

Anpassungstest für Copulas

Anwendungen auf Finanzmarktdaten

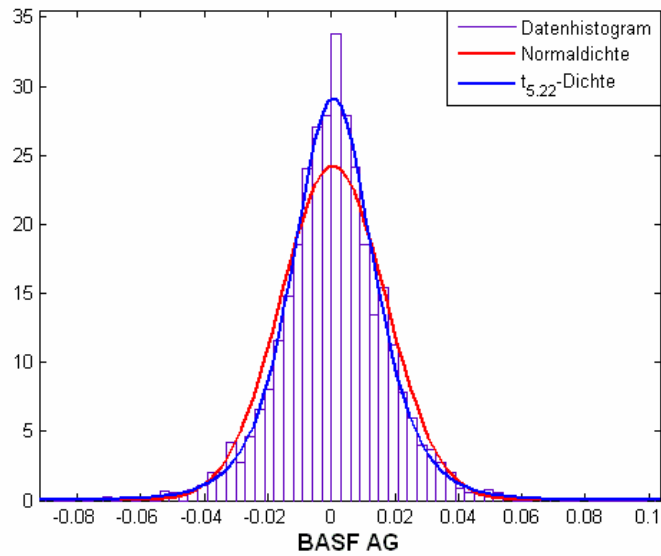
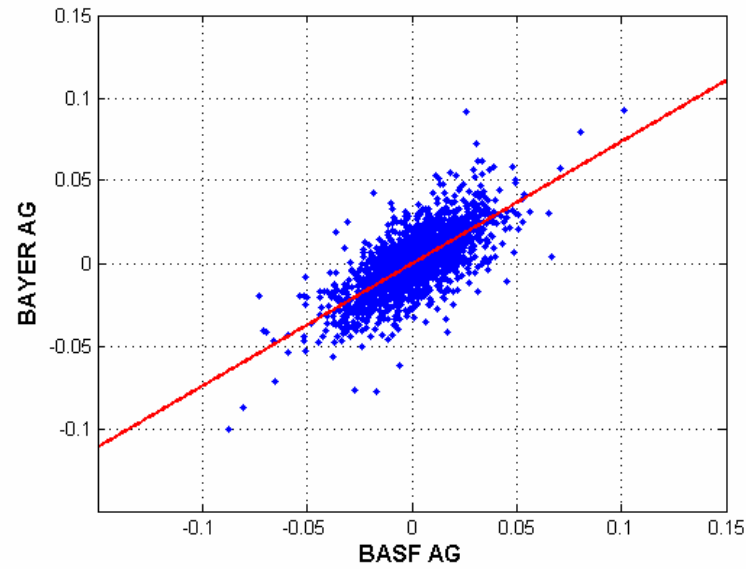
Seminar für Wirtschafts- und Sozialstatistik



Überblick

1. Definitionen, Einführung und Beispiele
2. Inferenz
3. Vorhandene Anpassungstest
4. Dobrić & Schmid (2005) modifizierter Chi-Quadrat Anpassungstest
5. Dobrić & Schmid (2007) Anpassungstest mittels Rosenblatt's MPI-Transformation



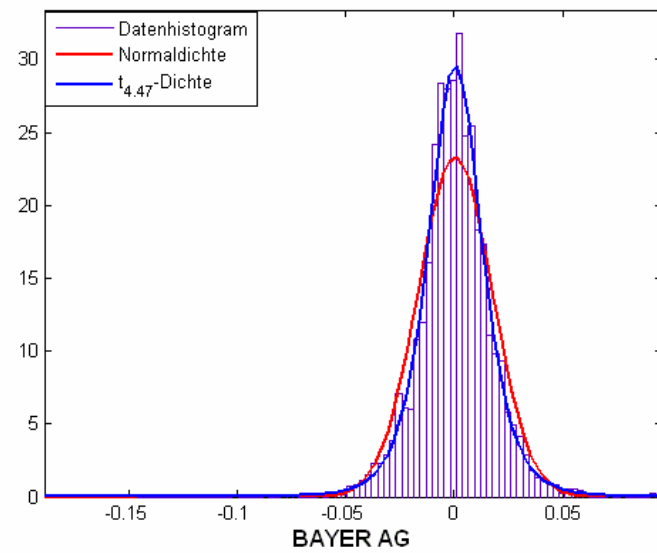


$$\rho_{BP} = 0.71$$

$$\rho_{SP} = 0.70$$

$$\tau = 0.53$$

$$\lambda_L = 0.21$$



1.1 Linearer Korrelationskoeffizient nach Bravais Pearson ρ_{BP}

$|\rho_{BP}|$ misst die Stärke des linearen Zusammenhangs

$$\rho_{BP}^2 = 1 - \frac{\min E[(X_2 - (a \cdot X_1 + b))^2]}{\text{Var}(X_2)} \in [0,1]$$

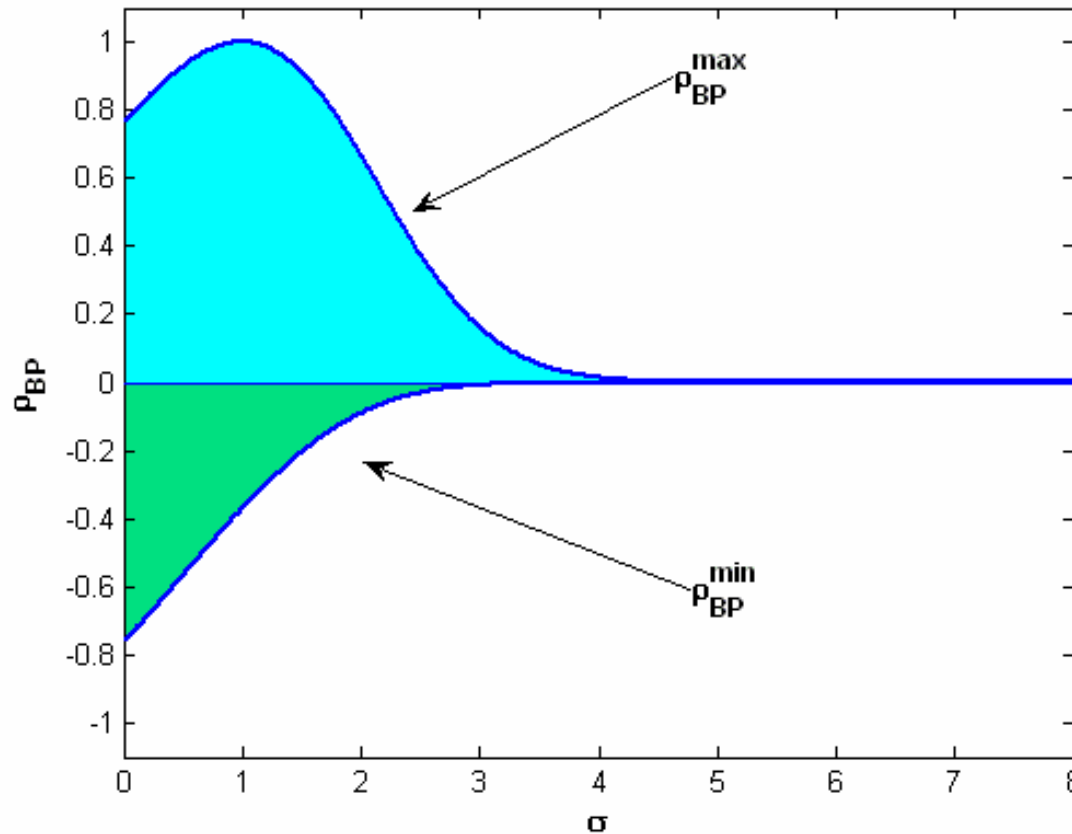
$$\rho_{BP}(T(X_1), X_2) \neq \rho_{BP}(X_1, X_2) \quad \rho_{BP} \in [\rho_{BP}^{\min}, \rho_{BP}^{\max}] \stackrel{i.A.}{\neq} [-1,1]$$

$$\rho_{BP} = \frac{1}{\sqrt{\text{var}(X_1)}\sqrt{\text{var}(X_2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F_X(x_1, x_2) - F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)] dx_1 dx_2$$



F_1 und F_2 fix, F_X variabel

$$X_1 \sim LN(0,1), \quad X_2 \sim LN(0,\sigma^2), \quad \sigma > 0$$



1.2 Separationstheorem von Sklar (1959)

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d)$$

$$C(u_1, \dots, u_d)$$

$$F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$$

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

$$C(u_1, \dots, u_d) = F_{\mathbf{X}}(F_1^{-1}(x_1), \dots, F_d^{-1}(x_d))$$

$$C(u_1, \dots, u_d)$$

$$F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$$

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d)$$



Copula

Ist eine d -dimensionale Verteilungsfunktion auf $[0,1]^d$ mit uniformen univariaten Randverteilungen.

Es gilt für die Funktion $C: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$:

1. Für jedes $\mathbf{u} \in [0,1]^d$ gilt $C(\mathbf{u})=0$ falls mindestens eine Koordinate von \mathbf{u} gleich Null ist.
2. Falls alle Koordinaten von \mathbf{u} gleich 1 sind, mit Ausnahme von u_i , dann gilt $C(\mathbf{u})= u_i$.
3. Für alle $\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_d)$ und $\mathbf{b}=(b_1, \dots, b_d)$ mit $a_i \leq b_i$, $i=1, \dots, d$, gilt $V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$.



Copuladichte (I)

Eine Funktion $c:[0,1]^d \rightarrow [0,\infty)$ mit

$$C(\mathbf{u}) = \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_d} c(s_1, \dots, s_d) ds_1 \dots ds_d$$

für $u_1, \dots, u_d \in [0,1]$ heißt Copuladichte.

