Seminarvortrag:

Störungstheorie für das selbstwechselwirkende skalare Feld

von Matthias Kretschmann

29.4.98

Seminar über Teilchen und Kerntheorie, SS 1998
G.Münster, M. Stingl, A. Weiguny

Einleitung

Ziel dieses Vortrages ist es das bisher über das freie Feld gelernte auf ein Wechselwirkendes Feld zu erweitern. Der Wechselwirkungsterm in der Lagrangedichte geht exponentiell in die Wirkung ein. Entwickelt man diesen Exponenten in eine Reihe, kann man Mithilfe des Wick'schen Theorems die n-Punkt Greensfunktion des wechselwirkenden Feldes ausrechnen. Die explizite Reihenentwicklung besteht aus beliebig komplizierten Termen und soll hier bis zur zweiten Ordnung am Beispiel einer ϕ^4 Störung durchgeführt werden. Den in der Reihe auftretenden Termen ordnete Feynman seine Feynman - Graphen zu, um die einzelnen Terme anschaulich darzustellen. Mithilfe der sogenannten Feynmanregeln kann man mit ein wenig Übung von der Analytischen auf die graphische Darstellung und umgekehrt wechseln. Zuerst will ich noch mal die wesentlichen Aspekte des Freien Feldes zusammenfassen und dessen „Lösung" mit den ersten einfachen Graphen darstellen...

1. Kurze Wiederholung des Freien Feldes

Ich werde für alles folgende Vektoren des Euklidischen Raumes verwenden, wodurch sich die Rechnung anschaulicher darstellen läßt. Auch die so berechneten Wirkungen und Greensfunktionen beziehen sich auf den Euklidischen Raum. Aus Gründen der Übersicht, lasse ich den sonst üblichen Index (E) hier weg. Wie schon erwähnt, wollen wir die Greens Funktionen bestimmen, die als Grundzustandserwartungswert von zeitgeordneten Feldoperatoren definiert sind:

(1.1) $$G_0^{(n)}(x_1 \ldots x_n) = \left\langle \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_2) \right\rangle_0 = \left\langle 0 \middle| T\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n) \middle| 0 \right\rangle_0$$

ist in der Pfadintegraldarstellung:

(1.2) $$G_0^{(n)}(x_1 \ldots x_n) = \frac{\int D\Phi\, \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n) \exp\{-S_o[\Phi]\}}{\int D\Phi \exp\{-S_0[\Phi]\}}$$

Die hierdefinierte Greensfunktion soll sich auf das Freie Feld beziehen (Kennzeichung durch Index 0). Dasselbe gilt auch für die weiteren Grössen des freien Feldes.
Per Definition sei:

(1.3) $$(\Phi, A\Phi) = \int d^4x\, d^4y\, \Phi(x)\, A(x,y)\, \Phi(y)$$

Aus dem Seminarvortrag letzter Woche, setze ich folgende Formel zusammen.

(1.4) $$Z_0[J] = \frac{1}{Z_0[0]} \int D\Phi \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\Phi, A\Phi) + (J, \Phi) \right\} = \exp\left\{ \tfrac{1}{2}(J, A^{-1}J) \right\}$$

J ist hier eine beliebige Anregungsquelle, die nur als Mathematischer Trick benutzt wird um die Greensfunktion als Funktionalableitung obiger Funktion darstellen zu können. Sie wird hinterher gleich null gesetzt. (Endergebnis: siehe Vortrag letzter Woche, Formel: (1.3)f.
In Kapitel 4 und 5 des letzten Vortrages wurde die Klein - Gordon Gleichung und die Lagrangedichte des freien skalaren Feldes hergeleitet:

(1.5) Klein - Gordon Gleichung: $$(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi = 0$$

(1.6) Lagrangedichte $$L_0 = \frac{1}{2}\left((\partial_\mu \Phi)^2 + m^2 \Phi^2 \right)$$

(1.7) Wirkung $$S_0[\Phi] = \tfrac{1}{2}\int d^4x L_0 = \tfrac{1}{2}\int d^4x \left(\Phi(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi \right)$$

N ist die Normierung der Greensfunktion:

(1.8) $$N = \int D\Phi \exp\{-S_o[\Phi]\}$$

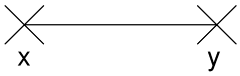
Mit (1.7), (1.3) und (1.4) läßt sich (1.2) als Funktionalableitung eines Erzeugenden Funktionals $Z[J]|_{J=0}$ darstellen...

