Die Eikonalnäherung in der Streutheorie

Enno E. Scholz

April 1999

1 Eikonalnäherung

Die Eikonalnäherung soll dazu dienen, Streuprobleme quantenmechanisch zu behandeln. Ziel ist es, die Streuamplitude berechnen zu können. Diese steht in direktem Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt, welcher experimentell zugänglich ist, so daß Theorie und Experiment miteinander verglichen werden können.

1.1 Die Eikonal-Wellenfunktion

Die Eikonalnäherung geht von folgenden Annahmen aus: Es wird zwar eine hochenergetische Strahlung angenommen, relativistische Effekte sind allerdings nicht zu berücksichtigen. Desweiteren soll gelten:

$$ka \gg 1 \tag{1}$$

$$\frac{|V_0|}{E} \ll 1 \tag{2}$$

Wobei a die Potentialbreite beschreibt und $|V_0|$ eine typische Potentialstärke. Somit drückt Bedingung (1) die Forderung nach einer kurzen Wellenlänge aus, so daß das Potential im Bereich einer Wellenlänge nicht stark variiert.

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist die Lippmann-Schwinger-Gleichung (s. A):

$$\psi_{k_i}^{(+)}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[i\vec{k}_i \cdot \vec{r}\right] + \int d^3\vec{r}\,' \, G^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}\,') \, U(\vec{r}\,') \, \psi_{k_i}^{(+)}(\vec{r}\,') \tag{3}$$

mit

$$G^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int d^3\vec{\kappa} \, \frac{\exp[i\vec{\kappa}(\vec{r} - \vec{r}\,')]}{\kappa^2 - k^2 - i\epsilon} \tag{4}$$

$$\text{im folgenden } \lim_{\epsilon \to 0^+} \text{ nicht mehr notiert}$$

Unter der Annahme, daß sich das Potential im Bereich einer Wellenlänge kaum verändert, wird als Ansatz gewählt (Ausklammern der einfallenden freien, ebenen Welle):

$$\psi^{(+)}_{k_i}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[i\vec{k}_i \cdot \vec{r}\right] \Phi(\vec{r}) \tag{5}$$

Einsetzen von (5) in (3) ergibt (mit $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$) eine Integralgleichung zur Bestimmung von Φ

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= 1 - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{R} \int d^3\vec{\kappa}\, \frac{\exp[i(\vec{\kappa} - \vec{k}_i)\vec{R}]}{\kappa^2 - k^2 - i\epsilon}\, U(\vec{r} - \vec{R})\, \Phi(\vec{r} - \vec{R}) && (6) \\ &= 1 - I && (7) \end{aligned}$$

Dies stellt immer noch eine exakte Lösung des Problems dar. Als erste Approximation wird nun die *Greensche Funktion* $G^{(+)}$ entwickelt (mit $\vec{p} = \vec{\kappa} - \vec{k}_i$):

$$G^{(+)}(\vec{R}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \exp\left[i\vec{k}_i \cdot \vec{R}\right] \int d^3\vec{p}\, \frac{\exp(i\vec{p} \cdot \vec{R})}{2\vec{k}_i \cdot \vec{p} + p^2 - i\epsilon} \tag{8}$$

(vergl. (4)) Da das Integral in (8) dominiert wird von $\frac{p}{k} \approx 0$, ist folgende Entwicklung sinnvoll:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\vec{k}_i \cdot \vec{p} + p^2 - i\epsilon} &= \frac{1}{2kp_z + p^2 - i\epsilon} \\ &= \frac{1}{2kp_z - i\epsilon} \left(1 - \frac{p^2}{2kp_z - i\epsilon} + \ldots\right) && (9) \end{aligned}$$

Hierbei wurde die $\hat{z}$-Richtung parallel zu $\vec{k}_i$ gewählt. Mit (9) ergibt sich:

$$G^{(+)} = G^{(1)} + G^{(2)} + \ldots \tag{10}$$

Somit läßt sich I in (7) entwickeln:

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} + \ldots \tag{11}$$

Die Eikonalapproximation besteht nun gerade darin, nur den Term $G^{(1)}$ zu betrachten. Dieser Term wird auch als *Linearer Propagator* bezeichnet. Die Voraussetzungen für diese Näherung sind noch zu diskutieren (s.u.).

