Seminar über Teilchen- und Kerntheorie

G. Münster, M. Stingl, A. Weiguny, C. Wieczerkowski

Das Pfadintegral

Stephan Engelhard

1 Das Pfadintegral in der Quantenmechanik

1.1 Das Pfadintegral im Orts-Impulsraum

Wir betrachten ein Quantenmechanisches System mit einem vollständigen Satz $Q_1, \ldots, Q_r$ von vertauschbaren Operatoren. Dazu seien $P_1, \ldots, P_r$ die kanonisch konjugierten Operatoren, d.h. es gelte $[Q_i, P_j] = i\delta_{ij}$. Um die Zeitentwicklung des Systems berechnen zu können, interessieren wir uns für den Zeitentwicklungsoperator e^{itH} und dessen Matrixelemente

$$T_{q,q'}(t) = \langle q_1, \ldots, q_r | e^{-itH} | q'_1, \ldots, q'_r \rangle$$

wobei q und q' Eigenzustände von Q sind.

Zur Berechnung dieser Matrixelemente zerteilen wir das Zeitintervall $[0, t]$ in kleinere Intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ für $n = 0, \ldots, N-1$, wobei $t_n = \frac{nt}{N}$. Wir setzen $\epsilon = \frac{t}{N}$ und schreiben den Zeitentwicklungsoperator als

$$e^{-itH} = e^{-i\epsilon H} \cdots e^{-i\epsilon H}$$

Zwischen den Operatoren $e^{-i\epsilon H}$ setzen wir eine Eins $\int dq |q\rangle\langle q|$ ein und in jeden entstehenden Faktor eine Eins $\int dp |p\rangle\langle p|$ und erhalten für die Matrixelemente

$$\begin{aligned} T_{q^{(N)},q^{(0)}}(t) &= \int \prod_{n=1}^{N-1} dq^{(n)} \prod_{m=0}^{N-1} \langle q^{(m+1)} | e^{-i\epsilon H} | q^{(m)} \rangle \\ &= \int dp^{(0)} \prod_{n=1}^{N-1} dq^{(n)} dp^{(n)} \prod_{m=0}^{N-1} \langle q^{(m+1)} | p^{(m)} \rangle \langle p^{(m)} | e^{-i\epsilon H} | q^{(m)} \rangle \end{aligned}$$

Wir setzen voraus, daß H keine in P und Q gemischten Terme enthält. Für kleine ϵ können wir Vertauschbarkeit der Terme in P mit den Termen in Q annehmen, da die Vertauschungsterme quadratisch in ϵ sind und erhalten

$$\langle p^{(m)} | e^{-i\epsilon H} | q^{(m)} \rangle = \langle p^{(m)} | q^{(m)} \rangle e^{-i\epsilon H(q^{(m)}, p^{(m)})}$$

Für T finden wir dann

$$\begin{aligned} T_{q(t),q(0)} &= \int dp(t_0) \prod_{n=1}^{N-1} dq(t_n) dp(t_n) \prod_{m=0}^{N-1} e^{-i\epsilon \left(H + \frac{q(t_m) - q(t_{m+1})}{\epsilon} p(t_m) \right)} \\ &= \int dp(t_0) \prod_{n=1}^{N-1} dq(t_n) dp(t_n) e^{-i \sum_{m=0}^{N-1} \epsilon \left(H + \frac{q(t_m) - q(t_{m+1})}{\epsilon} p(t_m) \right)} \end{aligned}$$

wobei wir $q^{(n)}$ und $p^{(n)}$ durch die Bezeichnung $q(t_n)$ und $p(t_n)$ ersetzt haben. Im Limes $N \to \infty$, $\epsilon \to 0$ mit $N\epsilon = t$ erhalten wir

$$\begin{aligned} T_{q,q'}(t) &= \int_{q(0)=q'}^{q(t)=q} \mathcal{D}q\mathcal{D}p e^{i\int_0^t dt'(\dot{q}(t')p(t') - H)} \\ &= \int_{q(0)=q}^{q(t)=q'} \mathcal{D}q\mathcal{D}p e^{i\int_0^t dt' L(q,\dot{q},p)} \\ &= \int_{q(0)=q'}^{q(t)=q} \mathcal{D}q\mathcal{D}p e^{iS[q,p]} \end{aligned}$$

Dabei wird über alle Funktionen $t' \mapsto (p(t'), q(t'))$, $t' \in [0,t]$ mit festem $q(0)$ und $q(t)$ integriert.