(1.9)
$$G_0^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \frac{\int D\Phi\, \Phi(x_1)\dots\Phi(x_n)\exp\{-\tfrac{1}{2}(\Phi, A\Phi)\}}{\int D\Phi \exp\{-\tfrac{1}{2}(\Phi, A\Phi)\}}$$
$$= \frac{1}{Z_0[o]}\int D\Phi \frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \exp\{-\tfrac{1}{2}(\Phi, A\Phi) + (J,\Phi)\}\big|_{J=0}$$

Das Element A ist hier der Operator des freien Feldes $(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2)$. Sein in $Z_0[J]$ auftretendes Inverses wird mithilfe der Fouriertransformierten ermittelt und wird der Feynman-Propagator genannt. Da für ein freies Feld Translationsinvarianz herrscht, gilt ist diese spezielle 2-Punkt Greensfunktion nur abhängig von der Differenz der beiden Punkte und wird mit $\Delta_F(x-y)$ bezeichnet. Er propagiert die Lösungen der Klein-Gordon Gleichung. Es ergab sich im letzten Vortrag:

(1.10)
$$\Delta_F(x_1 - x_2) = \int \tfrac{d^4p}{(2\pi)^4} \tfrac{1}{p^2+m^2} \exp[-ip(x_1 - x_2)]$$

Die Punkte x und y werden „äußere Punkte“ genannt und durch ein Kreuz gekennzeichnet. Die Graphische Darstellung des Feynman-Propagators $\Delta_F(x-y)$ sieht folgendermaßen aus:

(1.11) $\Delta_F(x-y)$ $\Leftrightarrow$ 

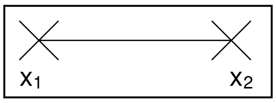
Somit erhalten wir für die n-Punkt Greensfunkion des freien Feldes folgenden Ausdruck:

(1.12)
$$\boxed{G_0^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} Z_0[J]\ \big|_{J=0}}$$

Hier wollen wir die ersten vier Greensfunktionen ausrechen um Wick's theorem zu veranschaulichen. Das Ergebnis besteht aus einer Funktion von Feynman-Propagatoren, für die wir die ersten Feynman Graphen zeichnen.

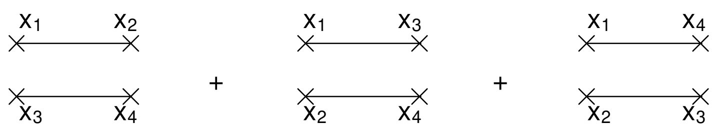
(1.14) $Z_0[J] = \exp\left\{\tfrac{1}{2}(J(x_1), \Delta_F(x_1 - x_2) J(x_2))\right\}$

Es ergibt sich für die Greenschen funktionen von n Punkten folgendes (siehe letzter Vortrag (7.11-7.15) sowie (3.2-3.9):

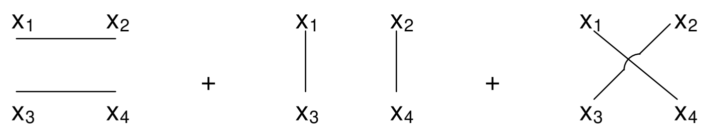
- n=1 $G_0^{(1)}(x_1) = 0$
- n=2 $G_0^{(2)}(x_1, x_2) = \Delta_F(x_1 - x_2)$ $\Leftrightarrow$ 

- n=3 $G_0^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = 0$
- n=4 $G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4)$
$+ \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_2)$

n=4 Wird folgendermaßen dargestellt



Dem Äquivalent ist:



$\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4)$ wird also „untereinander“ geschrieben, bzw. gezeichnet...

Induktiv folgern wir das **Wicksche Theorem**:

$$(1.15)\quad G_0^{(n)}(x_1\ldots x_n)=\begin{cases}0 & \text{für n ungrade}\\ \sum\limits_{\substack{\text{Alle Möglichen}\\ \text{Paarungen der}\\ \text{Elemente (1...n)}}}\Delta_F(x_i-x_j)\cdot\ldots\cdot\Delta(x_y-x_z)\end{cases}$$

Eigenschaften der Summe:
Man kann sagen, daß $G^{(n)}$ durch (n-1)!! Summanden in denen die 2-punktfunktion (1/2)n mal vorkommen, dargestellt werden kann. ((n-1)!! Bedeutet: $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot(n-1)$). $G^{(4)}$ besteht also aus 3 Summanden, in denen die 2-punktfunktion jeweils zwei mal auftaucht . $G^{(6)}$ wird durch 15 Summanden in denen die 2-Punktfunktion drei mal auftaucht, dargestellt. Der Feynman-Propagator ist symmetrisch in seinen beiden Argumenten. Außerdem ist in dem oben hergeleiteten die Normierung von vornherein impliziert. Deshalb fallen die Terme der Summe weg, in denen nur die Argumente in den einzelnen Δ_F vertauscht sind....

Fazit:
$G_0^{(n)}(x_1\ldots x_n)$ ist, dank des Wickschen Theorems, also komplett durch (n-1)!! Summanden in denen Produkte von Feynman-Propagatoren auftauchen, darstellbar.
Damit ist die Wiederholung des Freien Feldes abgeschlossen und ich wende mich dem wechselwirkenden Feld zu:

2. Das Wechselwirkende skalare Feld

Die Lagrangedichte und die Wirkung des freien Feldes waren gegeben durch (1.6) und (1.7). Zu der Lagrangedichte wird jetzt eine Störpotentialdichte $V_I(\phi)$ (I für „interaction") addiert. Dadurch ändert sich auch die Wirkung des wechselwirkenden Feldes, die die Gewichtung in der Pfadintegraldarstellung der Greensfunktion ist. Da die Wirkung im Exponenten steht, bietet sich die Reihendarstellung an. Feynman hat den auftretenden Termen der Summe weitere Graphen zugeordnet. Die Feynmanregeln beschreiben diesen Vorgang....

