# Abelsche Eichfelder

Thorsten Hiester

09.12.1998

*Vortrag aus dem Seminar über Quantenfeldtheorie auf Gittern unter der Leitung von M. Stingl, G. Münster, C. Wieczerkowski und A. Weiguny*

Die bekannten Pfadintegrale für die GREENs Funktionen haben nur für Systeme mit abzählbar vielen Freiheitsgraden definierte Bedeutung; Systeme mit unendlich überabzählbar vielen Freiheitsgraden lassen nur eine formale Definition des Pfadintegrals zu. Deshalb: „Be wise — Discretise!“ (M. Kac). In diesem Vortrag soll eine eichinvariante Gitterformulierung der Wirkung des freien DIRAC-Feldes angegeben werden.

Begonnen wird mit einem Rückbick auf die Kontinuumsformulierung der Wirkung des freien DIRAC-Feldes und auf deren Eichgruppe. Da sich die angegebene Gitterdarstellung später auf die EUKLIDische bezieht, wird auch diese kurz für den kontinuierliche Fall wiederholt.
Die Eichinvarianz der Wirkung des freien DIRAC-Feldes

$$S_F^{(0)} = \int d^4x \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)$$

wird gegeben durch die (globale) Transformation

$$\psi(x) \longrightarrow G\psi(\mathrm{x}) \quad ; \quad \overline{\psi}(x) \longrightarrow \overline{\psi}(x)G^{-1}$$

wobei $G \in U(1) = \{exp(i\Lambda) | 0 \leq \Lambda \leq 2\pi\} \cong SO(2)$ , welche eine ABELsche Gruppe ist. Daraus folgt dann z.B. die Ladungserhaltung

$$\partial_\mu j^\mu := \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

Nun ist aber $S_F^{(0)}$ nicht invariant unter Transformationen, bei denen auch $\Lambda$ von x abhängig wird, also $\Lambda : \mathbb{M}_4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \Lambda(x)$ , weil zusätzliche Terme beim Ableiten entstehen.
Durch Einführung eines vierer Vektorpotentials $A_\mu(x)$ , dem „Eichvektorfeld“ oder „Eichbosonfeld“, mit welchem

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

gelten soll, wird die Wirkung

$$S_F = \int d^4x \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x)$$

invariant unter den lokalen Transformationen

$$\psi(x) \longrightarrow G(x)\psi(x) \quad ; \quad \overline{\psi}(x) \longrightarrow \overline{\psi}(x)G^{-1}(x)$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow G(x)A_\mu(x)G^{-1}(x) - \tfrac{i}{q}G(x)\partial_\mu G^{-1}(x) \qquad (*)$$

wobei $G(x) = exp(i\Lambda(x))$ ist und die Rolle einer von $x$ abhängigen Basistransformation übernimmt. Falls $A_\mu(x)$ und $G(x)$ kommutieren, kann man schreiben

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{i}{q} G(x) \partial_\mu G^{-1}(x)$$

Dieser Punkt ist relevant für die Struktur von Eichtransformationen. Genauso ist auch

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{q} \partial_\mu \Lambda(x)$$

benutzbar. So erhält $D_\mu$ , die eichkovariante Ableitung, das Transformationsverhalten

$$D_\mu \longrightarrow G D_\mu G^{-1}$$

denn $D'_\mu \psi' = (G D_\mu G^{-1})(G\psi) = G D_\mu \psi = (\partial_\mu + iqA'_\mu)(G\psi) = (\partial_\mu + iq(GA_\mu G^{-1} - \frac{i}{q} G(\partial_\mu G^{-1})))(G\psi)$.

Nun fehlt aber in $S_F$ noch ein kinetischer Term, welcher die Propagation von $A_\mu(x)$ unabhängig von $\psi$ erlaubt, denn $A_\mu(x)$ soll ein „freies" Feld sein (was nur ABELschen Fall möglich ist; im nicht-kommutativen Fall treten Selbstwechselwirkungen des Eichfeldes auf), und selbst auch eich- und LORENTZinvariant unter o.g. Trafos ist. Dieser wird gegeben durch

$$S_G = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu} = -\frac{i}{q}[D_\mu, D_\nu]$ der „Feldstärketensor" ist (vgl. Anhang (1)). Insgesamt erhält man somit für die lokal eichinvariante Wirkung des DIRAC-Feldes

