Seminarvortrag: Das freie skalare Feld

von Andreas Wielenberg
am 22.04 1998

Seminar über Teilchen- und Kernphysik, SS 1998
G. Münster, M. Stingl, A. Weiguny

1. Das Gaußsche Integral

Wir hatten bei der Berechnung des Propagators für das freie Teilchen schon das Gaußsche Integral

$$1.1 \quad \mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{T},\mathrm{y}) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{i}{2\pi\hbar}(t-T)p^2 + \frac{i}{\hbar}(x-y)p\right\}$$

für einen Freiheitsgrad kennengelernt. Dieses Integral ist vom allgemeinen Typ

$$1.2 \quad G(A,J) = \int dx_1 ... dx_N \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j + \sum_i J_i x_i\right\}$$

$$= \int dx_1 ... dx_N \exp\left\{-\frac{1}{2} X^T A X + JX\right\}$$

für reelle x_i und N Freiheitsgrade mit einer positiv definiten symmetrischen Matrix A und einer Quelle J. Uns stellt sich zunächst die Aufgabe dieses Integral zu berechnen. Dazu werden wir versuchen, das bekannte Gaußsche Integral

$$1.3 \quad G(a) = \int dx \exp\{-ax^2\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

zu verwenden. Offenbar können wir 1.2 mit Hilfe von 1.3 dann ausführen, wenn es uns gelingt, die Matrix A zu diagonalisieren. Wie aus der Algebra bekannt, ist A durch eine Rotation diagonalisierbar und außerdem invertierbar. Wir führen zunächst die Variablentransformation $Y=X-A^{-1}J$, um die Terme in X und J zu trennen. Da wir es mit einer Verschiebung zu tun haben, bleibt das Maß erhalten: $dx_1 ... dx_N = dy_1 ... dy_N$.

$$\int dx_1 ... dx_N \exp\left\{-\frac{1}{2} X^T A X + JX\right\}$$

$$= \int dy_1 ... dy_N \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(Y + A^{-1}J\right)^T A\left(Y + A^{-1}J\right) + J^T\left(Z + D^{-1}J\right)\right\}$$

$$= \int dy_1 ... dy_N \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(Y^T A Y + J^T Y + Y^T J + J^T A^{-1} J\right) + J^T Y + J^T A^{-1} J\right\}$$

$$= \int dy_1 ... dy_N \exp\left\{-\frac{1}{2} Y^T A Y\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} J^T A^{-1} J\right\}$$

Jetzt wenden wir die Rotation R an, die A diagonalisiert:
$D=RAR^T$, wobei $D \in diag(N)$ und mit $RY=Z$ und daher $dy_1 ... dy_N = dz_1 ... dz_N$ erhalten wir:

$$= \int dy_1 ... dy_N \exp\left\{-\frac{1}{2} Y^T R^T D R Y\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} J^T A^{-1} J\right\}$$

$$= \int dz_1 ... dz_N \exp\left\{-\frac{1}{2} Z^T D Z\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} J^T A^{-1} J\right\}.$$

Da D eine Diagonalmatrix ist, folgt:

$$1.4 \quad \mathrm{G}(\mathrm{A},\mathrm{J}) = \left(\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \int dz_i \exp\left\{-\frac{1}{2} D_{ii} z_i^2\right\}\right) \exp\left\{\frac{1}{2} J^T A^{-1} J\right\}.$$

Mit 1.3 und wegen $\prod_{i=1}^{N} D_{ii} = \det D = \det A$ erhalten wir als Endergebnis:

$$1.5 \quad \mathrm{G}(\mathrm{A},\mathrm{J}) = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det \mathrm{A}}} \exp\left\{\frac{1}{2} J^T A^{-1} J\right\}.$$

Ebenso beweist man für Paare konjugiert komplexer Variablen und positiv definite hermitesche Matrizen H:

$$1.6 \quad G(H,J) = \int dx_1^* dx_1 ... dx_N^* dx_N \exp\left\{-x_i^* H_{ij} x_j + J_i^* x_i + J_i x_i^*\right\}$$

$$= \frac{(2\pi i)^N}{\det H} \exp\left\{J^* H^{-1} J\right\}$$

Wir können nun noch den Übergang von endlich vielen Freiheitsgraden zu unendlich vielen machen, indem wir die Variable x_i durch das Feld $\Phi(x)$ ($x_i \to \Phi(x)$) ersetzen. Um ein konvergentes Ergebnis zu erhalten, müssen wir das richtige Maß benützen und den vorher unterdrückten Faktor 2π wieder in das Integral schreiben. Wir erhalten dann die Formeln:

1.7 $$G(A,J) = \int \prod_x \frac{d\Phi(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Phi A \Phi + J\Phi\right\} = \int \mathfrak{D}\Phi \exp\left\{-\frac{1}{2}\Phi A \Phi + J\Phi\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \exp\left\{\frac{1}{2} J A^{-1} J\right\}$$

und

1.8 $$G(H, J^*, J) = \int \prod_x \frac{d\Phi^*(x) d\Phi(x)}{2\pi i} \exp\left\{-\Phi^* H \Phi + J^* \Phi + J \Phi^*\right\}$$
$$= \int \mathfrak{D}(\Phi^*, \Phi) \exp\left\{-\Phi^* H \Phi + J^* \Phi + J \Phi^*\right\}$$
$$= \frac{1}{\det H} \exp\left\{J^* H^{-1} J\right\}$$

Beide Formeln werden uns beim Lösen von Pfadintegralen helfen.

2. Funktionalableitungen

Für die weitere Formulierung der Feldtheorie wird sich die Funktionalableitung als wichtiges Hilfsmittel erweisen. Die Funktionalableitung ist die Übertragung der bekannten Ableitung in den Funktionenraum und wird wie folgt definiert.