$$(2.1)\quad L=L_0+V_I=\frac{1}{2}\Big((\partial_\mu\Phi)^2+m^2\Phi^2\Big)+V_I(\Phi)$$

$$(2.2)\quad S=S_0+S_I=\tfrac{1}{2}\int d^4xL=\tfrac{1}{2}\int d^4x\Big(\big(\Phi(-\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\Phi\big)+V_I(\Phi)\Big)$$

$$(2.3)\quad S_I=\int d^4x\big(V_I(\Phi)\big)$$

Dadurch wird (1.2) zu

$$(2.4)\ G^{(n)}(x_1\ldots x_n)=\frac{\int D\Phi\,\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\exp\{-S_o[\Phi]\}\exp\{-S_I(\Phi)\}}{\int D\Phi\exp\{-S_0[\Phi]\}\exp\{-S_I(\Phi)\}}$$

Auch diese Funktion kann durch Funktionalableitung eines Erzeugenden Funktionals bestimmt werden:

$$(2.5)\quad G^{(n)}(x_1\ldots x_n)=\frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}Z[J]\ |_{J=0}$$

$$(2.6)\quad Z[J]=\frac{\int D\Phi\exp\{-S_o[\Phi]\}\exp\{-S_I(\tfrac{\delta}{\delta J(x)})\}\exp\{(J,\Phi)\}}{Z[0]}$$

Es ergibt sich:

$$(2.7)\quad Z[J]=N\exp\{-S_i[\tfrac{\delta}{\delta J(x)}]\}\exp\{\tfrac{1}{2}\big(J,\Delta_F(x_i-x_j)J\big)\}$$ (N ist hier ein Normierungsfaktor)

Von (2.7) kann man wieder Funktionableitungen bilden, die analog zu (1.14) sind. Man kann also Wick's Theorem auch auf die gestörten n-Punkt Funktionen anwenden...

Man schreibt die Exponenten dann als Reihe und fängt an die Ergebnisse zu interpretieren. Das Selbstwechselwirkende skalare Feld wird durch folgendes Potential dargestellt:

<u>3 Das ϕ^4 - Potential</u>

Man setzt das Potenial hier folgendermaßen an:

(3.1) $$V_I[\Phi] = \frac{g}{4!}\Phi(x)^4$$

(3.2) $$S_I = \tfrac{g}{4!}\int d^4x\Phi(x)^4$$

und entwickelt in Potenzen von g. g sollte also ein kleiner Faktor sein, damit die Reihe konvergiert, und man Terme höherer Ordung schnell vernachlässigen kann. Beispielsweise kann g der Hyperfeinstrukturkonstante α entsprechen. Der Wert von α ist ca. $\frac{1}{137}$, dessen Potenzen ziemlich schnell abfallen...

Schauen wir uns zunächst Zähler und Nenner von (2.4) getrennt an:

Der Zähler:

3.3

$$\text{Zähler von } G^{(n)}(x_1 \ldots x_n) = \int D\Phi\, \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\exp\{-S_o[\Phi]\}\exp\left\{-\tfrac{g}{4!}\int d^4z\Phi(z)^4\right\}$$

$$= \int D\Phi\, \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\exp\{-S_o[\Phi]\}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\tfrac{g}{4!}\int d^4z\Phi(z)^4\right)^k\right)$$

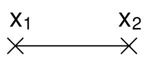
$$= \int D\Phi\, \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\exp\{-S_o[\Phi]\}\left(1-\tfrac{g}{4!}\int d^4z\Phi(z)^4 + \tfrac{g^2}{2\cdot(4!)^2}\int d^4z d^4u\Phi(z)^4\Phi(u)^4 + O(g^3)\right)$$

$$= \boxed{N(\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\rangle_0 - \tfrac{g}{4!}\int d^4z\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Phi(z)^4\rangle_0 + \tfrac{g^2}{2\cdot(4!)^2}\int d^4z d^4u\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Phi(z)^4\Phi(u)^4\rangle_0 + O(g^3))}$$

Dies ist das zu interpretierende Ergebnis bis O(g^2)

Die Notation $\langle abcd\rangle_0$ soll den Erwartungswert der Operatoren abcd im freien Feld ausdrücken.
Auf (3.3) kann man jetzt Wick's Theorem anwenden, was ich am Beispiel der 2-punkt und 4-punkt Funktion explizit durchführen will:

Der Zähler der 2-Punkt Greensfunktion:

(3.5) n=0 $\langle\Phi(x_1)\Phi(x_2)\rangle_0 = \Delta_F(x_1 - x_2) \Leftrightarrow$ 

(n=0 $\Leftrightarrow$ frei)

(3.6) n=1 $\Leftrightarrow -\tfrac{g}{4!}\int d^4z\langle\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(z)\Phi(z)\Phi(z)\Phi(z)\rangle_0$

