Elektron-Positron-Streuung

Seminarvortrag von
Eicke Ruthotto

24. Juni 1998

Seminar über Teilchen- und Kerntheorie, SS 1998
G. Münster, M. Stingl, A. Weiguny

Die feldtheoretische Behandlung der Elektron-Positron-Streuung (Bhabha-Streuung) läßt sich – wie wir später sehen werden – fast vollständig auf die Møller-Streuung zurückführen. Da mit [6] bereits eine sehr ausführliche Darstellung der Vorgehensweise zur Berechnung des Streuquerschnitts für die Reaktion $e^- + e^- \to e^- + e^-$ vorliegt, halte ich es nicht für sinnvoll, die gesamte Rechnung, die nicht nur hochgradig analog, sondern über weite Strecken tatsächlich identisch ist, hier vorzuführen. Vielmehr möche ich das Hauptgewicht darauf legen, die Rechenschritte zu erläutern, die in [6] nur sehr knapp dargestellt sind.

1 Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild

Im *Schrödinger-Bild* der Quantenmechanik wird – sofern auf das zu betrachtende System keine äußeren Kräfte einwirken – die gesamte Zeitabhängigkeit von den Zuständen $|\psi(t)\rangle_S$ getragen. Die Zeitentwicklung dieser Zustände wird durch die Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_S = H\,|\psi(t)\rangle_S \tag{1}$$

beschrieben.
In der *Wechselwirkungs-Darstellung* wird ein Teil der Zeitabhängigkeit auf die Operatoren herübergewälzt.
Man zerlegt den Hamilton-Operator in einen freien und einen Wechselwirkungsterm:

$$H = H_0 + H_I\,. \tag{2}$$

Der Übergang vom Schrödinger- zum Wechselwirkungs- oder Dirac-Bild erfolgt durch die Transformationen

$$|\psi(t)\rangle_I = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}|\psi(t)\rangle_S\,, \tag{3}$$

$$A_I(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}\,A_S\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t}. \tag{4}$$

Zustände und Operatoren genügen wegen (1) den Bewegungsgleichungen

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle_I = H_I(t)|\psi(t)\rangle_I\,, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_I(t) = \mathrm{i}\,[H_0, A_I(t)] + \frac{\partial}{\partial t}A_I(t)\,. \tag{6}$$

Da die Wechselwirkungsdarstellung aus der Schrödinger-Darstellung (und somit auch aus der Heisenberg-Darstellung) durch eine unitäre Transformation hervorgeht, gehorchen die wechselwirkenden Felder in der Dirac-Darstellung den gleichen Vertauschungsrelationen wie die freien Felder.
Die formale Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$|\psi(t)\rangle_S = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)}\,|\psi(t_0)\rangle_S \tag{7}$$

transformieren wir ins Dirac-Bild:

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle_I &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)}\,|\psi(t_0)\rangle_S \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t_0}\,|\psi(t_0)\rangle_I \\ &= U\,(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle_I\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Dies definiert einen Zeitentwicklungsoperator $U(t,t_0)$, der (5) erfüllt:

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_I(t)U(t,t_0)\,. \tag{9}$$

Diese Bewegungsgleichung kann formal gelöst werden:

$$U(t,t_0) = \underline{1} - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, H_I(t')U(t',t_0)\,. \tag{10}$$

Durch Iteration dieser Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} U(t,t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^n \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'}\mathrm{d}t'' \cdots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}}\mathrm{d}t^{(n)}\, H_I(t')H_I(t'')\cdots H_I(t^{(n)}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t' \cdots \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t^{(n)}\, T\Big(H_I(t')\cdots H_I(t^{(n)})\Big)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Dabei wurde im zweiten Schritt der *Zeitordnungsoperator* T eingeführt, der die danach auftretenden Faktoren in aufeinanderfolgender Zeit von rechts nach links ordnet.

2 Streumatrix und Streuquerschnitt

Bei einem Streuvorgang liegt die folgende allgemeine Situation vor: Zu einem Anfangszeitpunkt t_i liegen weit voneinander getrennte Teilchen vor, die nicht miteinander wechselwirken. Da der Zeitraum von t_i bis zum Zeitpunkt der Wechselwirkung verglichen mit der eigentlichen Wechselwirkungsdauer sehr groß ist, wird t_i idealisiert als $t_i = -\infty$ angenommen. Nach der Wechselwirkung fliegen die verbleibenden bzw. neu erzeugten Teilchen auseinander und werden zu einem sehr viel späteren Zeitpunkt $t_f = +\infty$ registriert.
Es liegt also zum Anfangszeitpunkt t_i ein Anfangszustand $|i\rangle$ vor:

$$|\psi(-\infty)\rangle = |i\rangle. \tag{12}$$

Nach der Streuung erhält man einen Zustand

$$|\psi(+\infty)\rangle = U(\infty,-\infty)|i\rangle. \tag{13}$$

Man interessiert sich nun für die Übergangsamplitude in einen bestimmten Endzustand $|f\rangle$. Diese ist gegeben durch das Matrixelement

$$\langle f|\psi(\infty)\rangle = \langle f|U(\infty,-\infty)|i\rangle = \langle f|S|i\rangle = S_{fi}. \tag{14}$$