Um $G^{(1)}$ zu berechnen, ist zunächst das folgende Integral auszuwerten:

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{p}\, \frac{\exp\left[i\vec{p} \cdot \vec{R}\right]}{2kp_z - i\epsilon} &= \int dp_x \int dp_y \int dp_z\, \frac{\exp[i(p_x X + p_y Y + p_z Z)]}{2kp_z - i\epsilon} \\ &= (2\pi)^2\, \frac{\delta(X)\delta(Y)}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z\, \frac{\exp\left[ip_z Z\right]}{p_z - i\epsilon} && (12) \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral in (12) besitzt einen Pol bei $p_z = i\epsilon$. Somit ergibt sich:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_z \, \frac{\exp\left[ip_z Z\right]}{p_z - i\epsilon} = \begin{cases} 2\pi i & z > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{13}$$

Mit den Ergebnissen aus (12) und (13) erhält man nun:

$$\begin{aligned} G^{(1)} &= \begin{cases} -\frac{i}{2k}\exp\left[ikZ\right]\delta(X)\delta(Y) & z > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= -\frac{i}{2k}\,\exp[ik(z-z')]\;\delta(x-x')\;\delta(y-y')\;\vartheta(z-z') \end{aligned} \tag{14}$$

(Rücksubstitution: $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$)

An dieser Stelle wird deutlich (Stufenfunktion $\vartheta(z-z')$), daß bei der Approximation von G^{+} nur die Vorwärtsrichtung berücksichtigt wird.

Somit gilt ($G^{(+)} \approx G^{(1)}$ in (6), bzw. $I \approx I^{(1)}$ in (7)):

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x,y,z) &= 1 - \frac{i}{2k}\int\limits_0^{\infty} dZ\, U(x,y,z-Z)\;\Phi^{(1)}(x,y,z-Z) \\ &= 1 - \frac{i}{2k}\int\limits_{-\infty}^{z} dz'\, U(x,y,z')\;\Phi^{(1)}(x,y,z') \end{aligned} \tag{15}$$

Voraussetzung für diese Approxiamtion ist die Forderung, daß gilt:

- $\boldsymbol{I^{(1)} \gg I^{(2)}}$Dies ist durch die Forderung nach kleinen Wellenlängen (s. (1)) erfüllt.
- $\boldsymbol{|I^{(2)}| \ll 1}$Dies wird aufgrund von (2) erfüllt.[1]

(15) stellt eine Integralgleichung zur Bestimmung von $\Phi^{(1)}$ dar, diese ist äquivalent zu folgender Differentialgleichung mit Randbedingung:

$$\left.\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}\right|_z = -\frac{i}{2k}\,U(z)\;\Phi^{(1)}(z) \;\; \text{mit: } \Phi^{(1)}(-\infty) = 1 \tag{16}$$

Die Lösung dieser DGL läßt sich sofort ablesen:

$$\Phi^{(1)}(z) = \exp\left[-\frac{i}{2k}\int\limits_{-\infty}^{z} dz'\, U(z')\right] \tag{17}$$

Setzt man nun (17) in (5) ein, so erhält man die *Eikonal-Wellenfunktion*

$$\psi_E(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\exp\left[i\vec{k_i}\cdot\vec{r} - \frac{i}{2k}\int\limits_{-\infty}^{z} dz'\, U(x,y,z')\right] \tag{18}$$

[1] Für eine genauere Diskussion s. [1]

Somit besteht die *Eikonalnäherung* lediglich in einer Phasenverschiebung der einfallenden freien, ebenen Welle. Ein Nachteil dieser Approximation besteht darin, daß sie für $r \to \infty$ das falsche asymptotische Verhalten besitzt, da eine Änderung der einfallenden Welle nur in dem Gebiet mit $U \neq 0$ stattfindet. Da allerdings bei der Berechnung der Streuamplitude nur dieser Bereich von Bedeutung ist (s. 1.2 und B), ist dieser Fehler in den nachfolgenden Betrachtungen zur Approximation der Streuampliude nicht zu berücksichtigen. Weiterhin ist nur ein kleiner Winkelbereich um die Einfallsrichtung zu erwarten, in dem die Approximation gültig ist, da, wie oben bereits bemerkt, durch $G^{(+)} \approx G^{(1)}$ nur die Vorwärtsrichtung berücksichtigt wird. Dies ist für hochenergetische Strahlung allerdings gegeben (kleine Streuwinkel).