Sei F ein Funktional auf dem Funktionenraum $\mathcal{C}$, $F : \mathcal{C} \to \Re$. Dann definiert man die Funktionalableitung $\frac{\delta}{\delta f(x)}$ für $f \in \mathcal{C}$ durch:

2.1 $$\frac{\delta}{\delta f(x)}\left(F_1(f) + F_2(f)\right) = \frac{\delta}{\delta f(x)} F_1(f) + \frac{\delta}{\delta f(x)} F_2(f)$$

2.2 $$\frac{\delta}{\delta f(x)}\left(F_1(f) F_2(f)\right) = F_1(f) \frac{\delta}{\delta f(x)} F_2(f) + F_2(f) \frac{\delta}{\delta f(x)} F_1(f)$$

2.3 $$\frac{\delta}{\delta f(x)} G(F(f)) = \frac{\delta G(F)}{\delta F(f)} \cdot \frac{\delta F(f)}{\delta f(x)}$$

und

2.4 $$\frac{\delta}{\delta f(y)} f(x) = \delta(x-y).$$

Man kann sich dann noch vor Augen führen, daß diese Ableitungsvorschrift sich auch aus

2.5 $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(f + \varepsilon\varphi) - F(f)}{\varepsilon} = \int d^n x \varphi(x) \frac{\delta}{\delta f(x)} F(f)$$

für alle (beschränkten) Funktionen $f, \varphi \in \mathcal{C} : I \to \Re^n$ gewinnen ließe.

3. Das Wicksche Theorem

Wir werden uns nun für Gaußsche Integrale der Form

3.1 $$G\left(A, x_{l_1} \ldots x_{l_k}\right) = \int \mathfrak{D}X \, x_{l_1} \ldots x_{l_k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j\right\}$$

interessieren.

Die oben entwickelte Technik der Funktionalableitungen erlaubt uns dieses Integral folgendermaßen zu schreiben, wobei wir den kontinuierlichen Fall immer implizit mit betrachten:

$$3.2 \quad G(A, x_{l_1} \ldots x_{l_k}) = \frac{\delta}{\delta J_1} \ldots \frac{\delta}{\delta J_k} \int \mathcal{D}X \, \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j + \sum_i J_i x_i \right\}\Bigg|_{J=0}$$

mit $\frac{\delta}{\delta J_n} = \frac{\delta}{\delta J(x_{l_n})}$ für kontinuierlichen und $\frac{\delta}{\delta J_n} = \frac{\partial}{\partial J_{l_n}}$ für endlich viele Indizes. Mit 1.5 erhalten wir:

$$3.3 \quad \mathrm{G}(\mathrm{A}, x_{l_1} \ldots x_{l_k}) = N(A) \frac{\delta}{\delta J_1} \ldots \frac{\delta}{\delta J_k} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_i A_{ij}^{-1} J_j \right\}\Bigg|_{J=0}$$

Um die Korrelationsfunktionen zu finden, betrachtet man:

$$3.4 \quad \left\langle x_{l_1} \ldots x_{l_k} \right\rangle = \frac{1}{N(A)} G\left(A, x_{l_1} \ldots x_{l_k}\right) = \frac{\delta}{\delta J_1} \ldots \frac{\delta}{\delta J_k} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_i A_{ij}^{-1} J_j \right\}\Bigg|_{J=0} .$$

Damit erhält man zum Beispiel für k=1:

$$3.5 \quad \left\langle x_1 \right\rangle \underset{A^T = A}{=} \sum_i J_i A_{1i}^{-1} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_i A_{ij}^{-1} J_j \right\}\Bigg|_{J=0} = 0.$$

Man beachte, daß die ½ aus dem Exponenten durch die Differentiation verschwindet. Für k=2 erhält man:

$$3.6 \quad \left\langle x_1 x_2 \right\rangle = \left(A_{12}^{-1} + \sum_i \sum_j J_i A_{1i}^{-1} J_j A_{2j}^{-1} \right) \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_i A_{ij}^{-1} J_j \right\}\Bigg|_{J=0} = A_{12}^{-1} .$$

Im kontinuierlichen Grenzfall bedeutet A_{12}^{-1} natürlich $A^{-1}(x_1, x_2)$. Für k=3:

$$\begin{aligned} 3.7 \quad \left\langle \mathrm{x}_1 \mathrm{x}_2 \mathrm{x}_3 \right\rangle &= \left(A_{12}^{-1} \sum_i J_i A_{3i}^{-1} + A_{13}^{-1} \sum_j J_j A_{2j}^{-1} + A_{23}^{-1} \sum_i J_i A_{1i}^{-1} + \sum_{ijl} J_i A_{1i}^{-1} J_j A_{2j}^{-1} J_l A_{3l}^{-1} \right) \\ &\quad \times \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_i A_{ij}^{-1} J_j \right\}\Bigg|_{J=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit wird dann für k=4 das folgende Ergebnis plausibel:

$$3.8 \quad \left\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \right\rangle = \left(A_{12}^{-1} A_{34}^{-1} + A_{13}^{-1} A_{24}^{-1} + A_{23}^{-1} A_{14}^{-1} \right).$$

Induktiv erhalten wir so das Wicksche Theorem für Gaußintegrale:

$$3.9 \quad \left\langle x_1 \ldots x_k \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für k ungerade} \\ \displaystyle\sum_{\substack{\text{alle verschiedenen} \\ \text{Paarungen}}} \mathrm{A}_{\sigma(1)\sigma(2)}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_{\sigma(k-1)\sigma(k)}^{-1} & \text{für k gerade} \end{cases} .$$

Dieses Theorem gibt es auch im Zusammenhang mit Operatoren. Wir verweisen auf den Anhang.