Dabei sind $|i\rangle$ und $|f\rangle$ Eigenzustände des ungestörten Hamilton-Operators H_0. Dies entspricht unserer Forderung nach freien Teilchen im Anfangs- und Endzustand.
Hier wurde die Streumatrix S als der Operator eingeführt, der für die Zeitentwicklung von $t_i = -\infty$ nach $t_f = \infty$ verantwortlich ist. Damit können wir für S eine Entwicklung nach (11) angeben:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t' \cdots \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t^{(n)}\, T\Big(H_I(t')\cdots H_I(t^{(n)})\Big)\,. \tag{15}$$

Würde zwischen den Teilchen keine Wechselwirkung bestehen, dann würde sich der Zustand des Systems nicht ändern, die zugehörige S-Matrix wäre die Einheitsmatrix. Es ist zweckmäßig, diese Einheitsmatrix immer abzutrennen und die Streumatrix in der Form

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \mathrm{i}\,(2\pi)^4\delta(P_f - P_i)\,T_{fi} \tag{16}$$

mit der Matrix T_{fi} darzustellen. Im zweiten Term ist die vierdimensionale δ-Funktion herausgezogen worden, die den Erhaltungssatz für den Viererimpuls ausdrückt (P_i und P_f sind die Summen der Viererimpulse aller Teilchen in Anfangs- bzw. Endzustand). Die Matrixelemente T_{fi}, die nach der Abtrennung der δ-Funktion übrig bleiben, bezeichnet man als Streuamplituden.

Die Quadrate der Elemente der Streumatrix $|S_{fi}|^2$ geben die Übergangs*wahrscheinlichkeiten* in bestimmte Zustände $|f\rangle$ an.
Beim Quadrieren der Beträge $|S_{fi}|$ tritt das Quadrat der δ-Funktion auf. Dieses ist folgendermaßen aufzulösen. Man kann für die eine δ-Funktion eine Integraldarstellung

$$\delta(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(P_f - P_i)x} \tag{17}$$

schreiben und das Integral über ein großes, aber endliches Volumen V und Zeitintervall T erstrecken. Dann ergibt sich für dieses Integral der Wert $VT/(2\pi)^4$; man kann schreiben

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) \; |T_{fi}|^2 \; V\,T\,. \tag{18}$$

Nach Division durch T erhalten wir für die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit

$$w_{fi} = (2\pi)^4 \, \delta(P_f - P_i) \; |T_{fi}|^2 \; V\,. \tag{19}$$

Wir beschränken uns hier bereits auf den Fall zweier Teilchen in Anfangs- und Endzustand. Die Impulse der Teilchen im Endzustand seien $\boldsymbol{p}_1'$ und $\boldsymbol{p}_2'$ im Element des Impulsraumes $\mathrm{d}^3p_1' \, \mathrm{d}^3p_2'$. Die Zahl der Zustände in diesem Element des Impulsraumes (und im Normierungsvolumen V) ist

$$\frac{V^2 \, \mathrm{d}^3p_1' \, \mathrm{d}^3p_2'}{(2\pi)^6}.$$

Damit erhalten wir zunächst

$$\mathrm{d}w = (2\pi)^4 \, \delta(P_f - P_i) \; |T_{fi}|^2 \; V \, \frac{V^2 \, \mathrm{d}^3p_1' \, \mathrm{d}^3p_2'}{(2\pi)^6}. \tag{20}$$

Jedes freie Teilchen im Anfangs- und Endzustand wird durch eine Wellenfunktion beschrieben. Dabei müssen die Wellenfunktionen aller Teilchen zur Berechnung des Matrixelementes „auf ein Teilchen im Volumen V“ normiert sein. Alle diese Funktionen enthalten den Faktor $1/\sqrt{2p^0V}$, wobei p^0 die Energie des Teilchens ist. Für das folgende ist es aber zweckmäßig, bei allen Rechnungen die Wellenfunktionen der Teilchen ohne diese Faktoren zu schreiben. Daher ersetzt man

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{(2p_1^0 V \, 2p_2^0 V \, 2p_1'^0 V \, 2p_2'^0 V)^{1/2}} \tag{21}$$

und erhält schließlich

$$\mathrm{d}w = (2\pi)^4 \, \delta(P_f - P_i) \; |M_{fi}|^2 \; \frac{1}{4p_1^0 \, p_2^0 \, V} \, \frac{\mathrm{d}^3p_1' \, \mathrm{d}^3p_2'}{(2\pi)^6 \, 2p_1'^0 \, 2p_2'^0}\,. \tag{22}$$

