Übungen zur Physik I (WS 2010/11) **Übungsblatt 2**
Prof. Dr. S. J. Linz / Prof. Dr. C. Fallnich 18.10.10

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 25.10.10

Aufgabe 5: **Getränke** (8 Punkte, schriftlich)
In den Semesterferien wollen Sie bei einem Getränkehersteller jobben. Dort werden Sie damit beauftragt, zur Qualitätssicherung den Füllstand von Literflaschen zu überprüfen.
Ihre Messungen ergeben Folgendes:

Messung	Getränkevolumen (ml)
1	989
2	1002
3	1000
4	996
5	998
6	1007
7	1002
8	999
9	1003
10	994
11	985
12	998
13	1001
14	1006

a) Wie groß ist das mittlere Getränkevolumen?

b) Wie groß ist die Standardabweichung des mittleren Getränkevolumens?

c) Die Vorgabe der Qualitätssicherung ist, keine Flasche mit mehr als 2σ Abweichung vom Mittelwert in den Verkauf kommen zu lassen. Wie viele Flaschen müssen Sie aus dem Verkehr ziehen?

d) Wie viele Flaschen werden auf diese Weise täglich reklamiert, wenn die Tagesproduktion 50000 Flaschen beträgt?

Aufgabe 6: **Epsilon-Tensor** (12 Punkte, schriftlich)
Der ϵ-Tensor (vollständig antisymmetrischer Tensor dritter Stufe) wird definiert wie folgt:
Die Komponenten ϵ_{ijk} sind antisymmetrisch bezüglich der Vertauschung zweier Indizes:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}.$$

Es ist also $\epsilon_{ijk} = 0$, wenn zwei der drei Indizes übereinstimmen. $\epsilon_{ijk} = 1$ wenn i, j und k durch eine gerade Anzahl von Permutationen aus der Zahlenordnung 1, 2 und 3 hervorgeht:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1,$$

$\epsilon_{ijk} = -1$ wenn i, j und k durch eine ungerade Anzahl von Permutationen aus der Zahlenordnung 1, 2 und 3 hervorgeht:

$$\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1.$$

a) Man zeige, dass

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix}$$

die in der Definition geforderten Eigenschaften besitzt (δ_{ij} sind die sogenannten Kronecker-Symbole: $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$, ansonsten ist $\delta_{ij} = 0$, falls $i \neq j$).

b) Wie lautet das Produkt $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}$? Daraus leite man die folgenden Relationen ab (hier wird die Einstein'sche Summationskonvention verwendet, d.h. in einem Produkt wird über doppelt vorkommende Indizes summiert, z.B.: $\delta_{ik}\delta_{kj} \equiv \sum_{k=1}^{3} \delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{i1}\delta_{1j} + \delta_{i2}\delta_{2j} + \delta_{i3}\delta_{3j}$):

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mjk} = 2\delta_{im}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$$

<u>Hinweis:</u> Für eine Matrix A der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

lautet die zugehörige transponierte Matrix A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

und die Determinante $\det A$ bzw. $|A|$:

$$|A| = \det A = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right)$$

<u>Tipp</u>: Es gilt

$$\det\left(A \cdot B\right) = \det(A)\det(B) \qquad \text{und} \qquad \det(A) = \det(A^T).$$

Aufgabe 7: **Skalarprodukt** (6 Punkte, mündlich)

a) Zeigen Sie, dass die beiden Definitionen des Skalarproduktes

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$$

äquivalent sind, wobei φ der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist.

b) Beweisen mit Hilfe des Skalarproduktes den Kosinussatz der ebenen Geometrie.
Tipp: Gehen Sie von der Vektordarstellung $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ eines Dreiecks aus.

c) Beweisen Sie mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|.$$

d) Berechnen Sie alle möglichen Skalarprodukte der Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

Sind diese Vektoren alle voneinander linear unabhängig?

Aufgabe 8: **Vektorprodukt** (10 Punkte, mündlich)

a) Zeigen Sie, dass die beiden Definitionen des Vektorprodukts

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \equiv |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi \, \vec{e}_{ab}$$

äquivalent sind, wobei $\vec{e}_{ab}$ der Einheitsvektor ist, der senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene ist (3-Finger-Regel).

b) Man zeige, dass das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sich in Komponenten wie folgt schreiben lässt:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \,,$$

wobei a_i die i-te Komponente des Vektors $\vec{a}$ ist ($a_x \equiv a_1$, usw; beachten Sie zudem wie in Aufgabe 6 die Summenkonvention!!). Weiterhin zeige man mit Hilfe des ϵ-Tensors die folgenden Identitäten:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right) \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \qquad \text{(Lagrange-Identität)}$$

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \, (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \qquad \text{(Graßmannscher-Entwicklungssatz).}$$

c) Zeigen Sie, dass der Betrag des Spatprodukts

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

gleich dem Volumen V des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds ist. Wann ist $V < 0$ bzw. > 0, und wann verschwindet es?
Zeigen Sie ferner, dass folgendes gilt:

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \equiv \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

sowie die Invarianz von V unter zyklischer Vertauschung der Vektoren:

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = V(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = V(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}).$$

d) Berechnen Sie die Beträge aller möglichen Vektorprodukte der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ aus Aufgabe 7d).

Aufgabe 9: **Zerlegung eines Vektors** (4 Punkte, mündlich)
$\vec{A}$ sei ein beliebiger Vektor und $\vec{e}$ ein Einheitsvektor in eine vorgegebene Richtung. Beweisen Sie die folgende Darstellung von $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \vec{e}\left(\vec{A} \cdot \vec{e}\right) + \vec{e} \times \left(\vec{A} \times \vec{e}\right).$$

Was ist die geometrische Bedeutung der beiden Terme dieser Darstellung?