$$S_{QED} = S_G + S_F$$

Im EUKLIDischen Formalismus sehen diese Formeln etwas anders aus; durch die Ersetzungen

$$x^0 \longrightarrow -ix_4$$

$$A^0 \longrightarrow +iA_4$$

und somit

$$\partial_0 \longrightarrow +i\partial_4$$

gelangt man zu

$$S_{QED} \longrightarrow iS_{QED}^{(eu)} = i(S_G^{(eu)} + S_F^{(eu)})$$

mit

$$S_G^{(eu)} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

und

$$S_F^{(eu)} = \int d^4x \overline{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi$$

wobei $\gamma_\mu$ $(\mu = 1, ..., 4)$ die EUKLIDischen $\gamma$- Matrizen sind, welche aus den DIRACschen $\gamma^\mu$ durch $\gamma_0 = \gamma^0$ ; $\gamma_k = -i\gamma^k$ $(k = 1, 2, 3)$ hervorgehen und $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ erfüllen; $D_\mu$ bleibt unverändert.
Nach diesen Wiederholungen soll nun die entsprechende Gitterformulierung aufgebaut werden. Dabei wird mit der WILSON-Wirkung begonnen, die folgende Gestalt (vgl. auch Anhang (2)) hat:

$$S_F^{(W)} = (\widehat{m} + 4r)\sum_n \overline{\psi}(n)\psi(n)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\left[\overline{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)\psi(n + \widehat{\mu}) + \overline{\psi}(n + \widehat{\mu})(r + \gamma_\mu)\psi(n)\right]$$

wobei die Ersetzungen

$$m \longrightarrow \frac{1}{a}\widehat{m}$$

$$\psi_\alpha(x) \longrightarrow a^{-\frac{3}{2}}\widehat{\psi}_\alpha(n) \equiv a^{-\frac{3}{2}}\psi_\alpha(n)$$

$$\overline{\psi}_\beta(x) \longrightarrow a^{-\frac{3}{2}}\overline{\widehat{\psi}_\beta}(n) \equiv a^{-\frac{3}{2}}\overline{\psi}_\beta(n)$$

mit $a$ als Gitterabstand (hier $a = 1$) dimensionslose Größen erzeugen (vgl. aber Anhang (3)).
$(x_\mu \longrightarrow n_\mu a;\ \partial_\mu\psi_\alpha(x) \longrightarrow a^{-\frac{5}{2}}\widehat{\partial}_\mu\widehat{\psi}_\alpha(n) := a^{-\frac{5}{2}}(\frac{1}{2}\left[\widehat{\psi}_\alpha(n + \widehat{\mu}) - \widehat{\psi}_\alpha(n - \widehat{\mu})\right]$ ist die antihermitische Gitterableitung in Richtung $\widehat{\mu} = e_\mu$ und $r$ ist der WILSON-Parameter) Zur Vereinfachung ist der „Hut“ im folgenden wie auch schon bei $S_F^{(W)}$ fortgelassen, außerdem sei jeder Gitterpunkt durch alle DIRAC-Komponenten $\psi_\alpha$ besetzt.
$S_F^{(W)}$ ist invariant unter globalen Transformationen; verlangt wird nun die lokale Eichinvarianz sowie die Reduzierung von $S_F^{(W)}$ im Kontinuumslimes auf die bekannte Wirkung. Da die $G \in U(1)$ nicht auf die einzelnen DIRAC-Komponenten wirken, sondern nur von den Gitterstellen abhängen, schreiben wir $G(n)$. Deshalb genügt es nur die bilinearen Terme $\overline{\psi}(n)\psi(m)$ zu betrachten, die offenbar für $n = m$ lokal invarinat sind, für $n \neq m$ jedoch nicht.