Uns interessiert aber nicht die Wahrscheinlichkeit, sondern der Streuquerschnitt $\mathrm{d}\sigma$. Der invariante Streuquerschnitt ergibt sich aus $\mathrm{d}w$, indem durch den Fluß der einlaufenden Teilchen dividiert wird. Es ist

$$j = \frac{I}{V \, p_1^0 \, p_2^0} \qquad ; \qquad I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}\,. \tag{23}$$

Wertet man die letzten beiden Gleichungen im Schwerpunktsystem aus ($\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$) und führt die invariante Variable $t = (p_1 - p_1')^2$ ein, so erhält man für den Streuquerschnitt den einfachen Ausdruck

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{64\pi} \, |M_{fi}|^2 \, \frac{\mathrm{d}t}{I^2}. \tag{24}$$

Wenn wir unpolarisierte Teilchen im Anfangszustand haben und uns nicht für die Polarisation der Teilchen im Endzustand interessieren, müssen wir über die Polarisationen der Teilchen (e^+, e^-) im Anfangszustand mitteln, über die Polarisationen im Endzustand summieren:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{64\pi} \frac{\mathrm{d}t}{I^2} \sum_{\text{Spins}} |M_{fi}|^2 \, . \tag{25}$$

3 Wicksches Theorem

Wir haben gesehen, daß man zur Berechnung der Übergangsamplitude vom Zustand $|i\rangle$ in den Zustand $|f\rangle$ das Matrixelement $\langle f|S|i\rangle$ bestimmen muß.
Wenn man dabei eine bestimmte Ordnung der Störungsreihe (15) herausgreift, ist das Matrixelement eines zeitgeordneten Produkts von Wechselwirkungs-Hamilton-Operatoren zu berechnen. Von der Vielfalt der Terme in der Störungsentwicklung tragen nur diejenigen bei, deren Anwendung auf $|i\rangle$ den Zustand $|f\rangle$ ergibt.
Es müssen also in dem entsprechenden störungstheoretischen Beitrag zur S-Matrix diejenigen Vernichtungsoperatoren auftreten, welche die in $|i\rangle$ enthaltenen Teilchen vernichten und diejenigen Erzeugungsoperatoren, welche die in $|f\rangle$ enthaltenen Teilchen erzeugen.
Man kann den Wert solcher Matrixelemente von S dadurch berechnen, daß man die Vernichtungsoperatoren unter Verwendung der Vertauschungsrelationen nach rechts kommutiert. Statt diese Rechnung in jedem Einzelfall durchzuführen, ist es zweckmäßig, von vornherein die zeitgeordneten Produkte so umzuschreiben, daß sie *normalgeordnet* sind.
Normalgeordnet heißt, daß alle Erzeugungsoperatoren links von allen Vernichtungsoperatoren stehen. Symbolisiert wird die Normalordnung durch den Einschluß der betreffenden Terme in Doppelpunkte. Das *Wicksche Theorem* gibt an, wie man ein beliebiges zeitgeordnetes Produkt durch eine Summe von normalgeordneten Produkten darstellen kann.

Die *Kontraktion* zweier Feldoperatoren A und B ist durch

$$\underbrace{AB} \equiv T(AB) - :AB: \tag{26}$$

gegeben.
Da die Kontraktion zweier Operatoren eine komplexe Zahl ist und der Vakuumerwartungswert eines normalgeordneten Produkts verschwindet, gilt

$$\underbrace{AB} = \langle 0|T(AB)|0\rangle \, . \tag{27}$$

Es gilt offensichtlich auch

$$T(AB) = :AB: + \underbrace{AB} \, . \tag{28}$$

Das *verallgemeinerte Normalprodukt* der Feldoperatoren A, B, ..., welches in seinem Inneren auch noch Kontraktionen dieser Operatoren enthält, ist definiert als

$$:\underbrace{AB}\underbrace{CD}\underbrace{EF}\ldots\underbrace{KL}\ldots: \; := (-1)^P \, \underbrace{AC}\underbrace{DL}\underbrace{EF}\ldots :BK\ldots: , \tag{29}$$

wobei P die Anzahl der schrittweisen Vertauschungen von Fermi-Operatoren ist, die erforderlich ist, um die Operator-Reihenfolge $ACDLEF\ldots BK\ldots$ zu erhalten.