Ist C d -mal partiell diff'bar, so gilt

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(\mathbf{u})}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$$



Copuladichte (II)

Besitzt $F_{\mathbf{X}}$ die Dichte $f_{\mathbf{X}}$ so gilt:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) = c(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)) \cdot \prod_{i=1}^d f_{X_i}(x_i)$$

und

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f_{\mathbf{X}}(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_d}^{-1}(u_d))}{\prod_{i=1}^d f_{X_i}(F_{X_i}^{-1}(u_i))}$$



1.3 Spezialfälle

Unabhängigkeit

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d F_{X_i}(x_i) \quad \forall x_i \in \text{dom}(F_{X_i})$$

$$C(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d u_i \quad \forall u_i \in [0,1]$$

Fréchet-Höfding Schranken

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^d F_i(x_i) - d + 1, 0 \right\} \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \leq \min \{ F_1(x_1), \dots, F_d(x_d) \}$$

$$W^d(\mathbf{u}) = \max \left\{ \sum_{i=1}^d u_i - d + 1, 0 \right\} \leq C(\mathbf{u}) \leq \min \{ u_1, \dots, u_d \} = M^d(\mathbf{u})$$



Bivariate logistische Verteilung

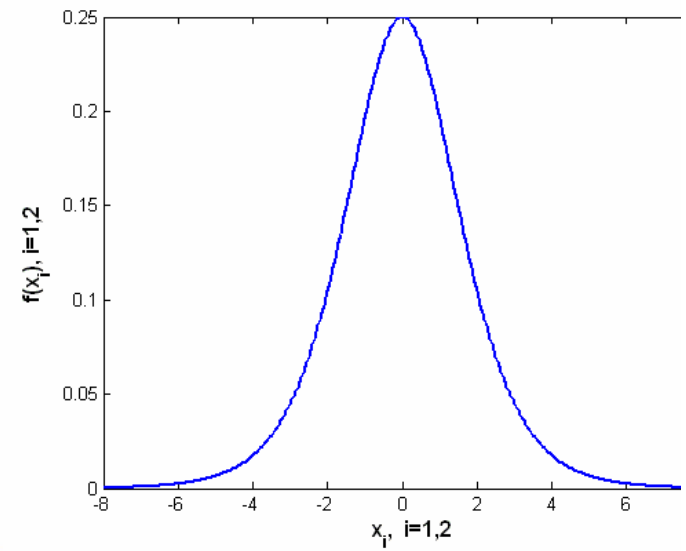
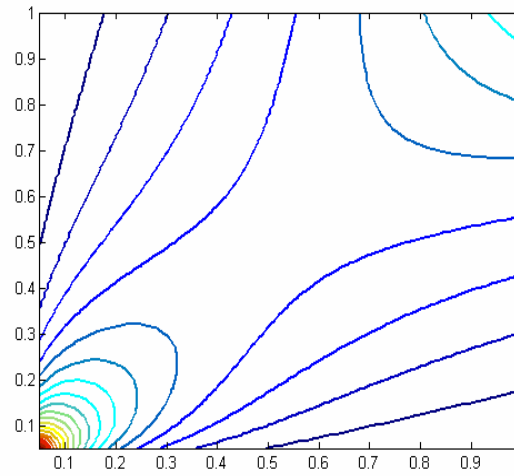
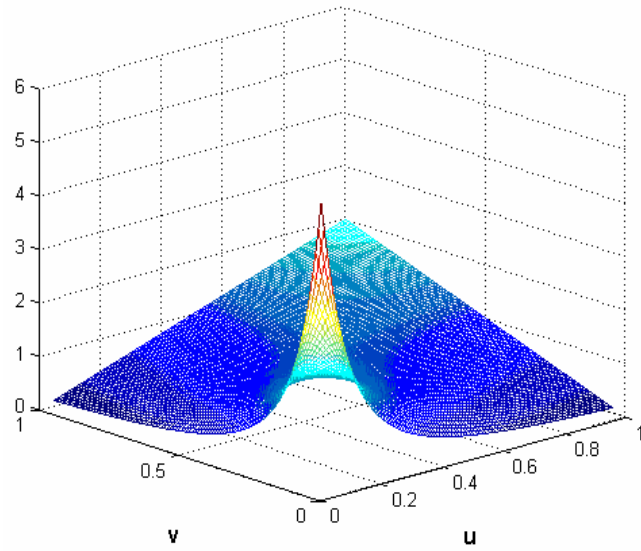
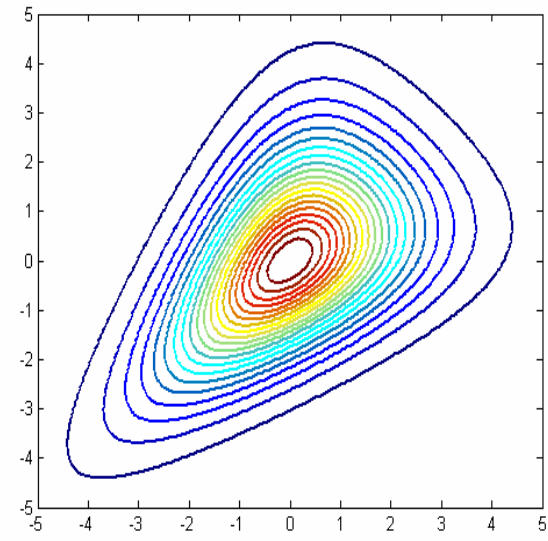
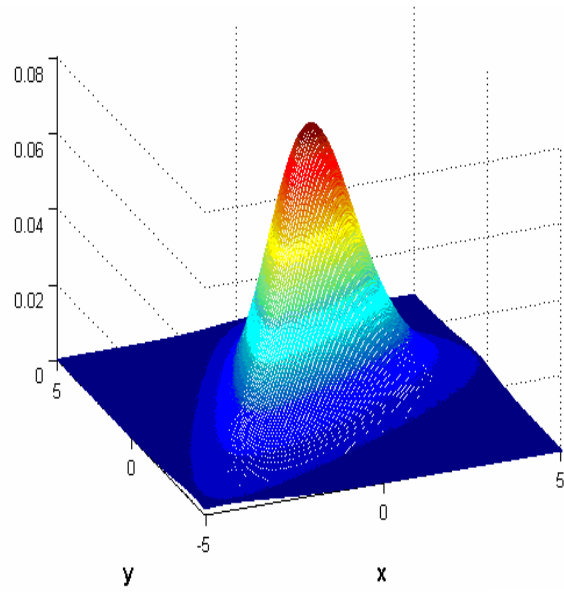
$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + \exp(-x_1) + \exp(-x_2)} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$F_i(x_i) = \frac{\exp(x_i)}{\exp(x_i) + 1} \quad F_i^{-1}(u_i) = \ln\left(\frac{u_i}{1 - u_i}\right)$$

$$C(u_1, u_2) = F_{\mathbf{X}}(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) = \frac{u_1 \cdot u_2}{u_1 + u_2 - u_1 \cdot u_2}$$

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)}{F_1(x_1) + F_2(x_2) - F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)}$$





Neue bivariate Verteilungsfunktion G mit Copula C

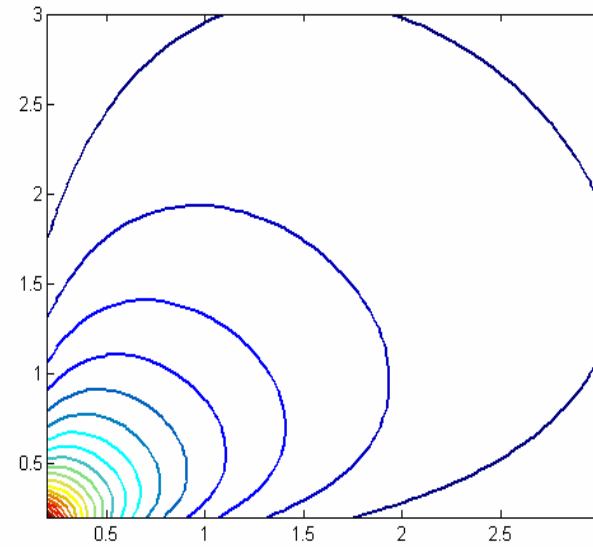
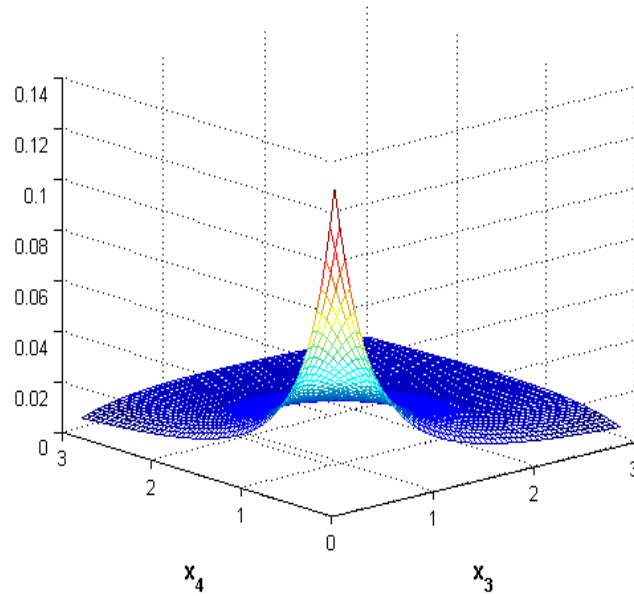
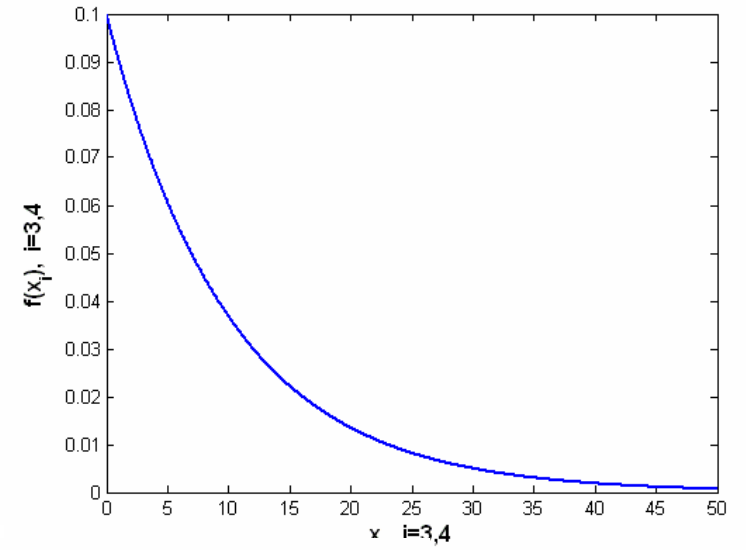
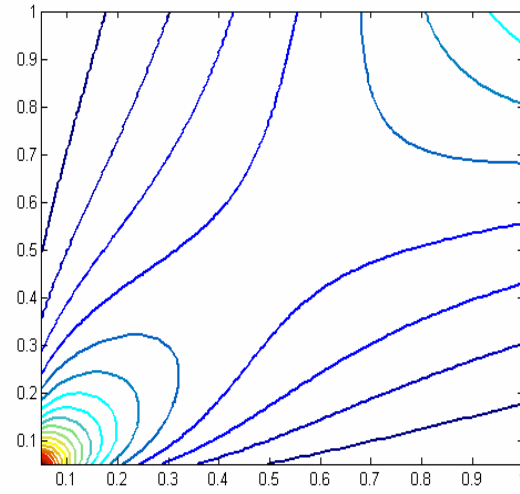
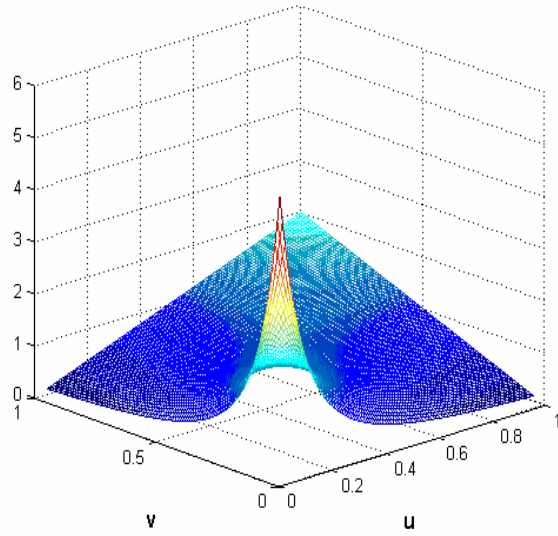
$$C(u_1, u_2) = F_{\mathbf{X}}(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) = \frac{u_1 \cdot u_2}{u_1 + u_2 - u_1 \cdot u_2}$$