4. Die Klein – Gordon – Gleichung

Da die klassische Quantenmechanik nicht kovariant formuliert ist, stellt sich uns zunächst die Aufgabe, das kovariante Äquivalent der freien Schrödingergleichung zu finden. Mit dem Viererimpuls

$$4.1 \quad \mathrm{p}_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = \left(\frac{E}{c}, -p \right), \; g_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1),$$

folgt wegen

$$4.2 \quad \mathrm{p}^2 = \mathrm{p}_\mu \mathrm{p}^\mu = \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{c}^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \Rightarrow E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

über das Korrespondenzprinzip

$$4.3 \quad -\hbar^2 \partial_0 \partial^0 \Psi = \left(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4 \right) \Psi \text{ mit } \nabla^2 = -\partial_k \partial^k, \mathrm{k} = 1, 2, 3 .$$

Geht man nun noch zu natürlichen Einheiten $\hbar = 1, c = 1$ über, so erhält man die übliche Form der Klein – Gordon – Gleichung:

4.4 $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Psi = 0$.

Diese beschreibt die freie Bewegung spinloser Teilchen (Mesonen) der Masse m². Hierbei ist Ψ eine skalare Funktion und man unterscheidet zwei Fälle: Ist Ψ reell, so trägt das Teilchen keine Ladung , für komplexe Ψ ist eine Ladung dagegen erlaubt. Wir behandeln im weiteren nur das reelle skalare Feld.

5. Relativistische Formulierung der Feldtheorie

Analog zur klassischen (Punkt-) Mechanik wird die Lagrange-Funktion auch für ein Feld Φ definiert. Darüber gelangt man zur Lagrange–Dichte

5.1 $L(x^0) = \int d^3x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$.

Damit kann man das Wirkungsintergral besonders einfach definieren:

5.2 $S = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - V(\Phi) \right)$

Aus dem Variationsprinzip $\delta S = 0$ mit den Nebenbedingungen $\delta x^\mu = 0, \delta\Phi(x_1^0, \mathbf{x}) = \delta\Phi(x_2^0, \mathbf{x}) = 0$ erhält man wiederum die Euler-Lagrange-Gleichungen für Φ:

5.3 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = 0.$

Das zu Φ konjugierte Impuls-Feld lautet dann

5.4 $\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi(x))}$

und man erhält die Hamiltondichte

5.5 $\mathcal{H}(x) = \pi(x)\partial_0\Phi(x) - \mathcal{L}(\Phi, \partial_0\Phi)$.

Das freie skalare Feld hat die Lagrange-Dichte

5.6 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2\Phi^2\right)$

Und somit gilt

5.7 $\pi = \partial_0 \Phi$

und

5.8 $\mathcal{H} = \pi\partial\Phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_0\Phi\partial^0\Phi - \partial_k\Phi\partial^k\Phi + m^2\Phi^2\right) = \frac{1}{2}\left(\pi^2 + (\nabla\Phi)^2 + m^2\Phi^2\right)$

Wegen $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -m^2\Phi$ und $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = \partial_\mu \partial^\mu \Phi$ folgt mit den Euler – Lagrange - Gleichungen für das freie skalare Feld aus 5.6:

5.9 $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi = 0$.

Dies hätten wir aus 5.6 auch anders erhalten können: partielle Integration liefert:

5.10 $S = \int d^4x \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^2\right) = \underbrace{\oint dS \frac{1}{2}\Phi\partial^\mu\Phi}_{=0} - \int d^4x \frac{1}{2}\left(\Phi\partial_\mu\partial^\mu\Phi + m^2\Phi^2\right)$

$$= \int d^4x \frac{1}{2}(\Phi\underbrace{\left(\partial_\mu\partial^\mu\Phi + m^2\right)}_{\hat{=} A \text{ aus } 1.2}\Phi)$$

Aus der Stationarität der Wirkung folgt wiederum 5.9. Das Oberflächenintegral verschwindet, wenn wir die physikalische Randbedingung an die Felder stellen, daß sie und ihre Ableitungen im Unendlichen hinreichen rasch verschwinden.

Wir können damit das freie skalare Feld und die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung identifizieren.

6. Der Übergang von Quantenmechanik zu Feldtheorie

Mit den Mitteln der Quantenmechanik hatten wir folgende Formel für die Zeitentwicklung gefunden:

$$6.1\quad \langle q'_t | G(t,T) | q_T \rangle = \int_q^{q'} \int \mathfrak{D}q \mathfrak{D}p \exp\left\{ i \int_T^t d\tau \left(p \frac{dq}{d\tau} - H(p,x) \right) \right\}$$

$$= \int_g^{q'} \mathfrak{D}q \exp\left\{ i \int_T^t d\tau L(q, \partial_\mu q) \right\}.$$

Anmerkung zur Notation: Im folgenden werden wir für die Übergangsamplitude $\langle q' | G(t,T) | q \rangle$ verkürzend $\langle q'_t | q_T \rangle$ schreiben. (Wechsel vom Schrödinger- ins Heisenbergbild)

Uns stellt sich jetzt die Aufgabe, 6.1 in die Feldtheorie hinüberzuretten.
Bei der Herleitung von Formel 6.1 wurde vor allem folgende Formel benützt:

$$6.2\quad \mathbf{1} = \int |q\rangle\langle q| .$$

In dem Gaußschen Integral

$$6.3\quad \delta_{ij} = \frac{2}{(\sqrt{\pi})^n} \int \prod_{l=1}^n dx_l (x_i x_j) \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$$

ersetzen wir die Variable x_i durch die Funktion $\Psi(x)$, hier als diskretisierte Zahl begriffen.
Dann erhalten wir folgenden Ausdruck für eine $\mathbf{1}$:

$$6.3\quad \delta_{xy} \sim \int \prod_z d\Psi_z \prod_{z'} d\Psi_{z'}^* \Psi_x^* \Psi_y \exp\left(-\sum_z \Psi_z^* \Psi_z \right).$$

Machen wir nun vollends den Übergang zu Funktionen Ψ, so erhalten wir mit $\mathfrak{D}(\Psi, \Psi^*) = \prod_z d\Psi_z d\Psi_z^*$:

$$6.4\quad \delta(x-y) = \int \mathfrak{D}(\Psi, \Psi^*) \Psi^*(x) \Psi(y) \exp\left(-\int \mathfrak{D}x |\Psi(x)|^2 \right).$$