Erstes Theorem

Das zeitgeordnete Produkt der Feldoperatoren ist gleich der Summe ihrer Normalprodukte, in denen die Operatoren durch sämtliche möglichen Kontraktionen verknüpft sind:

$$
\begin{aligned}
&T(A_1A_2A_3\ldots A_n) = :A_1A_2A_3\ldots A_n: \\
&\quad + :\overbrace{A_1A_2}A_3\ldots A_n: + :\overbrace{A_1A_2A_3}\ldots A_n: + \ldots + :A_1A_2\ldots\overbrace{A_{n-1}A_n}: \\
&\quad + :\overbrace{A_1A_2}\overbrace{A_3A_4}\ldots A_n: + \ldots + :A_1A_2\ldots\overbrace{A_{n-3}A_{n-2}}\ \overbrace{A_{n-1}A_n}: \\
&\quad + \ldots .
\end{aligned}
$$

Zweites Theorem

Ein gemischtes T-Produkt von Feldoperatoren ist gleich der Summe ihrer Normalprodukte der oben angegebenen Form, jedoch gehen in diese Summe die Kontraktionen zwischen Operatoren, die innerhalb ein- und desselben Normalproduktfaktors stehen, nicht ein.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&T(\psi_1 :\psi_2\psi_3\psi_4:) = \\
&\quad :\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4: + :\overbrace{\psi_1\psi_2}\psi_3\psi_4: + :\overbrace{\psi_1}\psi_2\overbrace{\psi_3}\psi_4: + :\overbrace{\psi_1}\psi_2\psi_3\ \overbrace{\psi_4}: .
\end{aligned}
$$

4 Elektron-Positron-Streuung

Nun gilt es, konkret zu werden und den Streuquerschnitt für die Reaktion

$$e^+(p_1,s_1) + e^-(p_2,s_2) \to e^+(p_3,s_3) + e^-(p_4,s_4) \tag{30}$$

zu berechnen.
Anfangs- und Endzustand sind also

$$|i\rangle = |e^+(p_1,s_1)\, e^-(p_2,s_2)\rangle = b^\dagger_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle\,, \tag{31}$$

$$|f\rangle = |e^+(p_3,s_3)\, e^-(p_4,s_4)\rangle = b^\dagger_{s_3}(\boldsymbol{p}_3)a^\dagger_{s_4}(\boldsymbol{p}_4)|0\rangle\,. \tag{32}$$

Der Wechselwirkungs-Hamilton-Operator ist gegeben durch

$$H_I(t) = -e\int \mathrm{d}^3x\ :\overline{\psi}(\boldsymbol{x},t)\,\gamma^\mu\,\psi(\boldsymbol{x},t):\,A_\mu(\boldsymbol{x},t). \tag{33}$$

Betrachten wir wieder die Entwicklung des S-Operators (15), so erkennen wir, daß weder der Term nullter, noch der Term erster Ordnung eine Streuung zweier Teilchen beschreiben kann. Der Term erster Ordnung ist einfach die Identität, für uns also ohne Interesse, da wir $|f\rangle \neq |i\rangle$ voraussetzen wollen.
H_I beschreibt 4 mögliche Elementarprozesse: Emission oder Absorption eines Photons durch ein Elektron oder Positron, Paarerzeugung, Paarvernichtung. Man erkennt, daß der Term erster Ordnung keine Streuung beschreibt. Das zu berechnende Matrixelement ist also

$$
\begin{aligned}
S_{fi} \;=\; & \frac{(\mathrm{i}e)^2}{2}\int \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x''\,\langle 0|b_{s_3}(\boldsymbol{p}_3)a_{s_4}(\boldsymbol{p}_4) \\
& T\left(:\overline{\psi}(x')\,\gamma^\mu\,\psi(x'):\,A_\mu(x')\ :\overline{\psi}(x'')\,\gamma^\nu\,\psi(x''):\,A_\nu(x'')\right) \\
& b^\dagger_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Wie bereits angeklungen ist, gibt es nun verschiedene Möglichkeiten, dieses Matrixelement auszurechen. Zum einen kann man direkt darangehen, (34) auszurechnen. Dies werde ich ansatzweise tun, aber nicht zu Ende führen. Da das entsprechende Matrixelement der Møller-Streuung bekannt ist, kann durch eine einfache Transformation S_{fi} bzw. direkt $\mathrm{d}\sigma$ für die Bhabha-Streuung erhalten werden. Dieser Übergang von der Elektron-Elektron- zur Elektron-Positron-Streuung wird in Abschnitt 4.4 erläutert.