Hier wenden wir Wick an, um bei 6 Argumenten (6-1)!!=1·3·5 = 15 Terme zu bekommen, die ich in folgender Tabelle dargestellt habe. Dabei sollen jeweils zwei Spalten die Argumente eines Feynman-Propagators bilden. Da $G_0^{(2)}$ nur von der Differenz seiner Argumente abhängt ist natürlich
$G_0^{(2)}(z,z) = \Delta_F(z-z) = \Delta_F(0)$
Anhand der Tabelle kann man Wicks Theorem für die 6-Punkt-Greensfunktion einmal explizit klarmachen. Ich bezeichne die vier z mit z_1 bis z_4 (auch Pointsplitting genannt):
Man sieht, daß jeweils die ersten drei Zeilen, sowie die letzten 12 äquivalent sind, weil $z_1=z_2=z_3=z_4=z$ ist.

x_1	x_2	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	x_2	z_1	z_3	z_2	z_4
x_1	x_2	z_1	z_4	z_2	z_3
x_1	z_1	x_2	z_2	z_3	z_4
x_1	z_1	x_2	z_3	z_2	z_4
x_1	z_1	x_2	z_4	z_2	z_3
x_1	z_2	x_2	z_3	z_1	z_4
x_1	z_2	x_2	z_1	z_3	z_4
x_1	z_2	x_2	z_4	z_2	z_3
x_1	z_3	x_2	z_1	z_2	z_4
x_1	z_3	x_2	z_2	z_1	z_4
x_1	z_3	x_2	z_4	z_1	z_2
x_1	z_4	x_2	z_1	z_2	z_3
x_1	z_4	x_2	z_2	z_1	z_3
x_1	z_4	x_2	z_3	z_1	z_2

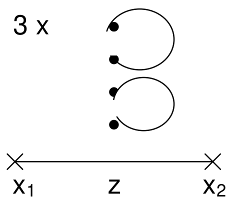
Damit wird (3.6) zu:

(3.7) n=1 $$-\tfrac{g}{4!}\int d^4z\Big(3\cdot\Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(0)\Delta_F(0)+4\cdot 3\cdot\Delta_F(x_1-z)\Delta_F(0)\Delta_F(z-x_2)\Big)$$

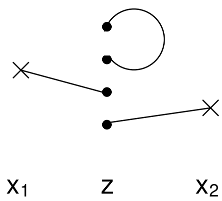
Das macht die 15 Summanden mit einem Produkt von 3 zwei-punktfunktionen (wie erwartet). Graphisch stellt man (3.7) dar, indem man jeder zweipunkt Funktion, die nur äußere Punkte enthält, wieder die oben eingeführte Grade zuordnet. Die Punkte z über die Integriert wird nennt man Vertizes. Sie stammen von dem Störpotential. Auf einen Vertex laufen in der ϕ^4-Theorie vier Linien zu. Δ_F(z-z=0) wird durch eine geschlossene Kurve dargestellt. Ich habe hier die vier z in (3.8) als unterschiedliche Punkte dargestellt. Da sie aber alle gleich sind werden sie in (3.9) „zusammengezogen".

Damit wird (3.7) $\Rightarrow$

(3.8) 3 x

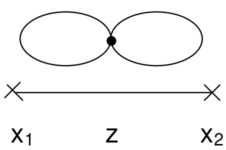


\+ 3 x 4 x

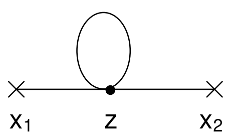


Um die Diagramme zu vereinfachen faßt man obiges folgendermaßen zusammen:

(3.9) 3 x



\+ 12 x



Somit ergibt sich für den Zähler bis zur 1. Ordnung in g:

(3.10)
$$\text{Zähler von } G^{(2)}(x_1,x_2)$$
$$=N\Big(\Delta_F(x_1-x_2)-\tfrac{1}{8}g\int d^4z\Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(0)^2-\tfrac{1}{2}\int d^4z\Delta_F(x_1-z)\Delta_F(0)\Delta_F(z-x_1)\Big)$$

Der Nenner

$$\text{Nenner von } G^{(n)}(x_1\ldots x_n)=\int D\Phi\exp\{-S_o[\Phi]\}\exp\Big\{-\tfrac{g}{4!}\int d^4z\Phi(z)^4\Big\}$$

(3.11): $$=\int D\Phi\exp\{-S_o[\Phi]\}\Big(1-\tfrac{g}{4!}\int d^4z\Phi(z)^4+\tfrac{g^2}{2\cdot(4!)^2}\int d^4zd^4u\Phi(z)^4\Phi(u)^4+O(g^3)\Big)$$

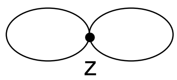
$$\boxed{=N\Big(1-\tfrac{g}{4!}\int d^4x\big\langle\Phi(x)^4\big\rangle_0+\tfrac{g^2}{2\cdot(4!)^2}\int d^4zd^4u\big\langle\Phi(z)^4\Phi(u)^4\big\rangle_0+O(g^3)\Big)}$$

Die Entwicklung des Nenners liefert folgende Beiträge:

n=0 N

n=1 $-\frac{g}{4!}\int d^4z\left\langle\Phi(z)\Phi(z)\Phi(z)\Phi(z)\right\rangle_0$ was laut Wick 3 Sumanden von jeweils einem produkt von Feynman-Propagatoren ist, also $3\cdot\Delta_F(0)^2$

Graphisch:

(3.12) 3 x 

n=2 $\frac{g^2}{2\cdot(4!)^2}\int d^4zd^4u\left\langle\left\langle\Phi(z)^4\,\Phi(u)^4\right\rangle\right\rangle_0$ Was laut Wick (8-1)!! =1·3·5·7 = 105 Summanden mit $\Delta_F(a-b)$ ist...