Schreibt man nun wie in der Quantenmechanik statt Ψ den Ket $|\Psi\rangle$ $\left(\Rightarrow \Psi(x) = \langle x | \Psi \rangle\right)$, so gilt:

$$6.5\quad \mathbf{1} = \int \mathfrak{D}^2\Psi |\Psi\rangle \exp\left(-\langle \Psi | \Psi \rangle \right) \langle \Psi |$$

Damit muß man nun alle Schritte, die zum Pfadintegral führten, wiederholen und erhält für den Übergang:

$$6.6\quad \langle q'_t | q_T \rangle = \int_q^{q'} \mathfrak{D}q \exp\left(i \int_T^t d\tau L(\tau) \right) \rightarrow \langle \Psi(x) | \Psi(y) \rangle = \int \mathfrak{D}(\Psi, \Psi^*) \Psi^*(x) \Psi(y) \exp\left(i \int_{y^0}^{x^0} d\tau L(\tau) \right)$$

Vergleiche dies mit 3.1. Um zur Berechnung von Korrelationsfunktionen auf die Ergebnisse aus Kapitel 3 zurückgreifen zu können, definieren wir als erzeugendes Funktional

$$6.7\quad W(J) = N \int \mathfrak{D}\Phi \exp\left\{ i \int d^4x \left(\mathfrak{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) + J\Phi \right) \right\}$$

Mit der Normierungskonstanten

$$6.8\quad N^{-1} = \int \mathfrak{D}\Phi \exp\{ iS_0 \} = \int \mathfrak{D}\Phi \exp\left\{ i \int d^4x \mathfrak{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \right\}.$$

Damit erreichen wir insbesondere W(0)=1. Ebenso verschwinden eventuelle unendliche Faktoren.

7. Das freie skalare Feld in Pfadintegralbehandlung

Als erste Anwendung des Pfadintegralformalismus werden wir das freie skalare Feld behandeln und dessen Propagatoren herleiten, d.h. die Korrelationsfunktion $\langle \Phi(x_1) \Phi(x_2) \rangle$ bestimmen. Wir werden dazu 6.7 benutzen. Mit 5.6 ergibt dies die Wirkung

$$7.1\quad S = \int d^4x \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \Phi(x) \partial^\mu \Phi(x) - m^2 \Phi^2(x) \right) + J(x)\Phi(x) .$$

Für J=0 ergibt sich offensichtlich wieder die Wirkung für das freie skalare Feld. Physikalisch entspricht dies dem freien skalaren Feld, das zusätzlich noch einer äußeren Quelle (einem Kraftfeld) unterliegt. Nun stellt sich noch das Problem, daß wir nicht wissen, welchen definierten (!) Zustand wir unserer Rechnung zu Grunde legen dürfen. Wir erhalten diesen über folgende Überlegung. Unter allen möglichen Zuständen muß es einen der geringsten Energie geben, den wir Grundzustand nennen und mit dem wir rechnen wollen. Wir werden daher 6.7 als die Zeitentwicklungsamplitude $\langle \Omega_{-\infty} | \Omega_{+\infty} \rangle_J$ für einen Grundzustand $| \Omega_{-\infty} \rangle$ für $t = -\infty$ in der Vergangenheit zu einem Grundzustand $| \Omega_{+\infty} \rangle$ für $t = +\infty$ für obige Wirkung betrachten. Zudem ist wegen 6.8 gewährleistet, daß die Zeitentwicklungsamplitude des ungestörten Grundzustandes gleich 1 ist, was mit den grundlegenden physikalischen Überlegungen übereinstimmt. Wir erhalten daher mit 7.1:

$$7.2 \quad \mathrm{W(J)} = N \int \mathcal{D}\Phi \exp\left\{ i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + J\Phi \right) \right\}.$$

Dies ist das zu lösende Pfadintegral. Leider ist der Integrand - da rein imaginär - oszillierend, und das Pfadintegral ist (mathematisch) nicht wohldefiniert. Um dem abzuhelfen und doch noch an eine Lösung zu gelangen, gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten:

1) Man schreibt einen Konvergenzfaktor $\exp\left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon \int d^4x \Phi^2 \right\}$, $\varepsilon \to +0$, in das Integral oder

2) transformiert in den euklidischen Raum, indem man $x_0 = -i\bar{x}_0$ und $d^4x = -i d^4\bar{x}$ setzt.

Wir werden hier zunächst die erste Möglichkeit weiter verfolgen und betrachten

$$7.3 \quad W(J) = N \int \mathcal{D}\Phi \exp\left\{ i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} \left(m^2 - i\varepsilon\right) \Phi^2 + J\Phi \right) \right\}.$$

Dies werden wir durch vierdimensionale Fourier-Transformation im Impuls-Raum lösen. Da die Wirkung translationsinvariant ist, wird der Operator aus 1.2 bzw. 5.10 dadurch diagonalisiert. Dazu definieren wir die vierdimensionale Fourier-Transformation durch

$$7.4 \quad \tilde{\mathrm{F}}(\mathrm{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4x}{(2\pi)^2} \exp\{-ip \cdot x\} F(x)$$

$$7.5 \quad \mathrm{F(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \exp\{ip \cdot x\} \tilde{F}(p)$$

$$7.6 \quad \delta^{(4)}(x - x') = \delta(x^0 - x^0{}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\{i(x - x') \cdot p\}$$

mit $x \cdot p = x^\mu g_{\mu\nu} p^\nu = x^0 p^0 - \mathbf{xp}$.