1.2 Die Streuamplitude in der Eikonalnäherung

Die Streuamplitude ist durch

$$f \;=\; -2\pi^2 \, \langle \psi_f | U | \psi_{k_i}^{(+)} \rangle \tag{19}$$

gegeben (s. B, (41)). Wobei $|\psi_f\rangle$ eine ebene Welle in Beobachtungsrichtung darstellt. Setzt man nun für $|\psi_{k_i}^{(+)}\rangle$ die Eikonalwellenfunktion (s. 1.1, (18)) ein so erhält man die *Eikonale Streuamplitude* f_E:

$$\begin{aligned} f_E \quad &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r} \, \exp\left[-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}\right] \, U(\vec{r}) \, \exp\left[i\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \frac{i}{2k} \int\limits_{-\infty}^{z} dz' \, U(z')\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r} \, \exp\left[i\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}\right] \, U(\vec{r}) \, \exp\left[-\frac{i}{2k} \int\limits_{-\infty}^{z} dz' \, U(z')\right] \end{aligned} \tag{20}$$

$$\Delta\vec{k} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$$

Um das Integral in (20) auszuwerten, betrachtet man einen semi-klassischen Grenzfall, indem man längs eines klassisch durchlaufenen Weges integriert: Die z'-Integration wird längs der Richtung $\hat{n}$ durchgeführt (s. Skizze 1) [2].

Man zerlegt $\vec{r}$ folgendermaßen:

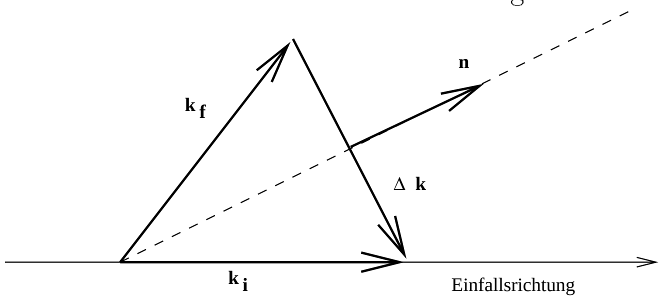
$$\vec{r} \;=\; \vec{\rho} \;+\; z \cdot \hat{n} \tag{21}$$

wobei $\vec{\rho}$ in der Ebene senkrecht zu $\hat{n}$ liegen soll. Hiermit erhält man aus (20):

$$f_E \;=\; -\frac{1}{4\pi} \int d^2\vec{\rho} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \, \exp\left[i\Delta\vec{k} \cdot \vec{\rho}\right] \, U(\vec{\rho}, z) \, \exp\left[-\frac{i}{2k} \int\limits_{-\infty}^{z} dz' \, U(\vec{\rho}, z')\right] \tag{22}$$

[2] Ein anderer Ansatz zur Berechnung ist folgender: Für kleine Streuwinkel gilt näherungsweise $\Delta\vec{k} \perp \vec{k}_i$. Also zerlegt man: $\vec{r} = \vec{\rho} + z\hat{k}_i$. Dies führt letzendlich zum selben Ergebnis. Man muß allerdings beachten, daß $\vartheta \ll \frac{1}{\sqrt{ka}}$ erfüllt ist. (ausführliche Herleitung: s. [1])

Abbildung 1:



Eine kleine Nebenrechnung führt zu dem Ergebnis:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, U(z)\, \exp\left[-\frac{i}{2k}\int\limits_{-\infty}^{z} dz'\, U(z')\right] &= 2ik\, \exp\left[-\frac{i}{2k}\int\limits_{-\infty}^{z} dz' U(z')\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\ &= 2ik\left\{\exp\left[-\frac{i}{2k}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz'\, U(z')\right] - 1\right\}\end{aligned}$$

so daß man aus (22) erhält[3]:

$$f_E = \frac{k}{2\pi i}\int d^2\vec{\rho}\, \exp\left[i\Delta\vec{k}\cdot\vec{\rho}\right]\, \{\exp[i\chi] - 1\} \tag{23}$$

$$\text{mit: } \chi = \chi(k,\vec{\rho}) = -\frac{1}{2k}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, U(\vec{\rho}, z) \tag{24}$$