Die Terme des Nenners bilden die sogenannten Vakuumfluktuationen. Und die im Zähler entwickelten Terme müssen dadurch „geteilt“ werden. Der Graph (3.12) taucht auch in (3.9) auf und wie wir als nächstes sehen werden „kürzt“ er diesen Bestandteil von (3.9) weg. Die Normierung eleminiert also die Vakuumfluktuationen.

Die komplette Greensfunktion

entwickelt bis o(g^2) . Aus (3.3) und (3.11) folgt:

(3.13)

$$G^{(n)}(x_1\ldots x_n)=$$
$$\frac{\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right\rangle_0-\frac{g}{4!}\int d^4z\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Phi(z)^4\right\rangle_0+\frac{g^2}{2(4!)^2}\int d^4zd^4u\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Phi(z)\Phi(u)\right\rangle_0}{1-\frac{g}{4!}\int d^4z\left\langle\Phi(z)^4\right\rangle_0+\frac{g^2}{2(4!)^2}\int d^4zd^4u\left\langle\Phi(z)^4\,\Phi(u)^4\right\rangle_0}$$

Taylorentwicklung für kleine g: $f(g)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial g^k}(g=0)g^k$ bis ordnung g^2

(3.14)

$$G^{(n)}(x_1\ldots x_n)\approx f(g=0)+f'(g=0)\cdot g+\tfrac{1}{2}f''(g=0)g^2$$
$$=\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right\rangle_0+g\cdot\left(\left(-\tfrac{1}{4!}\int d^4z\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Phi(z)^4\right\rangle_0\right)+\tfrac{1}{4!}\int d^4z\left(\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right\rangle_0\cdot\left\langle\Phi(z)^4\right\rangle_0\right)\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}g^2\left(\left(\tfrac{1}{(4!)^2}\int d^4zd^4u\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Phi(z)^4\,\Phi(u)^4\right\rangle_0\right)-\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right\rangle_0\tfrac{1}{(4!)^2}\int d^4zd^4u\left\langle\Phi(z)^4\,\Phi(u)^4\right\rangle_0\right)$$
$$+O(g^3)$$
$$\boxed{\begin{aligned}&=\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right\rangle_0-\tfrac{g}{4!}\int d^4z\left(\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Phi(z)^4\right\rangle_0-\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right\rangle_0\cdot\left\langle\Phi(z)^4\right\rangle_0\right)\\&+\tfrac{g^2}{2(4!)^2}\int d^4zd^4u\left(\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Phi(z)^4\,\Phi(u)^4\right\rangle_0-\left\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right\rangle_0\left\langle\Phi(z)^4\,\Phi(u)^4\right\rangle_0\right)+O(g^3)\end{aligned}}$$

Diese in g entwickelte Greensfunktion will ich jetzt für $G^{(2)}(x_1,x_2)$ bis zur ersten Ordnung aufschreiben und mit den obigen Graphen vergleichen:

Die 2-punkt Greensfunktion

In der ersten Ordnung

(3.15)
$$\begin{aligned}&G^{(2)}(x_1,x_2)\\&\approx\left\langle\Phi(x_1)\Phi(x_2)\right\rangle_0-\tfrac{g}{4!}\int(d^4z\left\langle\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(z)^4\right\rangle-\left\langle\Phi(x_1)\Phi(x_2)\right\rangle\cdot\left\langle\Phi(z)^4\right\rangle)\end{aligned}$$

In der ersten Ordnung erwarten wir somit: (6-1)!!-(4-1)!! = 15-3=12 Terme, was wir gleich explizit sehen werden:

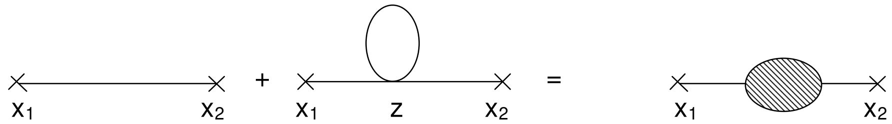
Es ergibt sich bis zur ersten Ordnung indem (3.7) benutzt wird:

(3.16)
$$= \Delta_F(x_1 - x_2) - \tfrac{g}{8}\left(\int d^4 z(\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(0)^2 + 4\Delta_F(x_1 - z)\Delta_F(0)\Delta_F(z - x_1) - \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(0)^2)\right)$$

Man sieht deutlich wie sich die beiden Terme mit den Vakuumfluktuationen $(\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(0)^2)$ aufheben. Damit ergibt die erste Ordnung:

(3.17) $G^{(2)}(x_1, x_2) = \Delta_F(x_1 - x_2) - \tfrac{g}{2}\left(\int d^4 z(\Delta_F(x_1 - z)\Delta_F(0)\Delta_F(z - x_2)\right)$

Terme im Zähler die Vakuumfluktuationen haben, werden durch den Nenner rausgekürzt. Vakuumfluktiationen sind Graphen die Teilgraphen besitzen die komplett von den äußeren Punkten getrennt sind.
Die Graphische Darstellung von (3.17) sieht folgendermaßen aus:



Der letzte Graph ist nur eine Zusammenfassung der ersten beiden, um Übersicht zu bewaren.
Vegleicht man das Ergebnis mit den Einzelbeiträgen (3.9) und (3.12) so sieht man, daß der Vakuumgraph bei der expliziten Komplettdarstellung von $G^{(n)}(x_1,x_2)$ bis zur ersten Ordnung in g fehlt...
Man kann folgendes Theorem aufstellen:

(3.18) $$G_g^{(n)}(x_1 \ldots x_n) = \frac{\left(\sum \text{Vakuumfluktuationen bis O(g)}\right)\left(\sum \text{Verbundene Graphen bis O(g)}\right)}{\sum \text{Vakuumfluktuationen bis O(g)}}$$

Verbundene Graphen sind solche, bei denen alle Komponenten mit den äußeren Punkten Verbunden sind.
Wir hatten 15 Terme als wir die erste Ordnung der 2-Punktfunktion ausrechnen wollten. Will man die zweite Ordung betrachten, so kommt man auf (2+4+4-1)!!= 945 Summanden im Zähler (von denen viele gleich sind) und (4+4-1)!! 105 Vakuumfluktuationen, die abgezogen werden müssen. Um dieses nicht tuen zu müssen kommen wir jetzt zu den Feynman-Regeln im Ortsraum:

4. Feynman-Regeln

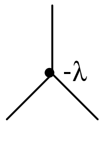
Im Ortsraum:

1. Jedem inneren Punkt (Vertex) wird der Kopplungsfaktor zugeordnet. Hier -g
2. Jeder Linie die zwei Punkte $\{x_i,x_j\}$ verbindet wird $\Delta_F(x_i-x_j)$ zugeordnet.
3. Jedem Graph wird ein Symmetriefaktor zugeordnet
4. Es wird über alle innere Punkte z_i integriert : $\int d^4 z_i$

Zu 1:

Ein Vertex in der $\frac{g}{4!}\Phi^4$ Theorie sieht also folgendermaßen aus:

Der Vertex der $\frac{\lambda}{3!}\Phi^3$ Störung wird so dargestellt:

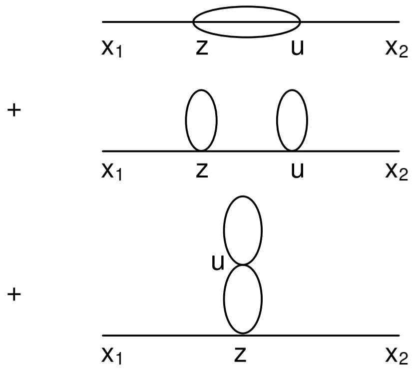


Schauen wir uns die zweite Ordnung von $G^{(2)}(x_1,x_2)$ an:

(4.1) $\frac{g^2}{2(4!)^2}\int d^4 z d^4 u\left(\left\langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(z)^4\Phi(u)^4\right\rangle - \left\langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\right\rangle_0 \left\langle \Phi(z)^4\Phi(u)^4\right\rangle\right)$

Wir haben also 2 externe Punkte (x_1,x_2) und ein mal die Vertizes z, bzw. u.:
In der ϕ^4 Theorie laufen auf einen Vertex vier Graden zu. Um alle Möglichkeiten zu erhalten, malt man die beiden externen Punkte, von denen die Graden ausgehen. Auf einen Vertex laufen in der ϕ^4 Theorie 4 Graphen zu. Folglich stellt man die beiden Vertizes z und u durch kleine Kreuze dar und stellt alle Möglichen Kombinationen der Vorhandenen Punkte mit den entsprechenden Verbindungslinien auf. Die Vakuumfluktuationen läßt man dabei außen vor:

(4.2)



Für den Symmetriefaktor des ersten Summanden stellt man folgende Überlegung an: $\phi(x_1)$ kann mit allen 8 ϕ's der WW-Terme assoziert werden. Dann bleibt für $\phi(x_2)$ noch 4 mal das „andere" WW-Feld über. Es sind noch jeweils 3 nicht benutzte Felder über, die miteinander gepaart werden können. Das macht nochmal 3!. Daraus ergibt sich folgender Symmetriefaktor:

(4.3) $\frac{1}{2(4!)^2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3! = \frac{1}{6}$

Nach Feynman's Regeln entspricht (4.2) dem Ausdruck (4.1). (4.2) kann folgendermaßen „gelesen" werden: (a,b sind Symmetriefaktoren)

$$\begin{aligned} &g^2 \int d^4 z d^4 u (\tfrac{1}{6} \left\langle \Delta_F(x_1 - z) \Delta_F(z-u)^3 \Delta_F(u - x_2) \right\rangle \\ &\qquad + a \left\langle \Delta_F(x_1 - z) \Delta_F(0) \Delta_F(z-u) \Delta_F(0) \Delta_F(u - x_2) \right\rangle \\ &\qquad + b \left\langle \Delta_F(x_1 - z) \Delta_F(z-u) \right\rangle \Delta_F(0) \Delta_F(u - z) \Delta_F(u - x_2)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Das ist also Der zweite Term der Störungsreihe der 2-Punkt Greensfunktion, abgesehen von Symmetriefaktoren..

