c} \\ \vec{b}^* & = & \frac{1}{V}\,\vec{c} \times \vec{a} \\ \vec{c}^* & = & \frac{1}{V}\,\vec{a} \times \vec{b} \end{array}\right\} \quad \text{wobei } V = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right).$$

Zeigen Sie für den Fall, dass $V \neq 0$ ist, die folgenden Eigenschaften:

(1) $\vec{a}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{b} = \vec{c}^* \cdot \vec{c} = 1$

(2) $\vec{a}^* \cdot \vec{b} = \vec{a}^* \cdot \vec{c} = 0$
$\vec{b}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{c} = 0$
$\vec{c}^* \cdot \vec{a} = \vec{c}^* \cdot \vec{b} = 0$

(3) $\vec{a}^* \cdot \left(\vec{b}^* \times \vec{c}^*\right) = \dfrac{1}{V}$

(4) Die Vektoren $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$ sind nicht komplanar, falls die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nicht komplanar sind.

(5) Jeder beliebige Vektor $\vec{r}$ lässt sich wie folgt zerlegen:

$$\vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{a}^*)\,\vec{a} + \left(\vec{r} \cdot \vec{b}^*\right)\vec{b} + (\vec{r} \cdot \vec{c}^*)\,\vec{c}.$$

Aufgabe 13: **Vektoridentitäten** (3 Punkte, schriftlich)
Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ beliebige Vektoren im 3-dimensionalen Raum. Berechnen Sie:

(1) $2\,\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) - \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left((\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a})\right)$

(2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d})$

(3) $\left[\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\right]^2 - \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left[(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})\right]$