Diese werden im kontinuierliche Fall mit Hilfe des SCHWINGERschen Wegintegrals oder sog. Paralleltransportern

$$U_{\mathcal{C}}(x,y) \equiv U(x,y) = exp\{iq \int\limits_{[x,y]} \sum_{\mu} dz_\mu A_\mu(z)\} \qquad \in U(1)$$

wobei über einen Weg $\mathcal{C}$ von $x$ nach $y$ zu integrieren ist, zu lokal invarianten Produkten $\overline{\psi}(x)U(x,y)\psi(y)$ ($\overline{\psi}(x)\psi(y) \longrightarrow \overline{\psi}(x)G^{-1}(x)G(y)\psi(y)$ nicht invar. für $x \neq y$) , denn

$$U(x,y) \longrightarrow G(x)U(x,y)G^{-1}(y) = e^{i\Lambda(x)} exp\{iq \int\limits_{[x,y]} \sum_{\mu} dz_\mu A_\mu(z)\} e^{-i\Lambda(y)} =$$

$$exp\{iq \int\limits_{[x,y]} \sum_{\mu} dz_\mu \underbrace{(A_\mu(z) - \frac{1}{q}\partial_\mu \Lambda_\mu(z))}_{A'_\mu(z)}\} = U'(x,y)$$

Sei nun $y = x + \varepsilon$ ; dann ist $U(x, x+\varepsilon) = exp(iq \sum_\mu \varepsilon_\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))$ für genügned kleine $\varepsilon$. Analog zu diesen Überlegungen substituiert man in $S_F^{(W)}$ die entsprechenden Ausdrücke:

$$\overline{\psi}(n)(r * \gamma_\mu)\psi(m) \longrightarrow \overline{\psi}(n)(r * \gamma_\mu)U_{n,m}\psi(m)$$

wobei $* = +, -$ mit angepaßtem $n$ bzw. $m$ und $U_{m,n} = U^\dagger_{n,m}$ gilt; dabei ist dann

$$U(1) \ni \qquad U_{n,n+\widehat{\mu}} = exp(i\phi_\mu(n)) \quad , \phi_\mu(n) \in [0, 2\pi]$$

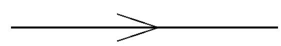
Somit ist nun $S_F^{(W)}$ lokal eichinvariant unter den Transformationen

$$\psi(n) \longrightarrow G(n)\psi(n)$$

$$\overline{\psi}(m) \longrightarrow \overline{\psi}(m)G^{-1}(m)$$

$$U_{n,m} \longrightarrow G(n)U_{n,m}G^{-1}(m)$$

Als graphische Veranschaulichung der $U_{n,n+\widehat{\mu}}$ dient folgendes Bild



$n \qquad U_{n,n+\widehat{\mu}} \qquad n+\widehat{\mu}$

mit umgekehrter Pfeilrichtung für $U^\dagger_{n,n+\widehat{\mu}} = U_{n+\widehat{\mu},n}$ , weshalb man auch von „Linkvariablen“ spricht. Es bleibt noch zu zeigen, daß die so modifizierte Wirkung $S_F^{(W)}$ bei $a \longrightarrow 0$ , unter Erhaltung der Relation zwischen den Linkveriablen und dem Vektorpotential $A_\mu(n)$ , gegen die zuvor angegebene Wirkung $S_F^{(eu)}$ konvergiert. Um eine solche Relation überhaupt angeben zu können ($\phi_\mu \in [0, 2\pi]$ beschränkt, aber $A_\mu(x)$ im Kontinuum unbegrentzt!) setzt man $\phi_\mu(n) = qaA_\mu(n)$ an. Für kleine Gitterkonstanten ist dann noch $U_{n,n+\widehat{\mu}} = 1 + iqaA_\mu(n) + \mathcal{O}(a^2)$ , weshalb man

$$S_F^{(W)}[\psi, \overline{\psi}, U] \approx S_F^{(W)}[\psi, \overline{\psi}]$$

$$-\frac{1}{2} iq \sum_{n,\mu} a(\overline{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)A_\mu(n)\psi(n + \widehat{\mu}) - \overline{\psi}(n + \widehat{\mu})(r + \gamma_\mu)A_\mu(n)\psi(n))$$

erhält. Wegen $S_F^{(W)}[\overline{\psi}, \psi] \longrightarrow S_F[\overline{\psi}, \psi]$ ist zu zeigen, daß der auftretende Zusatzterm gegen 0 konvergiert:

$$\sum_{n,\mu} a(...) \longrightarrow \lim_{a\to 0}\{\frac{1}{a^4} \int d^4x\, a(a^3\overline{\psi}(x)(r-\gamma_\mu)A_\mu(x)\psi(x+a) - a^3\overline{\psi}(x+a)(r+\gamma_\mu)A_\mu(x)\psi(x)\}$$

$$= \lim_{a\to 0}\{\int d^4x\, \overline{\psi}(x)(r - \gamma_\mu)\psi(x + a) - \overline{\psi}(x + a)(r + \gamma_\mu)\psi(x)\} = 0$$

