Übungen zur Physik I (WS 2010/11) **Übungsblatt 12**

Prof. Dr. S. J. Linz / Prof. Dr. C. Fallnich 7. Januar 2011

Abgabe der Übungsaufgaben: 17.01.10

Aufgabe 66: **Geladenes Teilchen in gekreuzten Feldern** (schriftlich, 10 Punkte)
Auf einen geladenen Massenpunkt der Masse m und der Ladung q, der sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, wirkt in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ und einem magnetischen Feld $\vec{B}$ die Kraft

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass $\vec{B}$ in Richtung der z-Achse weist und $\vec{E}$ in der $y-z$-Ebene liegt, d.h. $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$ und $\vec{B} = (0, 0, B)$.

a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für den Massenpunkt?

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingung $x(0) = y(0) = z(0) = 0, \dot{x}(0) = v$ und $\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$. Die Komponenten der Bewegungsgleichung lassen sich entkoppeln, indem man die komplexe Variable $u = x + iy$ einführt.

c) Wie sieht die Projektion der Bahnkurve auf die $x-y$-Ebene aus? Unterscheiden Sie die Fälle $v \geq 0$ und $v < 0$! In welcher Richtung läuft der Massenpunkt vom Ursprung aus los?

Aufgabe 67: **Allg. Lösung des ungedämpften, ebenen Pendels** (mündlich, 10 Punkte)
Ausgehend von der Bewegungsgleichung für das ungedämpfte Pendel $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$ soll dessen allgemeine Lösung bestimmt werden.

a) Mit der Substitution $u = \dot{\varphi}$ zeige man zunächst, dass $\ddot{\varphi} = u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$ gilt, und folgere daraus, dass

$$\frac{1}{2}u^2 = \frac{g}{l}\cos\varphi + c \qquad \text{(mit } c \text{ als Integrationskonstante)}$$

b) Für die Anfangsbedingung $u = 0$ für $\varphi = \varphi_0$ (entspricht $\varphi(t=0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(t=0) = 0$ für Anfangsauslenkung und Ausgangsgeschwindigkeit) bestimme man c.

c) Durch Separation der Variablen und Integration der Bewegung von φ_0 bis $\varphi = 0$ (entspricht einer Viertelperiode $T/4$ der Oszillation) zeige man

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} \tag{1}$$

Tipp: $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$

d) Mit Hilfe von $k := \sin\frac{\varphi_0}{2}$ drücke man (1) durch ein vollständiges elliptisches Integral erster Art

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}, \qquad k^2 < 1,$$

aus, wobei ϕ definiert ist über $\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\phi$. Für die Schwingungsdauer des Pendels sollte sich dann $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(k)$ ergeben.

e) Skizzieren Sie grob $K(k)$, indem Sie die Grenzfälle $|\varphi_0| \ll 1$ und $\varphi_0 \approx \pi$ sowie die Monotonieeigenschaft von $K(k)$ betrachten.

f) Mit Hilfe der binomischen Formel

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2\cdot 1}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 + \ h.o.t.$$

kann für $|k| \ll 1$ die Schwingdauer gliedweise ausgerechnet werden. Zeigen Sie, dass

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \ h.o.t.\right].$$

Hinweis: $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{\pi}{2}$

Aufgabe 68: **Virialtheorem, Skalentransformation** (mündlich, 10 Punkte)

1) Ausgehend von der Newtongleichung für einen Massenpunkt m, $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, zeige man
   a) $\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \right\rangle = 0$, wobei $\langle \ldots \rangle$ der zeitliche Mittelwert ist, d.h. $\langle \ldots \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathrm{d}t \ldots$ falls $\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\tau)$ τ-periodisch bzw. $\langle \ldots \rangle = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \ldots$ falls $\vec{r}(t)$ nichtperiodisch.
   b) das Virialtheorem, $2 < T > = -\left\langle \vec{r} \cdot \vec{F} \right\rangle$, wobei T die kinetische Energie $T = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^2$ ist.
2) Ein homogenes Potential ist definiert durch $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|) = \alpha\, |\vec{r}|^d$, $d \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sich das Virialtheorem dann zu $< T > = \frac{d}{2} < V >$ vereinfacht.
3) Gegeben sei die Skalentransformation
$$\begin{aligned} \vec{r} &\to \lambda \vec{r}\,', \\ t &\to \lambda^{(2-d)/2} t'. \end{aligned}$$
   Zeigen Sie, dass die Newtongleichung für einen Massenpunkt m, $m\ddot{\vec{r}} = -\nabla V(|\vec{r}|)$ mit homogenem Potential $V(|\vec{r}|)$, forminvariant unter dieser Transformation ist, d.h. in gestrichenen wie in ungestrichenen Größen gleich aussieht.
4) T und T' seien charakteristische Zeiten (z.B. Umlaufzeiten) und R und R' charakteristische Längen (z.B. Amplituden) zweier Bewegungsabläufe, die via der Skalentransformation unter 3) verknüpft sind. Zeigen Sie die Relation
$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \left(\frac{R'}{R}\right)^{2-d}$$
   und daraus die Gültigkeit des dritten Keplerschen Gesetzes.

Aufgabe 69: **Tiefseetauchen** (schriftlich, 5 Punkte)
Der Tiefseetaucher *Picard* tauchte im Phillipinengraben in einer Stahlkugel von 3 m Außendurchmesser auf eine Meerestiefe von 10 000 m ab. Wie groß sind Druck und Gesamtkraft auf die Kugel? Um welchen Bruchteil ihres Volumens wird eine Stahlkugel aufgrund der Kompression kleiner

a) für eine Vollkugel

b) für eine Hohlkugel mit der Wandstärke 0,2 m?

Hinweis: Der Kompressionsmodul für Stahl beträgt $K = 1{,}56 \times 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$.

Aufgabe 70: **Ballon** (schriftlich, 5 Punkte)
Ein Ballon ($V = 3000\,\mathrm{m}^3$) fliegt bei einer Temperatur $T = 20\,°\mathrm{C}$ in einer Höhe von 1000 m. Wie schwer dürfen Ballon und Last (ohne Gewicht des Füllgases) sein, wenn der Druck des Füllgases gleich dem Außendruck ist und als Füllgas

a) Helium,

b) Wasserstoff (H_2) verwendet wird?

Hinweis: Luftdichte $\rho_0 = 1{,}293\,\mathrm{kg/m^3}$, Druck $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\rho_{\mathrm{He}} = 0{,}1785\,\mathrm{kg/m^3}$ und $\rho_{\mathrm{H_2}} = 0{,}09\,\mathrm{kg/m^3}$