Der Exponent von 7.3 wird dann

$$i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} \left(m^2 - i\varepsilon\right) \Phi^2 + J\Phi \right)$$

$$= i \int d^4x \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^2} \partial_\mu e^{ip\cdot x} \tilde{\Phi}(p) \partial^\mu e^{ip'\cdot x} \tilde{\Phi}(p')$$

$$- \frac{1}{2}(m^2 - i\varepsilon) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^2} e^{i(p+p')\cdot x} \tilde{\Phi}(p) \tilde{\Phi}(p')$$

$$+ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^2} e^{i(p+p')\cdot x} \tilde{J}(p) \tilde{\Phi}(p')$$

$$\underset{\text{mit 7.6}}{=} i \int d^4p \, \frac{1}{2} \left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right) \tilde{\Phi}(p) \tilde{\Phi}(-p) + \tilde{J}(p) \tilde{\Phi}(-p)$$

Schreibt man dies mit $\tilde{\Phi}'(p) = \tilde{\Phi}(p) + \left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right)^{-1} \tilde{J}(p)$ um, so erhält man:

$$= i \int d^4p \frac{1}{2} \left(p^2 - m^2 - i\varepsilon\right) \left(\tilde{\Phi}'(p) - \left(p^2 - m^2 - i\varepsilon\right)^{-1} \tilde{J}(p) \right) \left(\tilde{\Phi}'(-p) - \left(p^2 - m^2 - i\varepsilon\right)^{-1} \tilde{J}(-p) \right)$$

$$+ \tilde{J}(p) \left(\tilde{\Phi}'(-p) - \left(p^2 - m^2 - i\varepsilon\right)^{-1} \tilde{J}(-p) \right)$$

$$= i\int d^4x \frac{1}{2}\left(\tilde{\Phi}'(p)\left(p^2 - m^2 - i\varepsilon\right)\tilde{\Phi}'(-p) - \tilde{J}(p)\tilde{\Phi}'(-p) - \tilde{\Phi}'(p)\tilde{J}(-p) + \frac{\tilde{J}(p)\tilde{J}(-p)}{p^2 - m^2 - i\varepsilon} \right.$$
$$\left. + \tilde{J}(p)\tilde{\Phi}'(-p) - \tilde{J}(p)\left(p^2 - m^2 - i\varepsilon\right)^{-1}\tilde{J}(-p). \right)$$

Weil $\tilde{J}(p)\tilde{\Phi}'(-p) = \tilde{\Phi}'(p)\tilde{J}(-p)$, wie sich aus der Rechnung ergibt, lautet das Endresultat unserer Umformungen:

$$= \frac{i}{2}\int d^4p\ \tilde{\Phi}'(p)\left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right)\tilde{\Phi}'(-p) - \tilde{J}(p)\left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right)^{-1}\tilde{J}(-p).$$

Damit haben wir die Terme in Φ und J separiert. Besonders angenehm ist, daß $\tilde{\Phi}'$ und $\tilde{\Phi}$ sich im Funktionenraum nur um eine Konstante unterscheiden und somit $\mathfrak{D}\tilde{\Phi} = \mathfrak{D}\tilde{\Phi}'$ ist. Damit haben wir:

$$7.7 \quad \mathrm{W}\left(\tilde{\mathrm{J}}\right) = A\exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4p \frac{\tilde{J}(p)\tilde{J}(-p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\right\}\exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4p\ \tilde{\Phi}'(p)\left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right)\tilde{\Phi}'(-p)\right\}.$$

Zurücktransformation des zweiten Faktors liefert:

$$7.8 \quad W(J) = A\exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4p \frac{\tilde{J}(p)\tilde{J}(-p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\right\}\int \mathfrak{D}\Phi \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x\left(\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - (m^2 - i\varepsilon)\Phi^2\right)\right\}$$
$$= W(0)\exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4p\tilde{J}(p)\left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right)^{-1}\tilde{J}(-p)\right\}.$$

Einsetzen der Fouriertransformierten von $\tilde{J}$ führt auf

$$\int d^4p\tilde{J}(p)\left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right)^{-1}\tilde{J}(-p) = \int dp\int dx\int \frac{dx'}{(2\pi)^4}\left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right)^{-1} e^{-i(x-x')\cdot p} J(x)J(x').$$

Es folgt

$$7.9 \quad \mathrm{W(J)} = W(0)\exp\left\{-\frac{i}{2}\iint d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)\Delta_F(x_1 - x_2)J(x_2)\right\}$$

mit dem Feynman-Propagator

$$7.10 \quad \Delta_\mathrm{F}(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right)^{-1} e^{-ip\cdot(x_1 - x_2)}.$$

Beachte hierbei $\varepsilon \to +0$. Wir wollen nun die Techniken aus Kapitel 3 benützen und damit die fundamentale Bedeutung des Feynman-Propagators erhellen. Wir erhalten die Korrelationsfunktionen (Greenschen Funktionen) des Feldes analog zu 3.4 durch:

$$7.11 \quad \left\langle \Phi(\mathrm{x}_1)...\Phi(x_k)\right\rangle = G^{(k)}(x_1,...,x_k) = \frac{1}{(i)^k}\frac{\delta}{\delta J_1}...\frac{\delta}{\delta J_k}W(J)\bigg|_{J=0}$$

Für die Korrelation des Feldes an zwei Orten erhält man daher:

$$7.12 \quad \left\langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\right\rangle = G^{(2)}(x_1, x_2) = -\frac{\delta}{\delta J_1}\frac{\delta}{\delta J_2}W(J)\bigg|_{J=0} = i\Delta_F(x_1 - x_2).$$

Der Feyman-Propagator ist also im Wesentlichen die Greensche Funktion des Feldes Φ, d.h.

$$7.13 \quad \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\Delta_F(x) = -\delta^{(4)}(x).$$

Mit dem Wickschen Theorem 3.9 können wir dann auch sofort kompliziertere Greensche Funktionen des Feldes berechnen, z.B.:

$$7.14 \quad G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = 0 \text{ und}$$

$$7.15 \quad G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \underset{3.9}{=} G^{(2)}(x_1, x_2)G^{(2)}(x_3, x_4) + G^{(2)}(x_1, x_3)G^{(2)}(x_2, x_4)$$
$$+ G^{(2)}(x_1, x_4)G^{(2)}(x_2, x_3).$$

Damit können wir nun endgültig eine physikalische Interpretation des Feynman-Propagators geben: Δ_F propagiert die Lösungen der Klein – Gordon – Gleichung. Man kann nun über die Betrachtung des Grenzwertparameters $i\varepsilon$ zeigen, daß Δ_F die Lösungen positiver Energie ($p^0>0$), die als Teilchenzustände interpretiert werden, in der Zeit vorwärts propagiert, während die Lösungen negativer Energie, die als

Antiteilchenzustände intepretiert werden, in der Zeit rückwärts (!) propagiert werden. Für das komplexe skalare Feld erhält man ohne große Umstände den gleichen Propagator. Wir dürfen daher $G^{(2)}(x,y)$ als die Zeitentwicklungsamplitude eines Teilchens (z.B. π^0-Meson) der Masse m^2 intepretieren, das von x nach y geht.