5 Die 4-Punkt Greensfunktion

bis Ordnung g=1 haben wir also aus (3.14)

(5.1) $G_1^{(4)}(\Phi(x_1)..\Phi(x_4)) =$

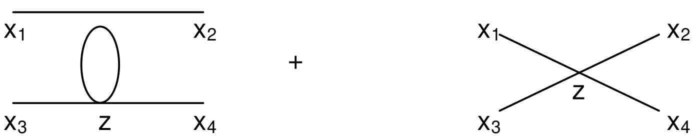
$$\left\langle \Phi(x_1)...\Phi(x_4) \right\rangle_0 - \tfrac{g}{4!} \int d^4 z \left(\left\langle \Phi(x_1)...\Phi(x_4) \Phi(z)^4 \right\rangle_0 - \left\langle \Phi(x_1)...\Phi(x_4) \right\rangle_0 \cdot \left\langle \Phi(z)^4 \right\rangle_0 \right)$$

Der erste Term ergibt die freie 4-Punktgreensfunkion, wie ich sie schon auf Seite vier graphisch und anylitisch dargestellt habe...

Terme in O(g):

Wir haben 4 externe Punkte x_1 bis x_4 und den Vertex z, was zwei mögliche Feynman Graphen ergibt:

(5.2)



(Bem.: Der erste Summand läßt sich als Produkt zweier Bestandteile schreiben. Beide sind mit den Endpunkten verbunden und deshalb keine Vakuumfluktuation)

Die Graphen (5.2) sind dann äquivalent mit (a,b sind Symmetrie Faktoren)

$$\begin{aligned} &- g \int d^4 z (a \left\langle \Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_z) \Delta_F(0) \Delta_F(z - x_4) \right\rangle_0 \\ &+ b \left\langle \Delta_F(x_1 - z) \Delta_F(x_2 - z) \Delta_F(x_3 - z) \Delta_F(x_4 - z) \right\rangle_0) \end{aligned}$$

6 Die Feynman Regeln im Impulsraum

Die Greensfunktion im Impulsraum ist definiert durch die Fouriertransformierte der Greensfunktion im Ortsraum. Wir definieren die Funktion $\tilde{G}^{(n)}(p_1 \ldots p_n)$ durch

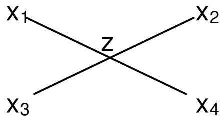
(6.1) $G^{(n)}(x_1 \ldots x_n) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \ldots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \exp[-ip_1 x_1] \ldots \exp[-ip_n x_n] \tilde{G}^{(n)}(p_1 \ldots p_n)$

Betrachten wir die 2-Punktgreensfunktion im Ortsraum:

$\Delta_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \exp[-ip(x_1 - x_2)]$, so erhalten wir

(6.2) $\tilde{G}_0^{(2)}(p_1, p_2) = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) \frac{1}{p^2 + m^2} = \tilde{G}_0^{(2)}(p)$

Um nicht gleich null zu sein muß $p_1 = -p_1 = p$ sein.
Betrachten wir jetzt ein Produkt von 2-Punktgreensfunktionen, z.B. der 2. Teil des Graphen (5.2):



Der analytische Ausdruck hierfür lautet:

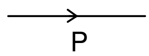
(6.3) $\int d^4 z \Delta_F(x_1 - z) \Delta_F(x_2 - z) \Delta_F(x_3 - z) \Delta_F(x_4 - z)$

Die Impulsraumamplitude hierfür sieht dann folgendermaßen aus:

(6.4) $(2\pi)^4 \delta\left(\sum_{i=1}^{4} p_i\right) \prod_{i=1}^{4} \frac{1}{p_i^2 + m^2}$

Dies soll nur kurz veranschaulichen, wie sich diese einfachen Greensfunktionen in den Impulsraum transformieren.
In der Deltafunktion drückt sich explizit die Impulserhaltung aus. Ist dieser nicht erhalten wären die entsprechenden Greensfunktionen null.
Graphisch drückt man (6.2) dann so aus:

(6.5) $\Delta_F(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \quad \Leftrightarrow$

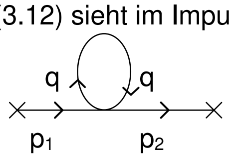


Die Gleichung (6.5) gibt die Amplitude an, mit der ein Teilchen mit Masse m^2 und Impuls P propagiert.