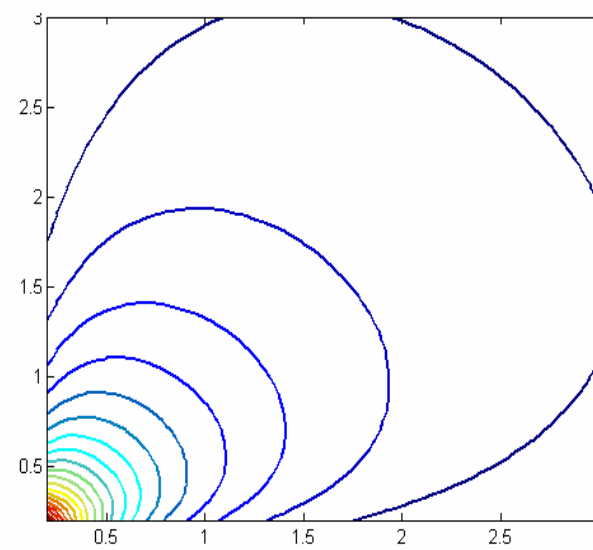
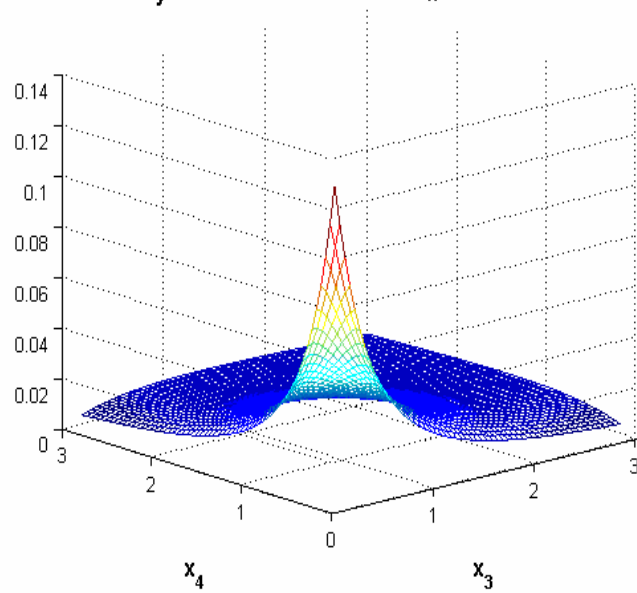
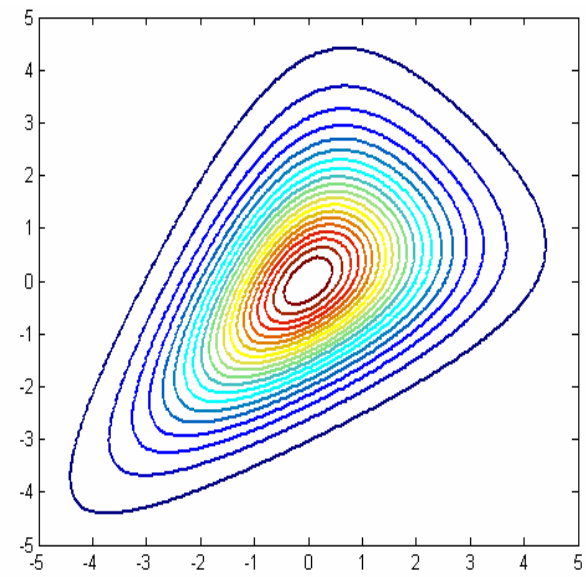
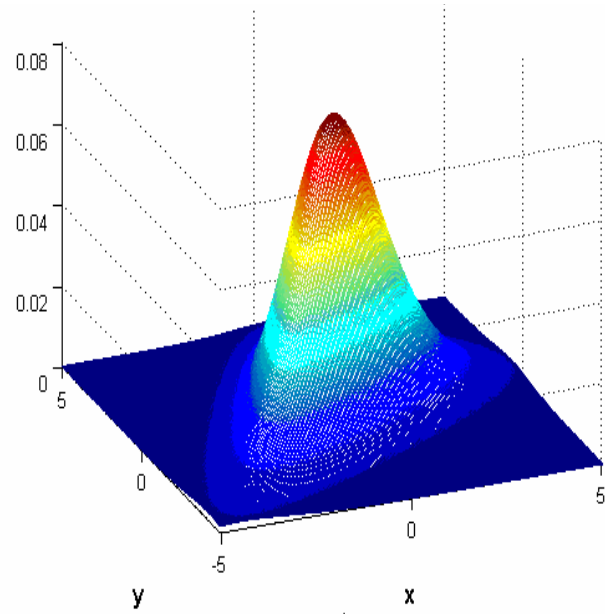
$$F_i(x_i; \lambda) = 1 - \exp(-\lambda \cdot x_i), \quad x_i \geq 0, \lambda > 0, \quad i = 3, 4.$$

$$G(x_3, x_4; \lambda) = C(F_3(x_3; \lambda), F_4(x_4; \lambda))$$

$$\frac{F_3(x_3) \cdot F_4(x_4)}{F_3(x_3) + F_4(x_4) - F_3(x_3) \cdot F_4(x_4)} = \frac{(\exp(-\lambda \cdot x_3) - 1) \cdot (\exp(-\lambda \cdot x_4) - 1)}{\exp(-\lambda \cdot (x_3 + x_4)) - 1}$$







1.4 Spezielle Copulaklassen

Archimedische Copulas:

Sei $\varphi:[0,1] \rightarrow [0,\infty)$, so dass $(-1)^{-i} \cdot \frac{d^i}{dt^i} \varphi^{-1}(t) \geq 0$

für $i=1,\dots,d$ und $t \in [0, \infty)$, mit $\varphi(1)=0$ und $\varphi(0)=\infty$,
dann ist C eine archimedische Copula:

$$C(\mathbf{u}) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \varphi(u_i) \right)$$