1.2 Das Pfadintegral im Ortsraum

1.2.1 Impulsintegration

Wir betrachten einen Hamiltonoperator H der Form

$$H = \frac{1}{2}P^2 + V(Q)$$

Dann haben wir das Impulsintegral

$$\begin{aligned} & \int dp e^{-i\epsilon\left(\frac{1}{2}p^2 + V(q)\right)} e^{-i(q^{(m)} - q^{(m+1)})p} \\ = \quad & e^{-i\epsilon V(q)} \int dp e^{-i\epsilon\frac{1}{2}p^2} e^{-i(q^{(m)} - q^{(m+1)})p} \end{aligned}$$

zu lösen. Dies ist ein Gaußintegral (für $i\epsilon$ reell) auf.

1.2.2 Gaußintegrale

Wir berechnen das allgemeine k-dimensionale Gaußintegral

$$\int dx e^{-\frac{1}{2}(x, Ax) + (J, x)}$$

wobei A eine symmetrische positiv definite $k \times k$-Matrix und J ein k-Vektor ist. Die Matrix A können wir durch Koordinatenwechsel zunächst diagonalisieren und dann, da die Eigenwerte von der positiv definiten Matrix A alle positiv sind, durch Koordinatenstreckung auf Einheitsmatrix E bringen. Es gibt also eine Matrix S mit $S^tAS = E$. Durch Substitution $x \mapsto Sx$ wird obiges Integral zu

$$|det\ S| \int dx e^{-\frac{1}{2}(x, Ex) + (J, Sx)}$$

Eine weiter Substitution $x \mapsto x + S^t J$ ergibt

$$\begin{aligned}
& |det\ S| \int dx e^{-\frac{1}{2}(x, Ex) - (S^t J, x) - \frac{1}{2}(J, SS^t J) + (J, Sx) + (J, SS^t J)} \\
= & |det\ S| e^{\frac{1}{2}(J, SS^t J)} \int dx e^{-\frac{1}{2}(x, Ex)} \\
= & |det\ S| e^{\frac{1}{2}(J, SS^t J)} \prod_{i=1}^{k} \int dx_i e^{-\frac{1}{2}x_i^2} \\
= & (2\pi)^{k/2} |det\ S| e^{\frac{1}{2}(J, SS^t J)}
\end{aligned}$$

Nun ist wegen $S^t A S = E$ die Matrix S die inverse zu $S^t A$, also gilt $SS^t A = E$, d.h. $SS^t = A^{-1}$. Da det multiplikativ und invariant unter Transponieren ist, folgt $|det\ S| = |det\ A|^{-1/2}$. Insgesamt erhalten wir

$$\int dx e^{-\frac{1}{2}(x, Ax) + (J, x)} = (2\pi)^{k/2} |det\ A|^{-1/2} e^{\frac{1}{2}(J, A^{-1}J)}$$

Damit erhalten wir

$$\int dp e^{-\epsilon \frac{1}{2} p^2} e^{iqp} = \left(\tfrac{2\pi}{\epsilon}\right)^{k/2} e^{-\epsilon^{-1}\frac{1}{2}q^2}$$

Durch analytische Fortsetzung für komplexe ϵ finden wir

$$\int dp e^{i\epsilon \frac{1}{2} p^2} e^{iqp} = \left(\tfrac{2\pi}{-i\epsilon}\right)^{k/2} e^{(i\epsilon)^{-1}\frac{1}{2}q^2}$$

1.2.3 Das Pfadintegral im Ortsraum

Nun können wir das benötigte Integral auswerten

$$\int dp e^{-i\epsilon\frac{1}{2}p^2} e^{-i(q^{(m)} - q^{(m+1)})p} = \left(\tfrac{2\pi}{i\epsilon}\right)^{r/2} e^{-(i\epsilon)^{-1}\frac{1}{2}(q^{(m)} - q^{(m+1)})^2}$$