Regeln im Impulsraum

1. Jedem vertex wird der Faktor -g zugeordnet
2. Einer inneren Linie, mit Impuls k wird $\frac{1}{k^2 + m^2}$ zugeordnet.
3. Einer äußeren Linie, mit äußerem Impuls p wird $\frac{1}{p^2 + m^2}$ zugeordnet.
4. Jedem Graph wird ein Symmetriefaktor zugeordnet.
5. An jedem Vertex werden aufgrund der Impulserhaltung so viele Impulsvariablen wie möglich durch die äußeren Impulse ausgedrückt. Über danach noch übrigbleibende Impulsvariablen wird mit dem Maß $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ integriert. Man bezeichnet diese als Schleifenimpulse.

Die Form der Graphen ist im Impulsraum dieselbe. Zwischen den Punkten werden die fließenden Impulse angezeigt.
Beispiel: Der zweite Term von (3.12) sieht im Impulsraum so aus:



Und schreibt sich nach Feynman's Regeln:

(6.4) $-\frac{g}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + q - q) \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2}$

Demnach ist die schleife eine innere Linie...

7 Das ϕ^3 - Potential

(7.1) $$V_I[\Phi] = \frac{\lambda}{3!}\Phi(x)^3$$

(7.2) $$S_I = \tfrac{\lambda}{3!}\int d^4x\Phi(x)^3$$

Diese Wirkung gefällt uns nicht, da sie den Exponenten (exp[-S_I]) divergieren läßt. Wir beschränken uns daher auf positive Felder ϕ.
Die Gleichung (3.14) verändert sich zu:
(7.3)

$$G^{(n)}(x_1..x_n) = \left\langle \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right\rangle_0 - \tfrac{\lambda}{3!}\int (d^4z\left\langle \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Phi(z)^3\right\rangle - \left\langle \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right\rangle \cdot \left\langle \Phi(z)^3\right\rangle)$$

$$+\tfrac{\lambda^2}{2(3!)^2}\int d^4zd^4u\left(\left\langle \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Phi(z)^3\Phi(u)^3\right\rangle - \left\langle \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right\rangle_0\left\langle \Phi(z)^3\Phi(u)^3\right\rangle + O(\lambda^3)\right)$$

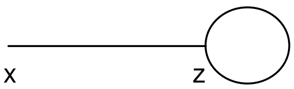
In der nullten Ordnung ergibt das wieder

(7.4) $$G^{(n)}(x_1..x_n) = \left\langle \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\right\rangle_0$$

In der ersten Ordnung sehen wir worin sich die ϕ^3 - Theorie von der ϕ^4 Theorie unterscheidet. Ich verwende zur Illustration die $G^{(1)}$ und $G^{(3)}$ Funktionen.

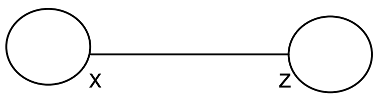
(7.5) $$G^{(1)}(x) = -\tfrac{3\lambda}{3!}\int d^4z\Delta_F(x-z)\Delta_F(0)$$

Der Zweite Term fällt weg, da <ϕ> =0 ist
Auf einen Vertex in der ϕ^3 - Theorie laufen 3 Linien zu. Hier haben wir also eine äußeren Punkt sowie eine Vertex. Die Graphische Darstellung sieht folgendermaßen aus:

(7.6)


In der zweiten Ordnung haben wir einen äußeren Punkt und 2 Vertizes:

(7.7) $$\tfrac{\lambda^2}{2(3!)^2}\int d^4zd^4u\left(\left\langle \Phi(x_1)\Phi(z)^3\Phi(u)^3\right\rangle - \left\langle \Phi(x_1)\right\rangle_0\left\langle \Phi(z)^3\Phi(u)^3\right\rangle_0\right)$$

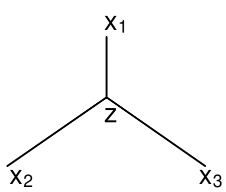
(7.8)


Was also folgende Ausdruck geben muß:

(7.9) $$\lambda^2\int d^4zd^4u\left(a\Delta_F(0)\Delta_F(x-z)\Delta_F(0)\right)$$

$$G^{(3)}(x_1,x_2,x_3) = -\tfrac{\lambda}{3!}\int d^4z\left(\left\langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(z)^3\right\rangle - \left\langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\right\rangle\left\langle \Phi(z)^3\right\rangle\right)$$

Hier haben wir drei äußere Punkte sowie einen Vertex:
Graphisch

(7.7)


Von dem Graph zurück auf die analytische Darstellung:

$$-\lambda\int d^4z\left(a\Delta_F(x_1-z)\Delta_F(x_2-z)\Delta_F(x_3-z)\right)$$

Bem.: Der zweite Teil von (7.9) ist gleich null, da $\left\langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\right\rangle$ natürlich null ist.

■

Literaturverzeichnis:

Michel Le Bellac, Quantum and Statistical Field Theory, Clarendon Press, Oxford
Taichiro Kugo, Eichtheorie, Springer
Pierre Ramond, Field Theory: A modern Primer, Addison Wesley
István Montvay, Gernot Münster, Quantum Fields on a Lattice
J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Clarendon Press, Oxford