1. **Clayton** $\varphi(t; \vartheta) = t^{-\vartheta} - 1$, $\vartheta > 0$

$$C(\mathbf{u}; \vartheta) = \left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\vartheta} - d + 1 \right)^{-\frac{1}{\vartheta}}$$

$$\tau = \frac{\vartheta}{\vartheta + 2}$$

2. **Gumbel** $\varphi(t; \vartheta) = (-\ln t)^\vartheta$, $\vartheta \geq 1$

$$C(\mathbf{u}; \vartheta) = \exp \left(- \left[\sum_{i=1}^d (-\ln u_i)^\vartheta \right]^{\frac{1}{\vartheta}} \right)$$

$$\tau = \frac{\vartheta - 1}{\vartheta}$$



Elliptische Copulaklasse

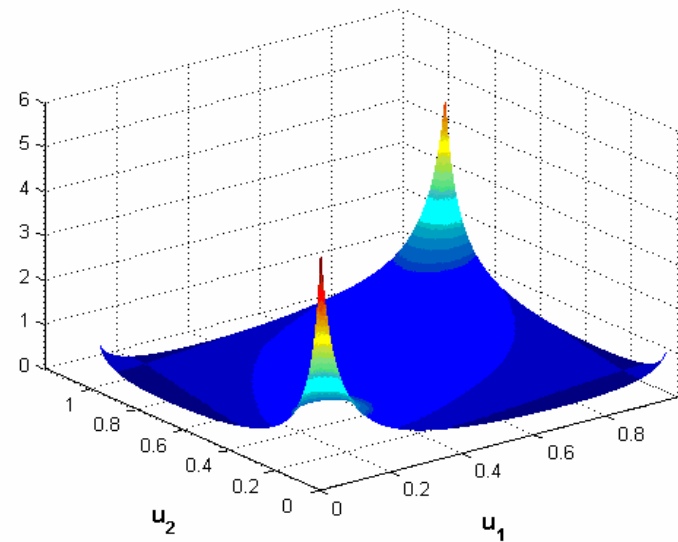
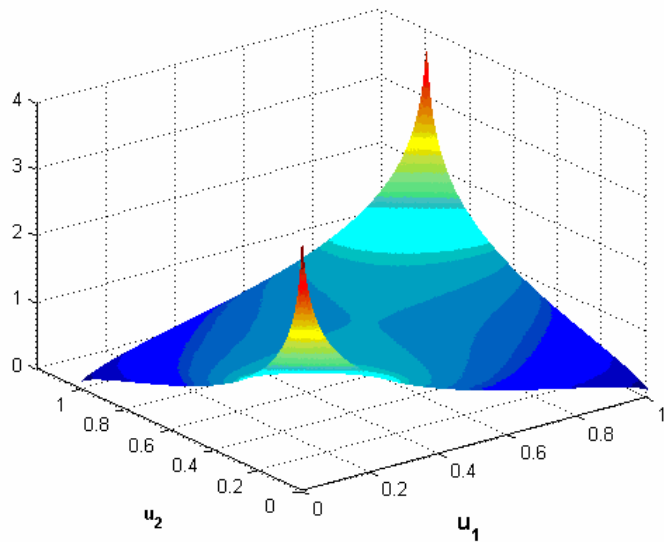
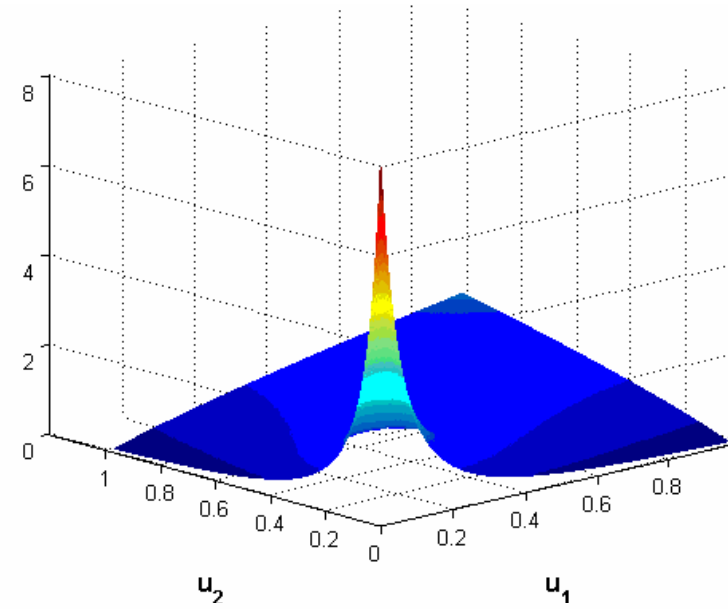
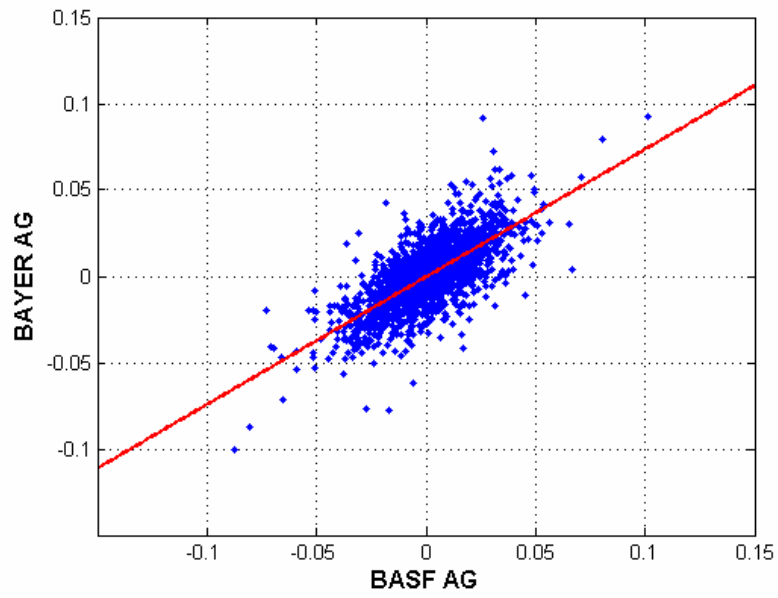
1. **Gauss Copula** $C_{\mathbf{R}}(\mathbf{u}) = \Phi_{\mathbf{R}}\left(\Phi_1^{-1}(u_1), \dots, \Phi_d^{-1}(u_d)\right)$

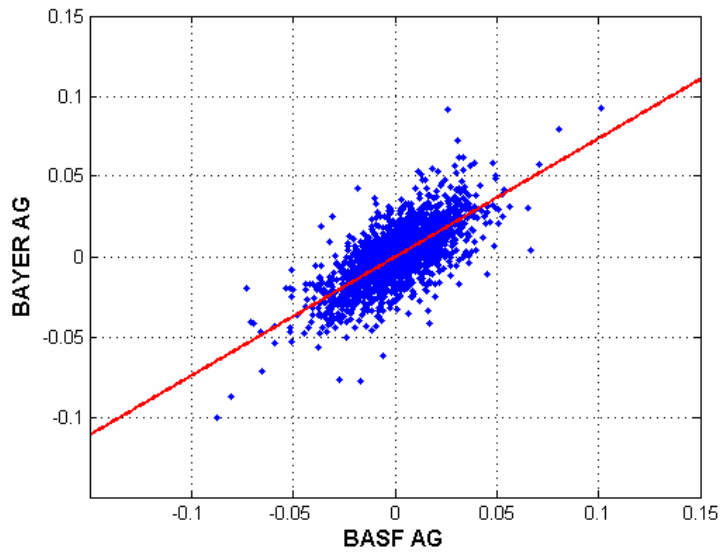
$$C_{\mathbf{R}}(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\Phi_1^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi_1^{-1}(u_d)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot |\mathbf{R}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right) dx_1 \dots dx_d$$

2. **$t_{\nu, \mathbf{R}}$ -Copula** $C_{\mathbf{R}, \nu}(\mathbf{u}) = t_{\mathbf{R}, \nu}\left(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d)\right)$

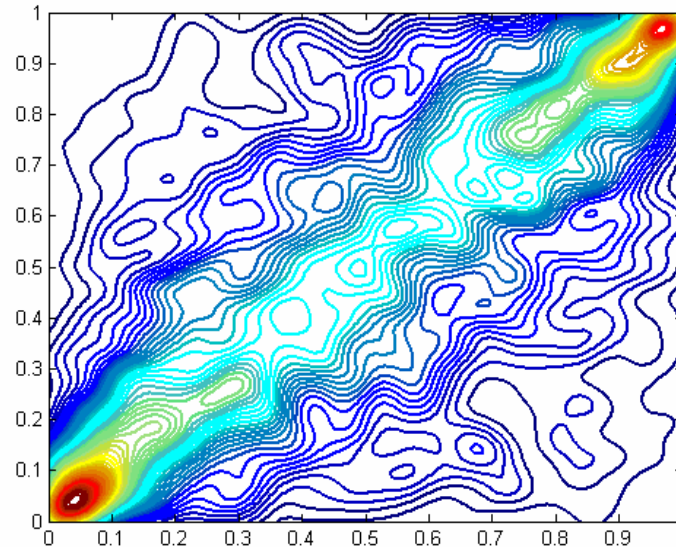
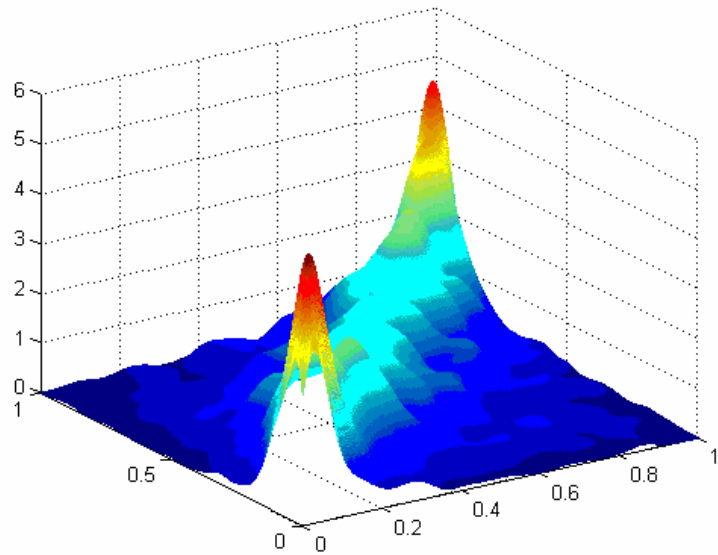
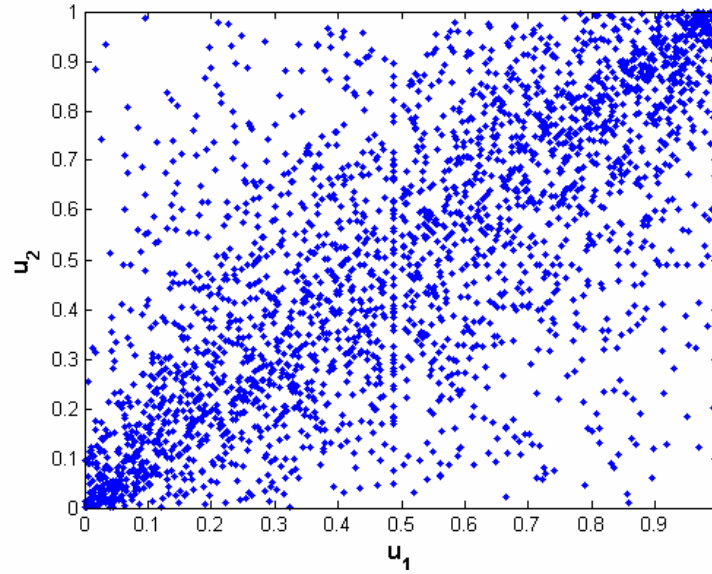
$$C_{\mathbf{R}, \nu}(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{t_1^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_1^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu + d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \cdot (\nu\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot |\mathbf{R}|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} dx_1 \dots dx_d$$







$$\begin{matrix} \hat{F}_1(x_1) \\ \hat{F}_2(x_2) \end{matrix} \rightarrow$$



2.1 Momentenmethode

1. Bestimme randverteilungsinvariante (copulaabhängige) Korrelationskoeffizienten β , z.B. τ , ρ_{SP} , λ_L oder λ_U aus der Originalstichprobe