Nun verfolgen wir die zweite Möglichkeit weiter:
Die Transformation in den euklidischen Raum erfolgt durch $x_0 = -i\bar{x}_0$ und $d^4x = -id^4\bar{x}$, und es folgt $\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi = -\bar{\partial}_\mu\Phi\bar{\partial}_\mu\Phi$. Die euklidischen Variablen werden durch den Querstrich gekennzeichnet.
Wir erhalten als erzeugendes Funktional:

$$7.16\quad W_E(J) = N_E\int\mathcal{D}\Phi\exp\left\{-\int d^4\bar{x}\,\frac{1}{2}\bar{\partial}_\mu\Phi\bar{\partial}_\mu\Phi + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 - J\Phi\right\}$$

Die Übertragung unserer Ergebnisse aus Kapitel 1, insbesondere Formel 1.7, ermöglicht uns, da wir mit der oberen Rechnung praktischerweise auch das Inverse des Operators $\bar{\partial}_\mu\bar{\partial}_\mu + m^2$ bestimmen könnten, sofort die Lösung anzugeben:

$$7.17\quad W_E(J) = N_E\int\mathcal{D}\Phi\exp\left\{-\int d^4\bar{x}\,\frac{1}{2}\left(\bar{\partial}_\mu\Phi\bar{\partial}_\mu\Phi + m^2\Phi\right)\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}J_1(\bar{p}^2+m^2)^{-1}J_2\right\}$$

Damit erhalten wir als (euklidischen) Propagator

$$7.18\quad \Delta^E{}_F(x_1-x_2) = \int\frac{d^4\bar{p}}{(2\pi)^4}\left(\bar{p}^2+m^2\right)^{-1}e^{i\bar{p}\cdot(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}$$

Dabei haben wir uns die euklidische Fouriertransformation passend definiert. Wir haben jetzt allerdings noch das Problem, wie wir von der imaginären Zeit auf die Antwort für reelle Zeiten zurückschließen können. Die Antwort darauf liefert die sogenannte Wickrotation: Wir setzen 7.18 analytisch ins Imaginäre fort.

Da die Pole von $\left(\bar{p}^2+m^2\right)^{-1}$ auf der imaginären p^0-Achse liegen und dies für die weitere Diskussion unangenehm ist, betrachten wir statt dessen $\left(\bar{p}^2+m^2-i\varepsilon\right)^{-1}$.
Damit erhalten wir Pole bei

$$7.19\quad \bar{p}^2 = \bar{p}_0^2 + \bar{\mathbf{p}}^2 = -m^2 + i\varepsilon$$

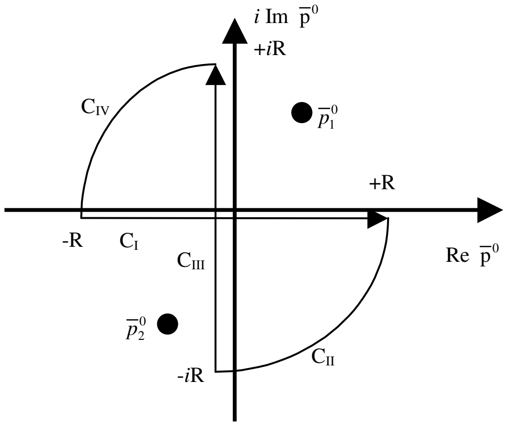
$$\Rightarrow \bar{p}^0_{1,2} \cong \pm i\sqrt{\bar{\mathbf{p}}^2+m^2} \pm \varepsilon,\ \text{mit}\ \varepsilon\to+0$$

Da die Pole außerhalb der geschlossenen Kontur
$C=C_I+C_{II}+C_{III}+C_{IV}$
liegen, gilt nach dem Residuensatz:

$$7.20\quad \oint_C d\bar{p}^0 f(\bar{p}^0) = 0$$

mit

$$f(\bar{p}^0) = \frac{\exp\{i\bar{p}^0(x_1^0-x_2^0) + i\bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2)\}}{\left(\bar{p}^{0\,2}+\bar{\mathbf{p}}^2+m^2-i\varepsilon\right)}$$



Integrationskontur in der komplexen $\bar{p}^0$-Ebene (nach Köpp 1997, S. 302)

Die Integrale über die Viertelkreise C_{II} und C_{IV} verschwinden für $R\to\infty$. Siehe hierzu Anhang C. Es folgt:

$$7.21\quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{p}^0 f(\bar{p}^0) = -\int_{-i\infty}^{+i\infty} d\bar{p}^0 f(\bar{p}^0).$$