Um Aussagen über die Streuamplitude zu gewinnen, ist es erforderlich, noch eine weitere Näherung durchzuführen: f_E läßt sich als Potenzreihe schreiben, indem man die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ausnutzt:

$$f_E = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_{E_n} \tag{25}$$

[3] Weitere Vereinfachungen ergeben sich, falls ein zylindersymmetrisches Potential vorliegt: Die gewöhnliche Bessel-Funktion ist gegeben durch:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, \exp[ix\cos\varphi]$$

Somit vereinfacht sich (23) zu (beachte: $\Delta\vec{k}\cdot\vec{\rho} = \Delta k\,\rho\,\cos\varphi$)

$$f_E = \frac{k}{i}\int\limits_0^{\infty} d\rho\,\rho\, J_0(\Delta k\,\rho)\, \{\exp[i\chi] - 1\}$$

(vgl. [1])

$$\text{mit: } \bar{f}_{E_n} = \tfrac{k}{2\pi i}\,\tfrac{i^n}{n!} \int d^2\vec{\rho}\ \exp\left[i\Delta\vec{k}\cdot\vec{\rho}\right]\ \chi^n \tag{26}$$

Als *n.-Eikonalnäherung* bezeichnet man

$$f_{E_n} = \sum_{j=1}^{n} \bar{f}_{E_j} \tag{27}$$

Die *1. Eikonalnäherung* ist also gegeben durch:

$$\begin{aligned} f_{E_1} &= -\frac{1}{4\pi}\int d^2\vec{\rho}\int dz\ \exp\left[i\Delta\vec{k}\cdot\vec{\rho}\right]\ U(\vec{\rho},z) \\ &\overset{\text{Zylindersym.}}{=} -\frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{r}\ \exp\left[i\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}\right]\ U(\vec{r}) \end{aligned} \tag{28}$$

2 Bornsche Näherung

2.1 Iterationsansatz zur Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung

An dieser Stelle soll nun die Lippmann-Schwinger-Gleichung (s. A, (38))

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}\,'\, G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,')\, U(\vec{r}\,')\, \psi(\vec{r}\,') \tag{29}$$

$$\psi_0(\vec{r}) : \text{ebene Welle}$$

durch einen Iterationsansatz gelöst werden. Hierzu wird als erste Näherung ψ_0 als Lösung angenommen und die rechte Seite von (29) in das Integral in (29) eingesetzt:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}\,' G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,') U(\vec{r}\,') \left\{ \psi_0(\vec{r}\,') + \int d^3\vec{r}\,''\, G^{(+)}(\vec{r}\,',\vec{r}\,'')\, U(\vec{r}\,'')\, \psi(\vec{r}\,'') \right\} \tag{30}$$

Im nächsten Schritt wird dies wiederum als approximative Lösung in das Integral eingesetzt usw. (vgl. z.Bsp. [3, Kap. 17]). Es ergibt sich:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\psi}_n \tag{31}$$

$$\text{mit: } \bar{\psi}_0 = \psi_0, \qquad \bar{\psi}_n = \int d^3\vec{r}\,'\, G^{(+)}\, U\, \bar{\psi}_{n-1}$$

Wiederum sei mit

$$\psi_{B_n} = \sum_{j=0}^{n} \bar{\psi}_j \tag{32}$$

die *n.-Bornsche Näherung* gemeint.

2.2 Die Streuamplitude in der Bornschen Näherung

Nun läßt sich auch in der Bornschen Näherung (32) ein Ausdruck für die Streuamplitude (s. B, (41) bzw. (19))

$$f \;=\; -2\pi^2 \, \langle \psi_f | U | \psi_{k_i}^{(+)} \rangle \tag{33}$$

angeben:

$$\begin{aligned} f_{B_n} &= -2\pi^2 \, \langle \psi_f | U | \psi_{B_{n-1}} \rangle \\ &\overset{(32)}{=} -2\pi^2 \sum_{j=0}^{n-1} \langle \psi_f | U | \bar{\psi}_j \rangle \end{aligned} \tag{34}$$

Betrachtet man nun f_{B_1}:

$$\begin{aligned} f_{B_1} &= -2\pi^2 \, \langle \psi_f | U | \psi_{B_0} \rangle \\ &= -2\pi^2 \int d^3\vec{r} \, \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}\right] \, U(\vec{r}) \, \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[i\vec{k}_i \cdot \vec{r}\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r} \, \exp\left[-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}\right] \, U(\vec{r}) \end{aligned} \tag{35}$$

So stellt man fest, daß dies mit der Eikonalnäherung f_{E_1} (vgl. (28)) übereinstimmt. Dies ist jedoch in den höheren Ordnungen nicht mehr gegeben.