aufgrund der Stetigkeit von $\psi$ und $\overline{\psi}$ .
Im folgenden wird die Notation

$$U_\mu(n) \equiv U_{n,n+\widehat{\mu}} = exp\{iqaA_\mu(n)\} \qquad (**)$$

benutzt, mit der Transformationseigenschaft

$$U_\mu(n) \longrightarrow G(n)U_\mu(n)G^{-1}(n + \widehat{\mu}) = exp\{iqaA^G_\mu(n)\} \qquad ,$$

wobei $A^G_\mu(n)$ die Gitterformulierung von $(*)$ auf Seite 2 ist. Um nun die Gitterformulierung zu vervollständigen muß noch ein Term analog zu $S_G^{(eu)}$ angegeben werden. Dazu betrachtet man die kleinst möglichen Plaquetten in einer $\mu - \nu-$Ebene des Gitters, ein Elementarplättchen, und definiert

$$U_{\mu\nu}(n) := U_\mu(n)U_\nu(n + \widehat{\mu})U^\dagger_\mu(n + \widehat{\nu})U^\dagger_\nu(n)\ .$$

Da wir uns im ABELschen Fall befinden, ist hier der Umlaufsinn des Pfades irrelvant, im Gegensatz z.B. zur QCD, wenn nicht-ABELsche Eichgruppen betrachtet werden. Aus $(**)$ ergibt sich damit

$$U_{\mu\nu}(n) = exp\{iqa^2F_{\mu\nu}(n)\}$$

$$F_{\mu\nu}(n) := \frac{1}{a}\left[(A_\nu(n+\widehat{\mu}) - A_\nu(n)) - (A_\mu(n+\widehat{\nu}) - A_\mu(n))\right] \qquad ,$$

eine diskretisierte Version des o.g. Feldstärketensors $F_{\mu\nu}(x)$. Für kleine Gitterkonstanten folgt so

$$\frac{1}{q^2}\sum_n \sum_{\substack{\mu,\nu \\ \mu<\nu}} \left[1 - \frac{1}{2}(U_{\mu\nu}(n) + U^\dagger_{\mu\nu}(n))\right] = \frac{1}{4}\sum_{\substack{n \\ \mu,\nu}} a^2 F\mu\nu(n) F_{\mu\nu}(n) \qquad ;$$

denn es ist $U_{\mu\nu}(n) = 1 + iqa^2F_{\mu\nu}(n) - q^2a^4F^2_{\mu\nu}(n) + \mathcal{O}(q^3)$ und $U^\dagger_{\mu\nu}(n) = 1 - iqa^2F_{\mu\nu}(n) - q^2a^4F^2_{\mu\nu}(n) + \mathcal{O}(q^3)$ , woraus sich die Gleichung mit dem Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ ergibt. Schreibt man schließlich zur Vereinfachung

$$S_G[U] = \frac{1}{q^2}\sum_P \left[1 - \frac{1}{2}(U_P + U_P^\dagger)\right] \quad ,$$

wobei nun $U_P$ , die „Plaquettenvariable“, für ein Produkt von Linkvariablen steht, welche ein Elementarplättchen einmal (nach obiger Def. im Uhrzeigersinn) umlaufen, so läßt sich insgesamt für die eichinvariante Gitterformulierung der WILSON-Wirkung der QED zusammenfassen:

$$S_{QED}\left[\psi, \overline{\psi}, U, r\right] = S_G[U] +$$

$$(\widehat{m}+4r)\sum_n \overline{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\left[\overline{\psi}(n)(r-\gamma_\mu)U_\mu(n)\psi(n+\widehat{\mu}) + \overline{\psi}(n+\widehat{\mu})(r+\gamma_\mu)U^\dagger_\mu(n)\psi(n)\right]$$

Mit dieser diskretiesierten Form der Wirkung lassen sich nun nach geeigneter Definition eines invar. Integrationsmaßes Erwartungswerte berechnen und beliebig an den kontin. Fall annähern. Dabei müssen alle Variablen mit einbezogen werden, also auch die Linkvariablen, welche die Wechelwirkungen zwischen den $\psi$'s darstellen.