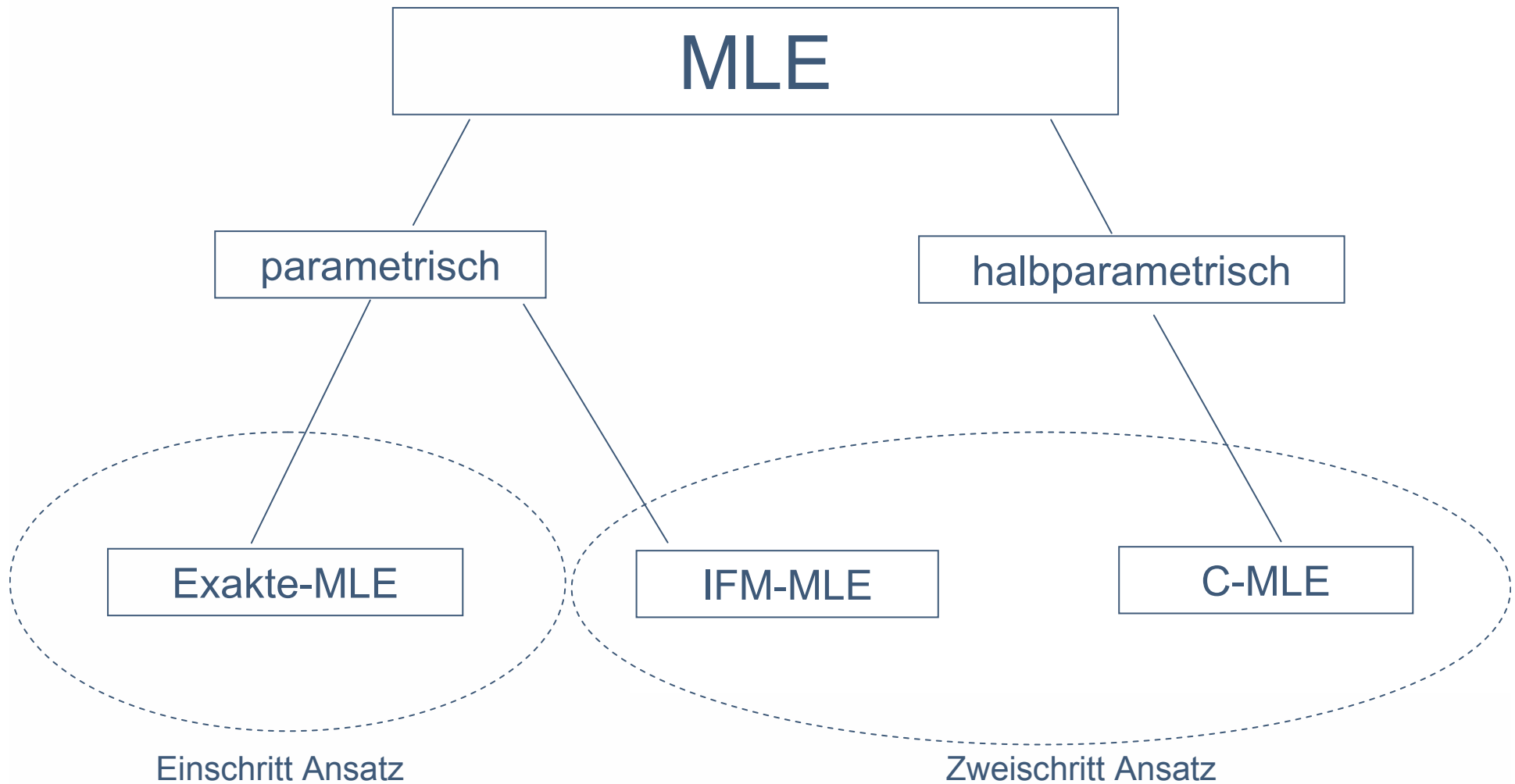
$$\beta(X_1, X_2) = \beta(U_1, U_2)$$

2. Leite aus der funktionalen Beziehung zur gewählten Copulafamilie den zu schätzenden Copulaparameter θ her

$$\theta = g(\beta) \longrightarrow \hat{\theta} = g(\hat{\beta})$$



2.2 Maximum Likelihood Schätzung



2.2 Maximum Likelihood Schätzung

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) = c(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)) \cdot \prod_{i=1}^d f_{X_i}(x_i)$$

parametrisch

halbparametrisch

$$\hat{\vartheta}_1 = \arg \max \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^d \ln f_i(x_{it}; \vartheta_1)$$

$$\hat{F}_i(x_{it}), i = 1, \dots, d$$

$$l = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}), \dots, F_d(x_{dt})) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^d \ln f_i(x_{it})$$

$$\hat{\vartheta}_{E-MLE} = \arg \max_{\vartheta \in \Theta} l(\vartheta)$$

$$\hat{\vartheta}_2 = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}), \dots, F_d(x_{dt}); \vartheta_2, \hat{\vartheta}_1)$$

$$\hat{\vartheta}_{CMLE} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{F}_1(x_{1t}), \dots, \hat{F}_d(x_{dt}); \vartheta)$$

$$\hat{\vartheta}_{IFM} = (\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2)^T$$

Einschritt Ansatz

Zweischritt Ansatz



Entscheidungshilfen

- Loglikelihood Wert

$$LL = \ln(L(\hat{\mathcal{G}}))$$

- Akaike Informationskriterium

$$AIC = -2 \cdot \ln(L(\hat{\mathcal{G}})) + 2 \cdot q$$

- Schwarz'sches Informationskriterium

$$SIC = 2 \cdot \ln(L(\hat{\mathcal{G}})) + q \cdot \ln(T)$$



2.3 Nichtparametrische distanzbasierende Methoden

Empirische Copula C_{emp} nach Deheuvels (1979)

$$C_{emp}\left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_d}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \prod_{i=1}^d 1_{\left[r_i^t \leq t_i\right]}$$

$$\sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} |C_{emp}(\mathbf{u}) - C(\mathbf{u})| \xrightarrow{a.s.} 0$$



Selektionskriterien

$$\hat{\mathcal{G}} = \arg \min_{\mathcal{G} \in \Theta} d(C_{emp}(\mathbf{u}), C(\mathbf{u}; \mathcal{G}))$$

$$d_T^p(C_{emp}, C) = \left[\sum_{t_1=1}^T \cdots \sum_{t_d=1}^T \left| C_{emp}\left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_d}{T}\right) - C\left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_d}{T}; \mathcal{G}\right) \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Nachteile:

Auswertung von $M = T^d$ –Grid Punkten in jedem Iterations-schritt notwendig!

$T=1000$, $d=2$ \square $M=1$ Million,

$d=3$ \square $M=1$ Milliarde Auswertungen.



3.1 Fermanian et al. (2002 & 2005)

Empirischer Copula Prozess

$$\sqrt{T} \cdot (C_{emp}(\mathbf{u}) - C(\mathbf{u})) \rightarrow G_C(\mathbf{u})$$

Empirischer Copulakerndichte Prozess

$$\left(T \cdot h^d\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (c_{ker}(\mathbf{u}) - c(\mathbf{u})) \rightarrow N(\mathbf{0}, \Sigma)$$



Fermanian's Anpassungstest

- Zwei Anpassungstests basierend auf dem empirischen Copulakerndichte Prozess
- Beide Teststatistiken sind äußerst kompliziert
- Vor Anwendung a priori Schätzung des Copulaparameters notwendig (MLE wird vorgeschlagen)
- Asymptotisch einwandfrei, aber bei endlichen Stichproben ?