A Lippmann-Schwinger-Gleichung

Betrachtet man die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\left\{\tfrac{p^2}{2m} + V\right\}\psi = E\psi \tag{36}$$

$$\text{bzw.} \quad \left\{\triangle + k^2\right\}\psi = U\psi \tag{37}$$

$$(p^2 = -\hbar^2\triangle,\ E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},\ U = \frac{2m}{\hbar^2}V)$$

Und betrachtet in (37) den Term $U\psi$ als Inhomogenität der DGL, so erhält man die Lösung aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL (ebene Welle) plus eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL:

$$\psi_{k_i}^{(+)}(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}'\, G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}')\, U(\vec{r}')\, \psi_{k_i}^{(+)}(\vec{r}') \tag{38}$$

$$\text{mit:} \quad \psi_0 = \tfrac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[i\vec{k}_i \cdot \vec{r}\right]$$

$$G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}') = -\tfrac{1}{(2\pi)^3} \lim_{\epsilon\to 0+} \int d^3\vec{\kappa}\, \tfrac{\exp[i\vec{\kappa}(\vec{r}-\vec{r}')]}{\kappa^2 - k^2 - i\epsilon}$$

Wobei man die *Greensche Funktion* $G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}')$ formal aus

$$\left\{\triangle + k^2\right\} G^{(+)}(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(\vec{r},\vec{r}') \tag{39}$$

erhält (s. [2, Kap. 9.3.1]) [4]

B Streutheorie

Betrachtet man die Lippmann-Schwinger-Gleichung 38) im Grenzfall $r \to \infty$ so ergibt sich durch:

$$\int d^3\vec{r}' G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}')U(\vec{r}')\psi_{k_i}^{(+)}(\vec{r}') \overset{r\to\infty}{\to} -\frac{1}{4\pi}\frac{\exp[ikr]}{r}\int d^3\vec{r}' \exp\left[-ik\hat{r}\vec{r}'\right] U(\vec{r}')\psi_{k_i}^{(+)}(\vec{r}') \tag{40}$$

---

[4] Ein anderer Ansatz zur Bestimmung der *Greenschen Funktion* ist folgender (s. [2, Kap. 9.4.1]):

Man zerlegt den Hamilton-Operator H des Streuproblems in einen freien Operator H_0 und einen Wechselwirkungsoperator des Streuzentrums H_{WW}:

$$H = H_0 + H_{WW}$$

Sei nun $\psi_0(t=0)$ Lösung zu H_0, dann gilt:

$$\psi_0(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_0 t\right]\psi_0(0)$$

Dies kann jedoch für das Streuproblem nur eine Lösung für $t \to -\infty$ sein, also bevor eine Wechselwirkung mit dem Streuzentrum eintritt. Daraus folgt:

$$\psi(t) = \lim_{t'\to-\infty} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H(t-t')\right]\psi_0(t')$$

folgende Darstellung der gestreuten Welle:

$$\psi_{k_i}^{(+)} \overset{r \to \infty}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \underbrace{\exp\left[i\vec{k}_i \cdot \vec{r}\right]}_{\text{einlaufende, ebene Welle}} + \underbrace{f(k, \vartheta, \varphi) \frac{\exp\left[ikr\right]}{r}}_{\text{auslaufende Kugelwelle}} \right\}$$

$$\text{mit:} \quad f(k, \vartheta, \varphi) = -\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{4\pi} \int d^3\vec{r}\,' \exp\left[i\vec{k}_f \cdot \vec{r}\,'\right] U(\vec{r}\,') \, \psi_{k_i}^{(+)}(\vec{r}\,')$$

$$= -2\pi^2 \langle \psi_{k_f} | U | \psi_{k_i}^{(+)} \rangle \tag{41}$$

(Streuamplitude)

Anmerkung:

$$|f|^2 = \frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{42}$$

Literatur

[1] Charles J. Joachain, Quantum Collision Theory

[2] Wolfgang Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5, Quantenmechanik, Teil 2: Methoden und Anwendungen

[3] Albert Messiah, Quantenmechanik 2