Indem man die für reelle euklidische Zeiten gefundene Lösung analytisch in die komplexe Ebene fortsetzt, erhält man die Lösung für reelle minkowskische Zeiten. Anschaulich bedeutet dies, daß man die Achsen um 90° im Uhrzeigersinn rotiert (bei der Rücktransformation gegen den Uhrzeigersinn, wesentlich ist, daß man bei der Rotation nicht auf Singularitäten stößt). Deshalb der Ausdruck Wickrotation.
Führen wir nun auf der rechten Seite der Gleichung die Rücktransformation aus, d.h.
$\bar{p}_0 = ip_0$ und $d^4\bar{p} = id^4p$, so erhalten wir

$$7.22\quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{p}^0 f(\bar{p}^0) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 f(ip^0)$$

und deswegen

7.23 $\int d^4\bar{p}\,\frac{\exp\{i\bar{p}^0(x_1^0-x_2^0)+i\bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2)\}}{\left(\bar{p}^{0^2}+\bar{\mathbf{p}}^2+m^2-i\varepsilon\right)}=-i\int d^4p\,\frac{\exp\{-i\left(p^0(x_1^0-x_2^0)-\mathbf{p}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right)\}}{\left(-p^{0^2}+\mathbf{p}^2+m^2-i\varepsilon\right)}$

$=i\int d^4p\,\frac{\exp\{-ip(x_1-x_2)\}}{\left(p^2-m^2+i\varepsilon\right)}.$

Und also:

7.24 $\Delta_F^E((i\bar{x}_1^0,\bar{\mathbf{x}}_1)-(i\bar{x}_2^0,\bar{\mathbf{x}}_2))=i\Delta_F((x_1^0,\mathbf{x}_1)-(x_1^0,\mathbf{x}_2)).$

Wir haben somit gezeigt, daß die beiden Herangehensweisen an das Problem das gleiche Ergebnis liefern, und gleichzeitig auch noch eine Möglichkeit gefunden, um Ergebnisse aus dem euklidischen Raum in den minkowskischen und umgekehrt zu übersetzen: die Wickrotation.
Damit ist unsere Behandlung des freien skalaren Feldes abgeschlossen.

Anhang:

A. Das Wicksche Theorem:

Man findet das Wicksche Theorem in zwei Formen: Zum einen erscheint es bei dem Problem der Zeitordnung von Operatoren, zum anderen erhält man es aus der Betrachtung des Gaußschen Integrals. Wir geben hier noch einen kurzen Einblick in das Wicksche Theorem für Operatoren.
Für Operatoren ist es nicht selbstverständlich, daß sie normalgeordnet sind, d.h. alle Erzeuger im Produkt stehen links und alle Vernichter rechts, so daß für ein normalgeordnetes Operatorprodukt AB immer gilt:

$\langle 0|AB|0\rangle=0$

Wir definieren daher eine Normalordnung :AB: des Operatorproduktes durch:

$A.1\quad A(x)B(y)=:A(x)B(y):+\underbrace{A(x)B(y)}$

wobei offenbar gilt:

$A.2\quad \underbrace{\mathrm{A(x)B(y)}}=\langle 0|A(x)B(y)|0\rangle$

Die Paarung $\underbrace{AB}$ entspricht also dem Vakuumerwartungswert von AB.

Das Wicksche Theorem lautet dann:

A.3:

„...the ordinary product of linear operators is equal to the sum of all the corresponding normal products with all possible pairings, including the normal product without pairings:

$A_1...A_n=:A_1...A_n:+:\underbrace{A_1A_2}...A_n:+...+:\underbrace{A_1...A_{n-1}}A_n:+:\underbrace{A_1...A_n}:+:\underbrace{A_1A_2}\underbrace{A_3A_4}...A_n+....$ “

(Boguliubov 1980, S. 159). Zum Beweis siehe dort. Gemeinhin findet an das Wicksche Theorem so für das *zeitgeordnete* Operatorprodukt formuliert. Siehe dazu z. B. Köpp, 1997, Kapitel 7.
Die in 3.8 gegebene Formulierung des Wickschen Theorems für Gaußintegrale ist nur ein Spezialfall der oben angegebenen allgemeinen Form des Theorems.

B. Einige nützliche Formeln zu Gaußschen Integralen und Propagatoren:
Einige Gaußintegrale:

$B.1\quad \int dx x^{2n}e^{-r^2x^2}=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{r^{2n+1}}$

$B.2\quad \int \mathrm{dx}e^{ax^2+\mathrm{bx}}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$

$B.3\quad \int dx x e^{ax^2+\mathrm{bx}}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{b}{2a}\right)e^{-\frac{b^2}{4a}}$

$B.4\quad \int dx x^2e^{ax^2+\mathrm{bx}}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{1}{2a}\right)\left(1+\frac{b^2}{2a}\right)e^{-\frac{b^2}{4a}}$

Die Schrittfunktionen:

$$B.5\quad \theta(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\frac{e^{ixt}}{t-i\varepsilon}=\begin{cases}1 & \text{für } x>0\\ -1 & \text{für } x<0\end{cases}$$

$$B.6\quad \sigma(x)\left(=\frac{1}{\pi i}\wp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t}e^{ixt}\right)=\theta(x)-\theta(-x)$$

($\wp$ zeigt den Hauptwert des Integrals an.)

Kausale Greensche Funktion für das skalare Feld:

$$B.7\quad \Delta_{\mathrm{F}}(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^2}\Delta_F(p)e^{-ipx},\quad \Delta_{\mathrm{F}}(p)=\frac{1}{p^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$B.8\quad (\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\Delta_F(x)=-\delta^{(4)}(x)$$

Man erhält nun die retardierten und avancierten Greenschen Funktionen

$$B.9\quad \Delta_{\mathrm{F}}^{\mathrm{ret}}(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^2}\frac{\exp\{-ipx\}}{p^2-m^2+i\varepsilon p^0}$$

$$B.10\quad \Delta_{\mathrm{F}}^{\mathrm{av}}(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^2}\frac{\exp\{-ipx\}}{p^2-m^2-i\varepsilon p^0}.$$

Interessant sind auch die Greenschen Funktionen im Impulsraum. Schon aus 7.8 kann man ersehen, daß in ihnen die Impulserhaltung manifest wird, denn wir erhalten ohne große Umschweife

$$B.11\quad \tilde{G}^{(2)}(p,-p)=\frac{1}{p^2-m^2+i\varepsilon}\ .$$

Wir setzen daher für die Greenschen Funktionen im Impulsraum:

$$B.12\quad \tilde{G}^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+\ldots+p_n)=\int d^{(4)}x_1\ldots d^{(4)}x_n e^{-i(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)}G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$$

Damit ist sichergestellt, daß $\tilde{G}^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)$ nur dann definiert ist, wenn $p_1+\ldots+p_n=0$ gilt. Damit ist sowohl die klassische Energie- als auch Impulserhaltung gesichert.