Wir erhalten

$$T_{q^{(0)}, q^{(N)}}(t) = \int \prod_{n=1}^{N-1} dq^{(n)} \prod_{m=0}^{N-1} e^{i\epsilon\left(\frac{1}{2}\left(\frac{q^{(m)} - q^{(m+1)}}{\epsilon}\right)^2 - V(q^{(m)})\right)}$$

wobei wir den Faktor $\left(\frac{2\pi}{i\epsilon}\right)^{r/2}$ in dq verschwinden lassen haben. Nach Limesbildung schreiben wir wie oben

$$\begin{aligned}
T_{q,q'}(t) &= \int_{q(0)=q'}^{q(t)=q} \mathcal{D}q e^{i\int_0^t dt' \left(\frac{1}{2}\dot{q}(t')^2 - V(q(t'))\right)} \\
&= \int_{q(0)=q'}^{q(t)=q} \mathcal{D}q e^{iS[q]}
\end{aligned}$$

1.3 Korrelation

Mit einer analogen Rechnung erhalten wir für die Korrelationsfunktionen

$$\begin{aligned} & Tr(e^{-iHt_{s+1}}Q_{\alpha_s}(t_s)\cdots Q_{\alpha_1}(t_1)e^{iHt_0}) \\ = & \int_{q(t_0)=q(t_{s+1})} \mathcal{D}q q_{\alpha_s}(t_s)\cdots q_{\alpha_1}(t_1)e^{iS[q]} \end{aligned}$$

wobei $t_0 < t_1 < \ldots < t_s < t_{s+1}$, d.h. $\mathcal{D}qe^{iS[q]}$ kann in gewissem Sinne als Wahrscheinlichkeitsmaß angesehen werden. Die Übergangswahrscheinlichkeit von q' nach q in der Zeit t ist z.B. durch das Betragsquadrat von $T_{q,q'}(t)$ gegeben.

2 Das Pfadintegral in der Quantenfeldtheorie

In der Feldtheorie ist ein Zustand nicht durch einen Vektor $(q_1, \ldots, q_r)$ gegeben, sondern durch eine Funktion $x \mapsto \phi(x)$. Unter gewissen Voraussetzungen an den Hamiltonoperator des Systems erhalten wir dann als Verallgemeinerung

$$\begin{aligned} & Tr(e^{-iHt_{s+1}}\Phi(t_s)(x_s)\cdots\Phi(t_1)(x_1)e^{iHt_0}) \\ = & \int_{\phi(t_0)=\phi(t_{s+1})} \mathcal{D}\phi\phi(t_s)(x_s)\cdots\phi(t_1)(x_1)e^{iS[\phi]} \end{aligned}$$

Das Integral geht über alle Funktionen $t \mapsto \phi(t)$, wobei $\phi(t)$ eine Funktion $x \mapsto \phi(t)(x)$ ist. D.h. wir integrieren über alle Funktionen $(t,x) \mapsto \phi(t,x)$ mit $\phi(t_0, x) = \phi(t_{s+1}, x)$.

Das Funktional S ist dabei durch

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int_{t_0}^{t_{s+1}} dt \left(\frac{1}{2}\int dx\dot{\phi}(x)^2 - V[\phi(t)]\right) \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\phi},\dot{\phi}) - V[\phi] \end{aligned}$$

wobei $(f,g) = \int_{t=t_0}^{t_{s+1}} d^4xf(x)g(x)$ und $V[f] = \int_{t_0}^{t_{s+1}} dtV[f(t)]$.

Ersetzen wir das Intervall $[t_0, t_{s+1}]$ durch Limesbildung durch $]-\infty,\infty[$ und betrachten wir Vierervektoren x, so können wir schreiben

$$\begin{aligned} \langle 0|\Phi(x_s)\cdots\Phi(x_1)|0\rangle &= \lim_{t\to\infty} Tr(e^{-iHt}\Phi(x_s)\cdots\Phi(x_1)e^{-iHt}) \\ &= \int \mathcal{D}\phi\phi(x_s)\cdots\phi(x_1)e^{iS[\phi]} \end{aligned}$$

wobei hier die ϕ Funktionen auf $\mathbb{R}^4$ sind, über die integriert wird. Den Hamiltonoperator nehmen wir so geeicht an, daß die Energie des Grundzustandes $|0\rangle$ Null ist und zur Berechnung von $\lim_{t\to\infty}$ setzen wir die Funktion in t analytisch auf die untere Halbebene in $\mathbb{C}$ fort.