Anhang:
(1) Die Form, die sich für $D_\mu$ ergibt, läßt sich notwendig erschließen:
man fordert die Eichinvarianz für das lokale Transformationsverhalten der $\psi$ („Nahwirkungsprinzip“: Unabhängigkeit der Physik von lokaler Basiswahl) und gelangt zu dem Schluß, daß auch $\partial_\mu$ verändert werden muß. Da die „neue“ Ableitung kovariant sein soll, bleibt nur die Gestalt $D_\mu = \partial_\mu + gA_\mu$

mit freiem $g$ übrig. Damit wiederum erhält man notwendig das Transformationsverhalten des eingeführten Feldes $A_\mu(x)$. Anschaulich bedeutet das: einer der beiden an der Ableitung beteiligten Punkte (im Differenzenquotient) wird ins lokale Basis-System des anderen transformiert (gedreht) und dort wird abgelitten. An den Formeln erkennt man dies, wenn man $U(x, x+\varepsilon) = 1 + iq \sum_\mu \varepsilon_\mu A_\mu(x)$ für kleine $\varepsilon$ mit $D_\mu$ (formal) vergleicht.
Desweiteren ist nicht klar, weshalb in $S_G$ nicht z.B. Terme der Art $F_{\mu\nu}\overline{F_{\mu\nu}}$ mit $\overline{F_{\mu\nu}} := \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}$ , dem „dualen Feldstärketensor“ , auftreten, denn diese erfüllen das Geforderte ebenso. Der Grund hierfür liegt wohl in der LAGRANGE-Dichte des MAXWELL-Feldes, die die Gestalt $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2$ haben kann, und welche man in die Theorie einbauen möchte, um den bekannten elektrodynamischen Fall bei Abwesenheit der $\psi$-Felder zu erhalten.

(2) Die WILSON-Wirkung ohne die Ersetzung des vierdimensionalen LAPLACE-Operators (hier ausnahmsweise mit $\triangle_4$ bezeichnet) durch die Gitterdarstellung ist:

$$S_F^{(W)} = S_F^{(eu)} - \frac{r}{2} \sum_n \overline{\widehat{\psi}}(n) \widehat{\triangle}_4 \widehat{\psi}(n)$$

(3) Exakter formuliert man den Kontinuumslimes folgendermaßen:
man geht von einem Gitter $(a\mathbb{Z}_n)^4 = (a\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^4$ mit endlich vielen Gitterpunkten $N^4$, der Gitterkonstanten $a$ und der Periode N aus, welches sich nicht in den vierdimensionalen EUKLIDischen Raum einbetten läßt (sondern nur in den vierdimensionalen Torus $Tor_4 = (\mathbb{R}\, mod\, a)^4$ , weshalb man auch von einem toroidalen Gitter spricht). Auf diesem Gitter definiert man die o.g. Ersetzungen der Feldvariablen, des Ableitungsbegriffs usw. zu dimensionslosen Größen. Die Rückführung ins Kontinuum soll nun in drei Schritten geschehen:

1. *Thermodynamischer Limes:* $N \longrightarrow \infty$ , wobei die n-Punktfunktionen auf dem Gitter $(a\mathbb{Z})^4$ berechnet werden und $a = 1$ ist; alle Größen sind noch dimensionslos

2. *Skalentransformation:* $a$ wird eingeführt und $(a\mathbb{Z})^4$ in den vierdim. EUKLIDischen Raum eingebettet; alle vorkommenden Eingangsparameter werden einer Skalentransformation unterworfen, sodaß diese die erforderliche Dimension erhalten

3. *Kontinuumslimes:* im nun $a$-abhängigen Gittermodell existieren die n-Punktfunktionen für $a \longrightarrow 0$ (bei geeigneter Wahl von $a$) und das Gittermodell strebt im Sinne der statistischen Mechanik gegen einen

kritischen Punkt; die Kontinuumstheorie beschreibt daher bei Existenz das Verhalten eines Gittermodells in einem seiner kritischen Punkte.

Dadurch wird das Renormierungsverfahren der konventionellen Feldtheorie ersetzt.

Literatur:
M. E. Peskin, D.V. Schroeder : An Introduction to Quantum Field Theory, Addition-Wesley Publishing Company 1997
H. J. Rothe : Lattice Gauge Theories – An Introduction, World Scientific 1992
I. Montvay, G. Münster : Quantum Fields on a Lattice, Cambridge University Press 1994
G. Roepstorff : Pfadintegrale in der Quantenphysik, Vieweg 1992