Im Rahmen des Operatorformalismus werden die Greenschen Funktionen über den Zeitordnungsoperator T definiert. Es gilt für den Vakuumserwartungswert:

$$B.13\quad \langle 0|T[\Phi(x_1)\Phi(x_2)\ldots\Phi(x_n)]|0\rangle=G^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Aus dem Pfadintegralformalismus ergibt sich die Zeitordnung ganz normal.

C Beweis für das Verschwinden der Integrale über C_{II} und C_{IV}

Das einzig interessante Integral ist, wie durch die Rechnung klar wird, das über C_{II}. Wir betrachten daher:

$$\int_{C_{II}}d\bar{p}^0 f(\bar{p}^0)=\int_{C_{II}}d\bar{p}^0 A\frac{\exp\{i\bar{p}^0\Delta x\}}{\left(p^{0^2}+a\right)}.$$

Mit der Ersetzung $\bar{p}^0=R\cdot e^{i\varphi}\Rightarrow d\bar{p}^0=iR\cdot e^{i\varphi}d\varphi$ erhält man:

$$=iA\int_{2\pi}^{3\pi/2}R\cdot e^{i\varphi}\frac{\exp\{i\Delta xR\cdot e^{i\varphi}\}}{R^2e^{2i\varphi}+a}=iA\int_{2\pi}^{3\pi/2}R(\cos\varphi+i\sin\varphi)\exp\{iR\Delta x\cos\varphi\}\frac{\exp\{-\Delta xR\sin\varphi\}}{R^2(\cos2\varphi+i\sin2\varphi)+a}$$

Weil der $e^{iR\Delta x\cos\varphi}$-Term rein oszillatorisch ist und für $R\longrightarrow\infty$ immer stärker oszilliert, wird der Rest des Integranden zuverlässig weggemittelt. Das Integral über C_{II} verschwindet also trotz der reellen Exponentialfunktion, die gegen Unendlich strebt. Gleiches gilt auch für das Integral über C_{IV}, doch dort sorgt schon die Exponentialfunktion für Konvergenz gegen Null.

D Zu den natürlichen Einheiten

Mit $c=\left[\frac{L}{T}\right]=1,\quad \hbar=[\mathrm{E}\cdot\mathrm{T}]=1$ können wir über $E=mc^2$ alle Einheiten auf die Dimension der Masse zurückführen und erhalten: $[T]=[L]=\left[M^{-1}\right],\ [E]=[M]$.

Damit haben Raum und Zeit die Dimension –1, Energie und Masse +1 und Geschwindigkeit und Wirkung 0. Die Lagrangedichte hat also im n-dimensionalen Raum (der „natürlichen“ Dimension –n), die Dimension +n. Dies wird wichtig, wenn man zu Renormierungsproblemen kommt, wo die Renormierbarkeit der Theorie nur dadurch gewährleiste ist, daß die Dimension der Lagrangedichte nie größer als die (normale) Dimension des betrachteten Raumes sein darf.

E Das komplexe freie skalare Feld

Die Lagrangedichte des komplexen freien skalaren Feldes ist

$$E.1 \quad \mathfrak{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \ .$$

Es ist unter der kontinuierlichen Transformation $\begin{cases} \Phi(x) \to \Phi'(x) = e^{i\theta}\Phi(x) \\ \Phi^*(x) \to \Phi^{*}{}'(x) = e^{i\theta}\Phi^*(x) \end{cases}$ invariant.

Der nach dem Noethertheorem erhaltene Noetherstrom (d.h. $\partial_\mu j^\mu = 0$) lautet

$$E.2 \quad j^\mu = -i\Phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Phi \equiv -i\left(\Phi^* \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi^*)\Phi\right).$$

Die erhaltene Ladung

$$E.3 \int d^3x\, j^0(x) = \int d^3x\, i(\dot{\Phi}^*\Phi - \Phi^*\dot{\Phi})$$

ist die gewöhnliche elektrische Ladung. Damit ist gezeigt, daß das komplexe skalare Feld Ladung trägt. Indem man nun mit Hilfe von 1.8 alle obigen Schritte wiederholt, erhält man den gleichen Propagator und kann die oben gemachten Aussagen auf alle (pseudoskalaren) spinlosen Bosonen (z.B. Pionen) übertragen. Allerdings trägt eine nicht-selbstwechselwirkende Theorie für geladene Teilchen nicht sehr weit.

<u>Literatur:</u>

N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, *Quantum Fields*, The Benjamin/Cummings Pub. Corp., Inc. 1983

N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields,* 3rd ed., Wiley 1980

P.H. Frampton, *Gauge Field Theories*, Frontiers in Physics, Addison Wesley, 1986

E.M. Henley, W. Thirring, *Elementare Quantenfeldtheorie*, BI-Wissenschaftsverlag, 1975

M. Kaku, *Quantum Field Theory, a modern introduction*, Oxford University Press, 1993

G. Köpp, F. Krüger, *Einführung in die Quantenelektrodynamik*, Teubner, 1997

T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer, 1997

I. Montvay, G. Münster, *Quantum Mechanics on the Lattice*, Cambridge University Press, 1994

J.W. Negerle, H. Orland, *Quantum Many-Particle System*, Frontiers in Physics, Addison Wesley, 1987

P. Ramond, *Field Theory: a modern primer*, 2nd ed., Frontiers in Physics, Addison Wesley, 1990

L.S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integrals*, Wiley, 1981

F. Schwabl, *Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)*, Springer, 1997

J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press, 1989