Dabei beachten wir die Entwicklung von ψ und $\overline{\psi}$ nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\psi(x') = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \sum_{s=\pm 1/2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px'} v_s(p)\, b_s^\dagger(\boldsymbol{p}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px'} u_s(p)\, a_s(\boldsymbol{p}) \right) , \tag{35}$$

$$\overline{\psi}(x') = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \sum_{s=\pm 1/2} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px'} \overline{v}_s(p)\, b_s(\boldsymbol{p}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}px'} \overline{u}_s(p)\, a_s^\dagger(\boldsymbol{p}) \right) . \tag{36}$$

4.1 Anwendung des Wickschen Theorems

Da die Operatoren von $A_\mu(x')$ nur mit denen aus $A_\nu(x'')$ kontrahiert werden können, ist es möglich, diese gesondert zu betrachten. Auf den restlichen Ausdruck können wir nun das Wicksche Theorem anwenden, das uns sagt, welche Kontraktionen wir zu bilden haben:

$$\langle 0|b(\boldsymbol{p}_3)\, a(\boldsymbol{p}_4) : \overline{\psi}(x')\, \gamma^\mu\, \psi(x') : : \overline{\psi}(x'')\, \gamma^\nu\, \psi(x'') : b^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle$$

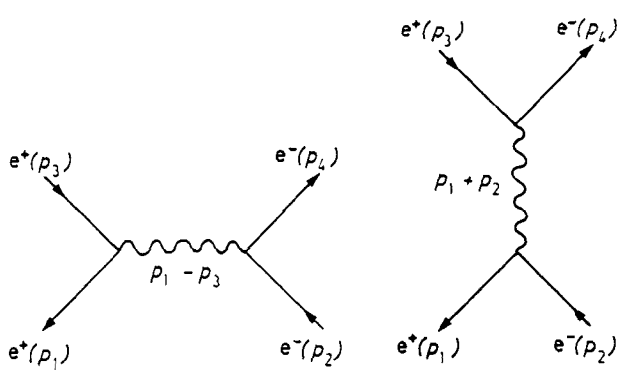
$$= \quad b(\boldsymbol{p}_3)\, a(\boldsymbol{p}_4) : \overline{\psi}(x')\, \gamma^\mu\, \psi(x') : : \overline{\psi}(x'')\, \gamma^\nu\, \psi(x'') : b^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)$$

$$+ \quad b(\boldsymbol{p}_3)\, a(\boldsymbol{p}_4) : \overline{\psi}(x')\, \gamma^\mu\, \psi(x') : : \overline{\psi}(x'')\, \gamma^\nu\, \psi(x'') : b^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)$$

$$+ \quad b(\boldsymbol{p}_3)\, a(\boldsymbol{p}_4) : \overline{\psi}(x')\, \gamma^\mu\, \psi(x') : : \overline{\psi}(x'')\, \gamma^\nu\, \psi(x'') : b^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)$$

$$+ \quad b(\boldsymbol{p}_3)\, a(\boldsymbol{p}_4) : \overline{\psi}(x')\, \gamma^\mu\, \psi(x') : : \overline{\psi}(x'')\, \gamma^\nu\, \psi(x'') : b^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)$$

Die Darstellung dieser Wechselwirkung als Feynman-Graphen liefert zwei unterschiedliche Diagramme. Das linke (Streuung) entspricht dem ersten, das rechte (Paarvernichtung und -erzeugung) dem dritten Summanden. Die anderen beiden Beiträge unterscheiden sich von den unten abgebildeten lediglich durch Vertauschen der ein- und auslaufenden Teilchen.



Einsetzen der Entwicklung der Feldoperatoren liefert

$$\begin{aligned}
\ldots &= v(p_3)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_3x'}\gamma^\mu\,\overline{v}(p_1)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x'}\cdot\overline{u}(p_4)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_4x''}\gamma^\nu\,u(p_2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2x''} \\
&+ (1\leftrightarrow 2)(3\leftrightarrow 4) \\
&+ \overline{v}(p_1)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x'}\gamma^\mu\,u(p_2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2x'}\cdot v(p_3)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_3x''}\gamma^\nu\,\overline{u}(p_4)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_4x''} \\
&- (1\leftrightarrow 3)(2\leftrightarrow 4)\,. \qquad (37)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist dem in [6] und [1] erhaltenen analog. Ich werde an dieser Stelle die direkte Berechnung von S_{fi}(Bhabha) abbrechen und mit dem Zwischenergebnis für S_{fi}(Møller) weiterrechnen.

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \frac{(\mathrm{i}e)^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}x'\int \mathrm{d}x''\int \mathrm{d}k\,\frac{-\mathrm{i}\,g_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}\times \\
&\quad\Big(\overline{u}(p_4)\,\gamma^\mu\,u(p_1)\overline{u}(p_3)\,\gamma^\nu\,u(p_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_4-p_1-k)x'}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_3-p_2+k)x''} \\
&\quad-\overline{u}(p_3)\,\gamma^\mu\,u(p_1)\,\overline{u}(p_4)\,\gamma^\nu\,u(p_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_3-p_1-k)x'}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_4-p_2+k)x''}\Big)\,. \qquad (38)
\end{aligned}$$