Simulationsergebnisse

$$C(u_1, u_2; \lambda, \theta) = \lambda \cdot \Pi(u_1, u_2) + (1 - \lambda) \cdot C^{Frank}(u_1, u_2; \theta)$$

λ	θ	1.Test	2.Test
0.0	5	0.00	0.02
	15	0.00	0.01
	25	0.00	0.08
0.5	5	0.07	0.12
	15	0.58	0.71
	25	0.95	1.00
0.9	5	0.02	0.01
	15	0.06	0.00
	25	0.37	0.03



3.2 Multivariate Probability Integral Transformation (MPIT) nach Rosenblatt (1952)

$$(X_1, \dots, X_d) \sim F_{\mathbf{X}} \quad X_i \sim F_i, \quad i = 1, \dots, d$$

$$z_1 = T(x_1) = P(X_1 \leq x_1) = F_{X_1}(x_1)$$

$$z_2 = T(x_2) = P(X_2 \leq x_2 \mid X_1 = x_1) = F_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$z_d = T(x_d) = P(X_d \leq x_d \mid X_1 = x_1, \dots, X_{d-1} = x_{d-1}) = F_{X_d|X_1, \dots, X_{d-1}}(x_d \mid x_1, \dots, x_{d-1})$$

$$Z_i = T(X_i), \quad i = 1, \dots, d, \quad \text{u.i.v. } U(0,1)$$

$$(Z_1, \dots, Z_d) \sim \Pi \quad \text{oder} \quad W = \sum_{i=1}^d [\Phi^{-1}(Z_i)]^2 \sim \chi_d^2$$



Chen et al. (2004)

MPIT auf Kerndichtebasis

$$C(u_1, u_2; \lambda, \rho) = \lambda \cdot C_{t, \rho}(u_1, u_2) + (1 - \lambda) \cdot C_{\rho}^{Gauss}(u_1, u_2)$$

λ	ρ	T_d Test			T_1 Test		
		500	2500	5000	500	2500	5000
0	0.1	0.00	0.02	0.06	0.00	0.02	0.02
	0.5	0.00	0.03	0.03	0.01	0.02	0.04
	0.9	0.00	0.00	0.02	0.00	0.02	0.02
0.5	0.1	0.02	0.00	0.06	0.00	0.01	0.05
	0.5	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.15
	0.9	0.00	0.02	0.12	0.00	0.01	0.15
1	0.1	0.00	0.53	1.00	0.00	0.51	0.99
	0.5	0.00	0.52	0.99	0.00	0.68	1.00
	0.9	0.02	0.78	1.00	0.05	0.82	1.00



3.3 Malervegne und Sornette (2003 & 2006)

$$H_0 : C(\mathbf{u}) = C^{Gauss}(\mathbf{u}; \rho) \text{ für ein } \rho$$

$$H_1 : C(\mathbf{u}) \neq C^{Gauss}(\mathbf{u}; \rho) \text{ für alle } \rho$$

$$Y = \sum_{i,j=1}^d \Phi^{-1}[F_i(X_i)] \cdot (\boldsymbol{\rho})_{ij}^{-1} \cdot \Phi^{-1}[F_j(X_j)] \sim \chi_d^2$$

$$\rho_{ij} = Cov[\Phi^{-1}(F_i(X_i)), \Phi^{-1}(F_j(X_j))]$$

- Benutzung empirischer Randverteilungen
- Überprüfung anhand Anderson-Darling oder Kolmogorov Testsstatiken
- Durch Bootstraping Ermittlung der neuen asymptotischen Verteilung



Ergebnisse

- Simulationen halten den α -Fehler nicht ein
- Schlechte "Power" bzgl. der t_v -Copula
- Empirische Untersuchung an 22 Aktien der NYSE (231 bivariate Paare)
- Tagesrenditen vom Feb. '91 bis Dez. 2000.
□ $T=2500$
- 75% wird die Gausscopula nicht verworfen
- 99% für die ersten 5 Jahre
- 92% für die letzten 5 Jahre



4. Dobrić, Schmid (2005) Modifizierter Chi-Square Test

$$H_0 : C(u, v) = C(u, v; \mathcal{G}) \text{ für ein } \mathcal{G} \in \Theta$$

$$H_1 : C(u, v) \neq C(u, v; \mathcal{G}) \text{ für alle } \mathcal{G} \in \Theta$$

$$(U_t, V_t) := (F_X(X_t), F_Y(Y_t))$$

falls F_X, F_Y bekannt

$$(\hat{U}_t, \hat{V}_t) := (\hat{F}_X(X_t), \hat{F}_Y(Y_t))$$

falls F_X, F_Y unbekannt

Sei B_{ij} , mit $i=1, \dots, r$ und $j=1, \dots, s$ eine Zerlegung von $[0, 1]^2$, in $r \cdot s$ Rechtecke identischer Größe

$$p_{ij}(\mathcal{G}) = P((U, V) \in B_{ij} \mid \mathcal{G}) = \iint_{B_{ij}} dC(u, v; \mathcal{G})$$



Vorgehensweise

$$N_{ij} = \text{Anzahl}(U_t, V_t) \text{ in } B_{ij}$$

$$\hat{N}_{ij} = \text{Anzahl}(\hat{U}_t, \hat{V}_t) \text{ in } B_{ij}$$

$$\chi_{emp}^{2[A]}(\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(N_{ij} - T \cdot p_{ij}(\mathcal{G}))^2}{T \cdot p_{ij}(\mathcal{G})}$$

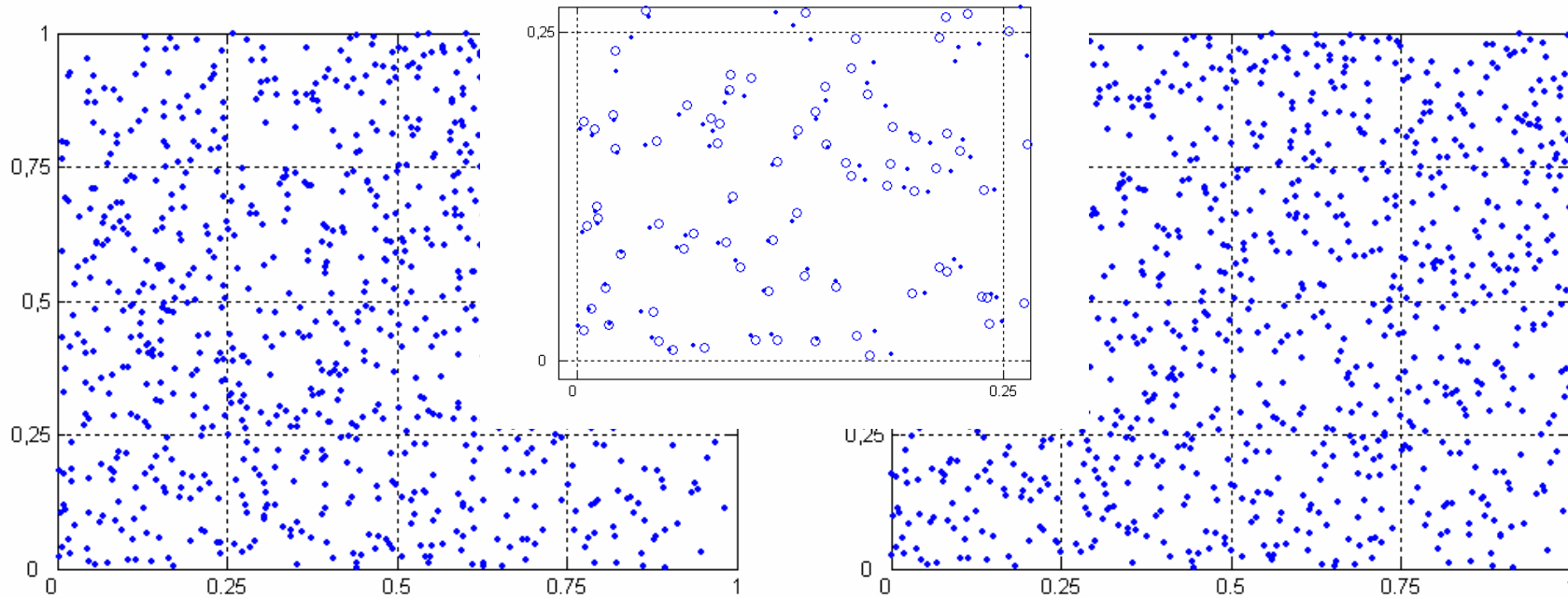
$$\chi_{emp}^{2[B]}(\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(\hat{N}_{ij} - T \cdot p_{ij}(\mathcal{G}))^2}{T \cdot p_{ij}(\mathcal{G})}$$

$$\hat{\mathcal{G}}^{[A]} = \arg \min_{\mathcal{G} \in \Theta} \chi_{emp}^{2[A]}(\mathcal{G})$$

$$\hat{\mathcal{G}}^{[B]} = \arg \min_{\mathcal{G} \in \Theta} \chi_{emp}^{2[B]}(\mathcal{G})$$

$$\chi_{emp}^{2[A]}(\hat{\mathcal{G}}^{[A]}) \rightarrow \chi_{r \cdot s - 1 - q}^2$$

$$\chi_{emp}^{2[B]}(\hat{\mathcal{G}}^{[B]}) \rightarrow \chi_{r \cdot s - 1 - q - (r-1) - (s-1)}^2$$



42	48	64	73	227
58	64	60	82	264
62	73	63	50	248
67	72	68	54	261
229	257	255	259	1000

48	57	67	78	250
65	53	59	73	250
65	75	59	51	250
72	65	65	48	250
250	250	250	250	1000