Die Integration über x' und x'' läßt sich leicht ausführen. Die x'-Integration liefert im ersten Summanden einen Faktor $(2\pi)^4\delta(p_4-p_1-k)$ und setzt damit $k=p_4-p_1$. Im zweiten Summanden erhält man analog $(2\pi)^4\delta(p_3-p_1)$. Durch die x''-Integration folgt in beiden Summanden der Faktor $(2\pi)^4\delta(P_f-P_i)$ und damit insgesamt

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \mathrm{i}\,(2\pi)^4\delta(P_f-P_i)T_{fi}\,, \qquad (39)\\
T_{fi} &= \frac{1}{\mathrm{i}}\Big\{\overline{u}(p_4)\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(p_1)\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{(p_4-p_1)^2}\overline{u}(p_3)\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,u(p_2) \\
&\quad-\overline{u}(p_3)\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(p_1)\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{(p_3-p_1)^2}\overline{u}(p_4)\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,u(p_2)\Big\}\,. \qquad (40)
\end{aligned}$$

4.2 Spinsummen

Nach (25) haben wir nun das Betragsquadrat des Matrixelements M_{fi} zu bestimmen, können aber wegen (20) statt dessen auch die Größe $|T_{fi}|^2$ berechnen.
Da wir jedoch im Anfangszustand unpolarisierte Elektronen haben und uns nicht für die Polarisation der Elektronen im Endzustand interessieren, müssen wir über die Spinrichtungen der Elektronen im Endzustand summieren, und – da die Wellenfunktionen auf ein Teilchen im Volumen V normiert sind – über die Spins im Anfangszustand mitteln, also

$$\sum_{\text{Spins}} = \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}|T_{fi}|^2$$

berechnen, wenn wir die Spins der einlaufenden Teilchen mit s, die der auslaufenden mit s' bezeichnen.

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{Spins}}|T_{fi}|^2 &= e^4\sum_{\text{Spins}}\Big\{\frac{1}{u}\,\overline{u}(p_2)\,\gamma_\mu\,u(p_3)\,\overline{u}(p_1)\,\gamma^\mu\,u(p_4) \\
&\qquad-\frac{1}{t}\,\overline{u}(p_1)\,\gamma_\mu\,u(p_3)\,\overline{u}(p_2)\,\gamma^\mu\,u(p_4)\Big\} \\
&\qquad\Big\{\frac{1}{u}\,\overline{u}(p_4)\,\gamma_\nu\,u(p_1)\,\overline{u}(p_3)\,\gamma^\nu\,u(p_2) \\
&\qquad-\frac{1}{t}\,\overline{u}(p_4)\,\gamma_\nu\,u(p_2)\,\overline{u}(p_3)\,\gamma^\nu\,u(p_1)\Big\}\,. \qquad (41)
\end{aligned}$$

Es stellt sich nun die Frage, wie diese Summen zu berechnen sind. Betrachten wir den ersten Summanden

$$\sum_{\text{Spins}} \frac{1}{u^2}\,\overline{u}_\alpha(p_2)\,(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\,u_\beta(p_3)\,\overline{u}_\gamma(p_3)\,(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\,u_\delta(p_2)$$
$$\overline{u}_\epsilon(p_1)\,(\gamma^\mu)_{\epsilon\eta}\,u_\eta(p_4)\,\overline{u}_\vartheta(p_4)\,(\gamma^\nu)_{\vartheta\kappa}\,u_\kappa(p_1)\,, \tag{42}$$

wobei wir uns erinnern, daß die Spinoren u und $\overline{u}$ Objekte mit vier Komponenten sind, die wir mit griechischen Indizes abzählen wollen. Wir vereinbaren die Summenkonvention, daß über gleichlautende Indizes summiert wird.
Betrachten wir nun das Objekt

$$\sum_s u_\beta(p,s)\,\overline{u}_\gamma(p,s)\,. \tag{43}$$

: Es gilt

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \left(\overline{u}_1,\,\overline{u}_2,\,\overline{u}_3,\,\overline{u}_4\right) = \begin{pmatrix} u_1\overline{u}_1 & u_1\overline{u}_2 & \cdots & \\ u_2\overline{u}_1 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ & & & u_4\overline{u}_4 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Setzt man nun die explizite Form eines Dirac-Spinors

$$u(p,s) = \sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma p}}{p^0+m}\,\chi_s \end{pmatrix}, \quad \chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

ein, so erhält man als Ergebnis von (43)

$$\begin{aligned} (43) &= \sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \underline{1} & -\dfrac{\boldsymbol{\sigma p}}{p^0+m} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma p}}{p^0+m} & -\dfrac{p^0-m}{p^0+m}\,\underline{1} \end{pmatrix} \\ &= (\not{p}+m)_{\beta\gamma}\,, \end{aligned} \tag{46}$$

wobei $\not{p} = p^\mu\,\gamma_\mu$ ist. Für (42) folgt hiermit

$$\begin{aligned} (42) &= \frac{1}{u^2}\,(\not{p}_2+m)_{\delta\alpha}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\not{p}_3+m)_{\beta\gamma}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\cdot \\ &\quad (\not{p}_1+m)_{\kappa\epsilon}(\gamma^\mu)_{\epsilon\eta}(\not{p}_4+m)_{\eta\vartheta}(\gamma^\nu)_{\vartheta\kappa}\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Der Ausdruck, der nun noch übrig ist, hat die Form eines Matrixproduktes, summiert über die Diagonalelemente. Dies ist aber gerade die *Spur* einer Matrix. Daher:

$$(42) = \frac{1}{4u^2}\,\mathrm{Sp}\,[(\not{p}_2+m)\gamma_\mu(\not{p}_3+m)\gamma_\nu]\cdot\mathrm{Sp}\,[(\not{p}_1+m)\gamma^\mu(\not{p}_4+m)\gamma^\nu]\,. \tag{48}$$

Für den gesamten Ausdruck (41) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spins}} |T_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{4}\left\{\frac{1}{u^2}\,\mathrm{Sp}\,[(\not{p}_2+m)\gamma_\mu(\not{p}_3+m)\gamma_\nu]\right. \\ &\quad \mathrm{Sp}\,[(\not{p}_1+m)\gamma^\mu(\not{p}_4+m)\gamma^\nu] \\ &\quad -\frac{1}{tu}\,\mathrm{Sp}\,[(\not{p}_2+m)\gamma_\mu(\not{p}_3+m)\gamma_\nu(\not{p}_1+m)\gamma^\mu(\not{p}_4+m)\gamma^\nu] \\ &\quad \left.+(3\leftrightarrow 4)\right\}. \end{aligned} \tag{49}$$

Dabei gilt für die invarianten Variablen s, t und u:

$$s = (p_1+p_2)^2 \qquad t = (p_1-p_3)^2 \qquad u = (p_1-p_4)^2\,. \tag{50}$$

4.3 Spurtheoreme

Nun gilt es, die Spuren in (49) auszurechnen. Dies stellt keine große Schwierigkeit dar, da es sich dabei um Spuren von Produkten von Gamma-Matrizen handelt. Wir wollen kurz einige Eigenschaften der γ-Matrizen und der Spuren zusammenstellen:

1. $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$
2. $\mathrm{Sp}\,(ABC) = \mathrm{Sp}\,(CAB) = \mathrm{Sp}\,(BAC)$
3. $\mathrm{Sp}\,\underline{1} = 4$
4. $\mathrm{Sp}\,(\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\cdots\not{a}_{2n+1}) = 0$

   Die Spur einer ungeraden Anzahl von γ-Matrizen verschwindet.
5. $\mathrm{Sp}\,(\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_{2n}) = a_1a_2\,\mathrm{Sp}\,(\not{a}_3\cdots\not{a}_{2n}) - a_1a_3\,\mathrm{Sp}\,(\not{a}_2\not{a}_4\cdots\not{a}_{2n}) + \ldots$
   $\qquad + a_1a_{2n}\,\mathrm{Sp}\,(\not{a}_2\not{a}_3\cdots\not{a}_{2n-1})$

   (a) Spezialfall: $\mathrm{Sp}\,(\not{a}\not{b}) = 4ab$

   (b) Spezialfall: $\mathrm{Sp}\,(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4\,\{(ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd)\}$

Nun können wir die Spuren in (49) ausrechnen. Für den ersten Term ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sp}\,[(\not{p}_2 + m)\gamma_\mu(\not{p}_3 + m)\gamma_\nu] \\
&\quad = \mathrm{Sp}\,[\not{p}_2\gamma_\mu\not{p}_3\gamma_\nu] + m\underbrace{\mathrm{Sp}\,[\not{p}_2\gamma_\mu\gamma_\nu]}_{\overset{(4)}{=}0} + m\underbrace{\mathrm{Sp}\,[\gamma_\mu\not{p}_3\gamma_\nu]}_{\overset{(4)}{=}0} + m^2\underbrace{\mathrm{Sp}\,[\gamma_\mu\gamma_\nu]}_{\underset{(1)}{\overset{(5a)}{=}}4g_{\mu\nu}} \\
&\quad = \underbrace{4\left(p_{2_\mu}p_{3_\nu} + p_{2_\nu}p_{3_\mu} - p_2p_3g_{\mu\nu}\right)}_{\text{mit (5b)}} + 4m^2g_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Für den Streuquerschnitt folgt nach analoger Berechnung der restlichen Spuren der Ausdruck