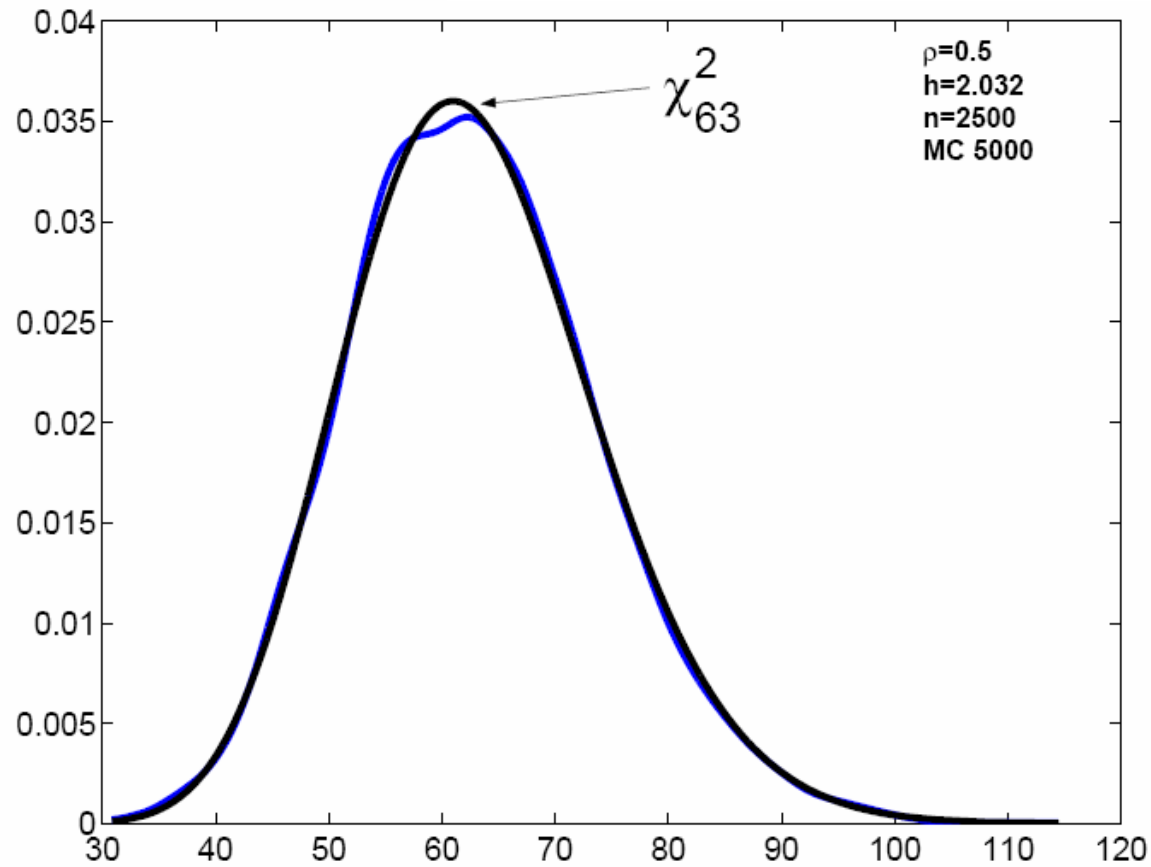
Simulationsergebnisse

$$C^{Gauss}(u, v; \rho), \quad T = 2500, \quad M = 5000, \quad r = s = 9 \quad \Rightarrow \quad \nu = 63$$

ρ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Emp. Mittel.	62.7	63.2	62.9	63.3	63.2	62.9
Emp. Varianz	125.6	123.7	124.2	126	127	125.3
	Verwerfungshäufigkeit					
$\alpha = 0.10$	0.095	0.101	0.097	0.100	0.103	0.094
$\alpha = 0.05$	0.045	0.053	0.045	0.051	0.055	0.046
$\alpha = 0.01$	0.008	0.010	0.011	0.013	0.010	0.019

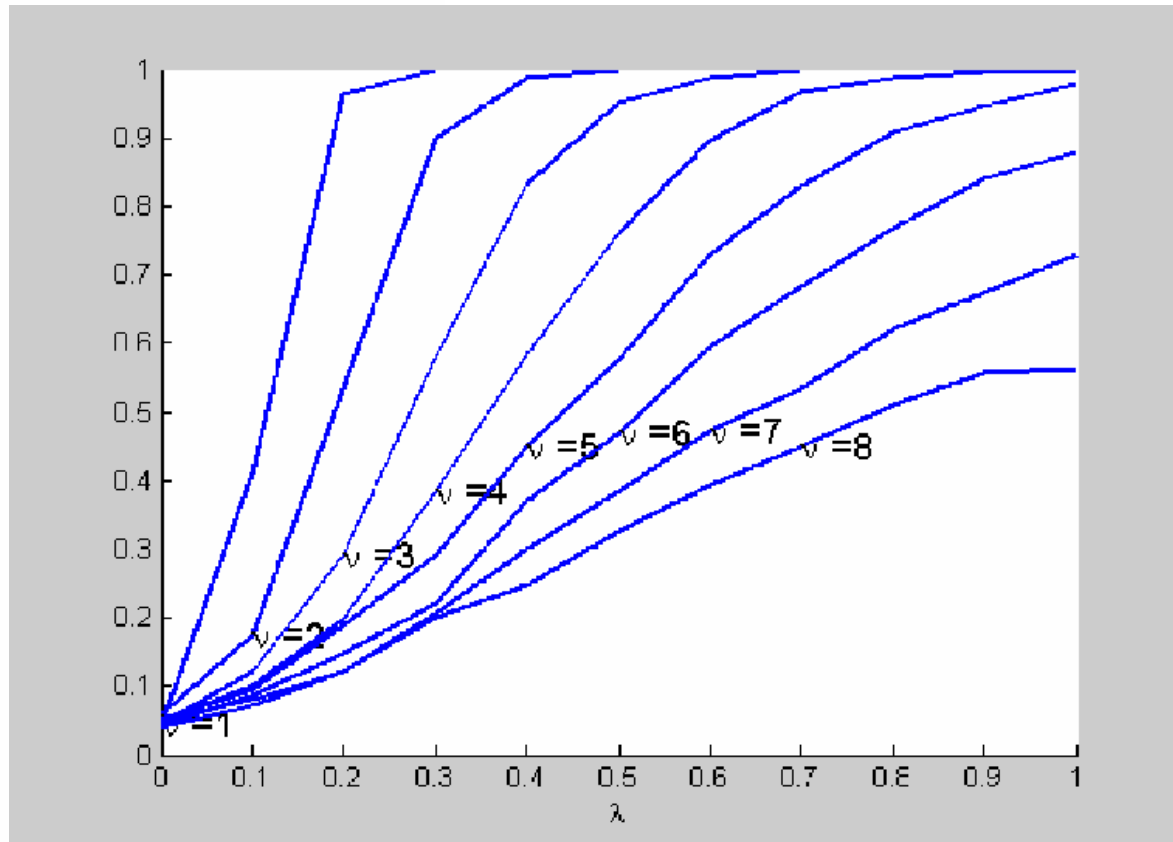


Kerndichte gg. theoretische Dichte



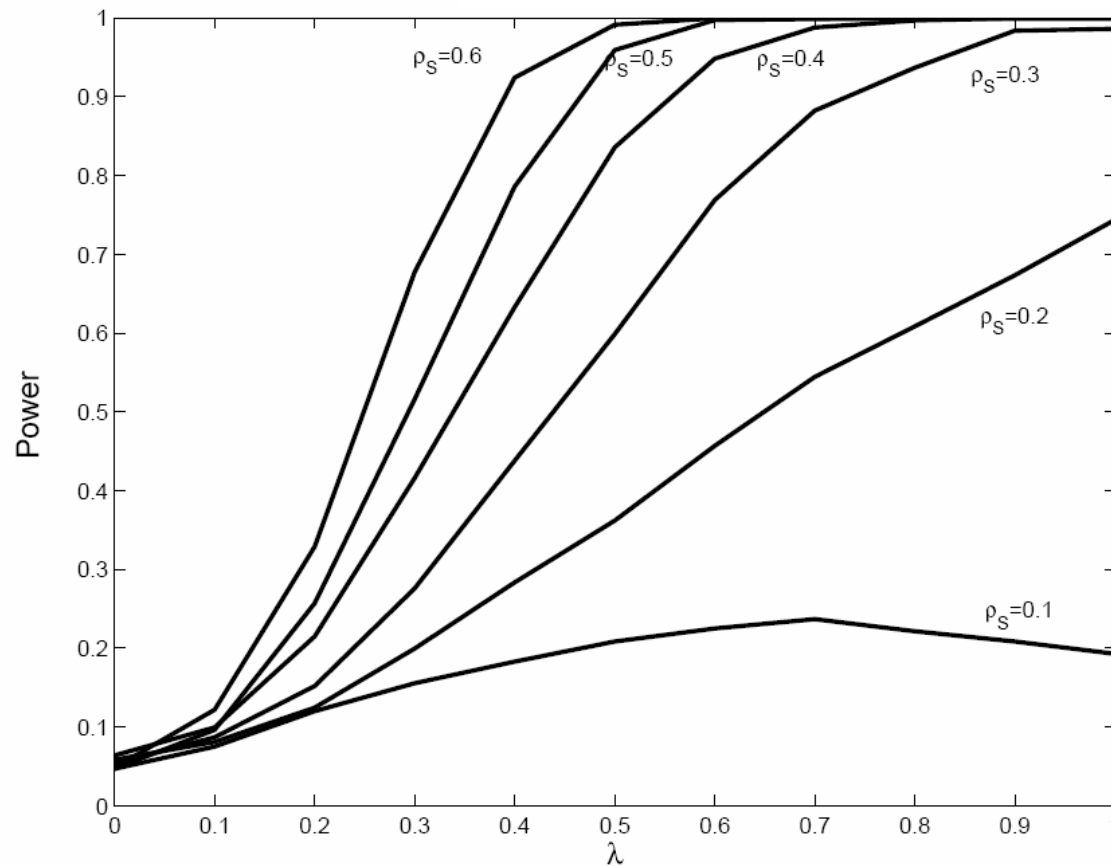
$$H_0 : C(u, v) = C^{\text{Gauss}}(u, v; \rho)$$

$$H_1 : (1 - \lambda) C^{\text{Gauss}}(u, v; \rho) + \lambda C^t(u, v; \nu, \rho) \quad \text{für } \lambda \in [0, 1]$$



$$H_0 : C(u, v) = C^{\text{Gauss}}(u, v; \rho)$$

$$H_1 : (1 - \lambda) C^{\text{Gauss}}(u, v; \rho) + \lambda C^{\text{Clayton}}(u, v; \theta) \quad \text{für } \lambda \in [0, 1]$$



DAX 30 Untersuchung

- Zeitraum vom Feb. 92 bis Feb. 02
- Tageslogrenditen $\square T=2523$
- 8 AG insbesondere $\square 28$ bivariate Paare
- Getestet auf Clayton, Frank, Gumbel und Farlie Morgenstern Copula \square jeweils 28 verworfen !
- Test auf Gauss Copula \square jeweils 28 verworfen !
- Test auf t_ν -Copula, $\nu=1, \dots, 20$