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi e^4\mathrm{d}t}{I^2}\Bigg\{&\frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 4m^2(t-m^2)\right] + \frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2} + 4m^2(u-m^2)\right] \\
&+\frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2} - m^2\right)\left(\frac{s}{2} - 3m^2\right)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Für I^2 gilt hier wegen $m_1 = m_2$

$$I^2 = \frac{1}{4}s\left(s - 4m^2\right). \tag{51}$$

4.4 Kreuzungssymmetrie

Wenn wir die Elektron-Elektron-Streuung als die allgemeine Reaktion

$$a + b \longrightarrow c + d$$

betrachten, dann ist die Bhabha-Streuung – da das Positron ja gerade das Antiteilchen des Elektrons ist – eine dazu *gekreuzte* Reaktion

$$\overline{c} + b \longrightarrow \overline{a} + d\,.$$

Die invarianten Variablen für diesen Fall sind dann

$$s' = (p_{\overline{c}} + p_b)^2 \qquad t' = (p_{\overline{a}} - p_{\overline{c}})^2 \qquad u' = (p_{\overline{c}} - p_d)^2 .$$

In unserem konkreten Fall nehmen wir die folgenden Ersetzungen vor: Die Impulse von Elektron und Positron seien p_- und p_+ im Anfangs- und p'_- und p'_+ im Endzustand. Der Übergang von der Møller- zur Bhabha-Streuung erfolgt dann durch die Substitution

$$p_1 \to -p'_+ \qquad p_2 \to p_- \qquad p_3 \to -p_x \qquad p_4 \to p'_- .$$

Die kinematischen Invarianten erhalten dabei folgende Bedeutung:

$$s = (p_- - p'_+)^2 \qquad t = (p_+ - p'_+)^2 \qquad u = (p_- + p_+)^2 .$$

Diese Fortsetzung der Variablen s, t und u in einen anderen Wertebereich ist nicht nur eine Spielerei. Jauch und Rohrlich[1] haben gezeigt, daß man in der Tat die gekreuzte Reaktion durch analytische Fortsetzung aus der ungekreuzten erhalten kann. Man bezeichnet das als *Substitutionsregel* oder *Kreuzungssymmetrie*. Nimmt man die Elektron-Elektron-Streuung als s-Kanal, dann ist die e^+e^--Streuung der u-Kanal der Reaktion, da in diesem Fall u die Funktion des Quadrates der Schwerpunktsenergie übernimmt.
Das Quadrat der Streuamplitude – ausgedrückt durch s, t und u – bleibt wie oben, nur im Ausdruck für I^2 ist $s \to u$ zu ersetzen. Auf diese Weise erhalten wir für den Querschnitt der Streuung eines Positrons an einem Elektron

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma = \frac{4\pi e^4 \mathrm{d}t}{u(u-4m^2)} \Bigg\{ & \frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 4m^2(t-m^2)\right] \\ & + \frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2} + 4m^2(u-m^2)\right] + \frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2} - m^2\right)\left(\frac{s}{2} - 3m^2\right)\Bigg\} . \end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem gilt für die Invarianten

$$s = -4\boldsymbol{p}^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2} \qquad t = -4\boldsymbol{p}^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} \qquad u = 4E^2 .$$

Im allgemeinen Fall beliebiger Geschwindigkeiten folgt für den Streuquerschnitt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^4}{16E^2} \Bigg\{ & \frac{(E^2+\boldsymbol{p}^2)^2}{\boldsymbol{p}^4}\frac{1}{\sin^4\vartheta/2} - \frac{8E^4-m^4}{\boldsymbol{p}^2E^2}\frac{1}{\sin^2\vartheta/2} \\ & - \frac{12E^4+m^4}{E^4} - \frac{4\boldsymbol{p}^2(E^2+\boldsymbol{p}^2)}{E^4}\sin^2\vartheta/2 + \frac{4\boldsymbol{p}^4}{E^4}\sin^4\vartheta/2\Bigg\} . \end{aligned}$$

[1] Jauch, J.; Rohrlich, F.: *The Theory of Photons and Electrons*. Cambridge, Ma.: Addison-Wesley, 1955.

Literatur

[1] Nachtmann, O.: *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik.* 1. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1986.

[2] Schwabl, F.: *Quantenmechanik für Fortgeschrittene: QM II.* 1. Aufl. Berlin u.a.: Springer, 1997.

[3] Aitchison, I.; Hey, A.: *Gauge Theories in Particle Physics.* 2. Aufl. Bristol u.a.: Adam Hilger, 1982.

[4] Kaku, M.: *Quantum Field Theory.* 1. Aufl. New York u.a.: Oxford University Press, 1993.

[5] Landau, L.; Lifschitz, E.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik.* Bd. 4: Quantenelektrodynamik. 5. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag, 1986.

[6] Folly, Y.: *Elektron-Elektron-Streuung.* Skriptum zum Vortrag im Rahmen des Seminars zur Kern- und Teilchentheorie. WWU Münster, SS 1998.