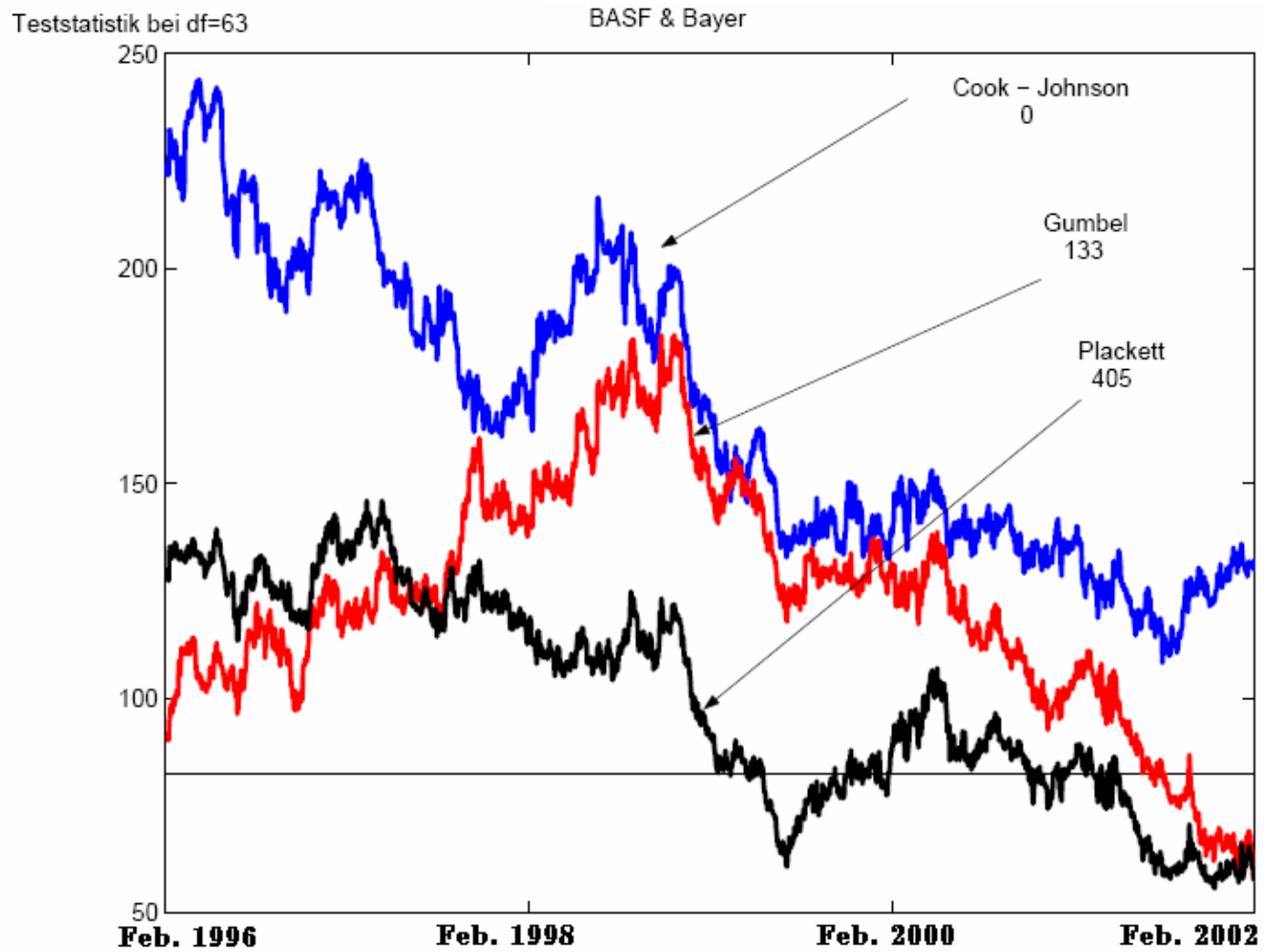
ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	28	27	14	14	18	19	22	24	24	24
ν	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	25	25	25	25	25	26	26	26	26	26

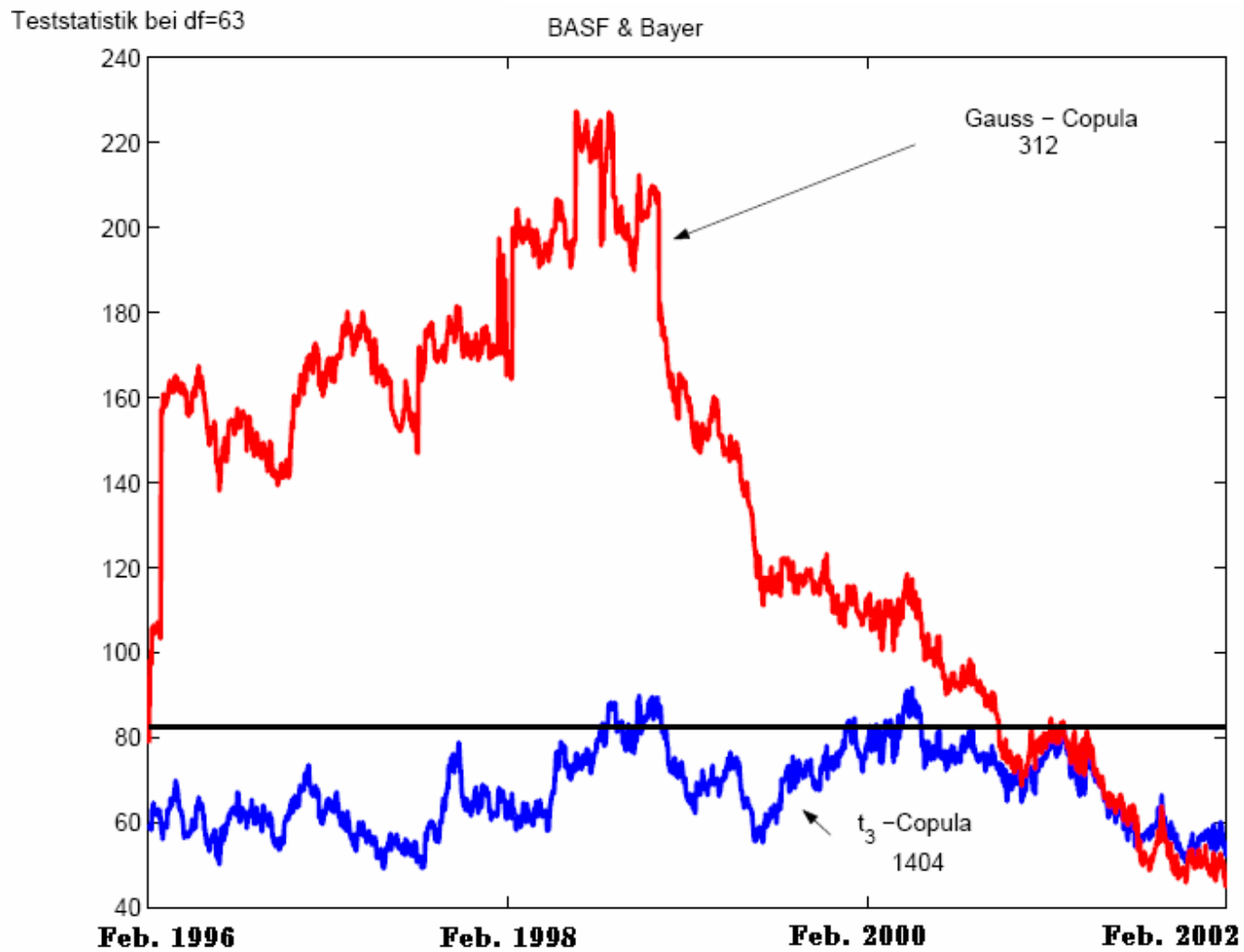


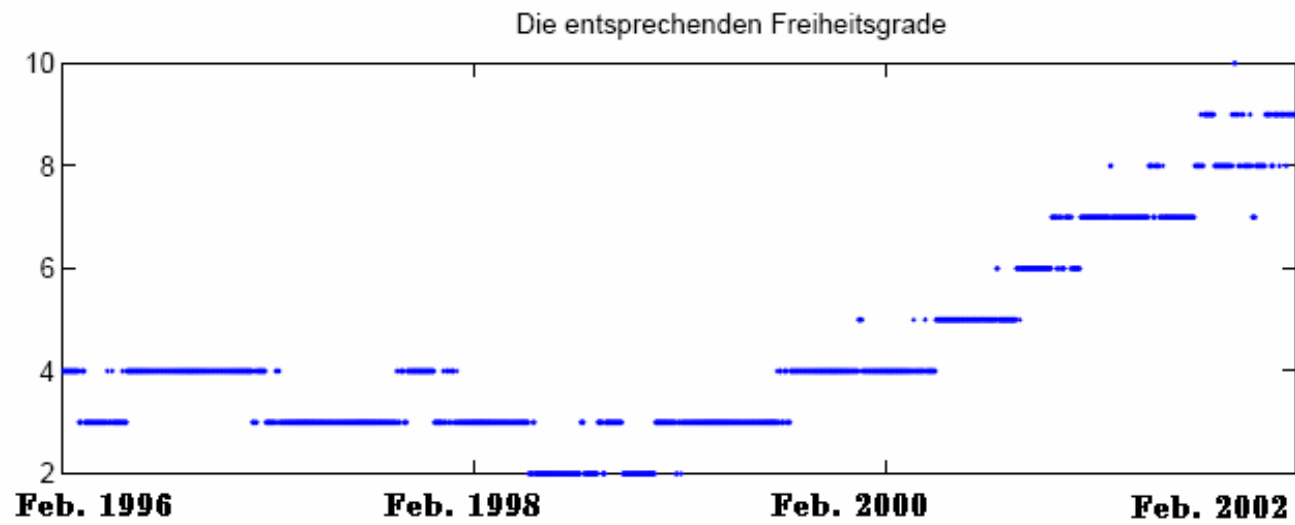
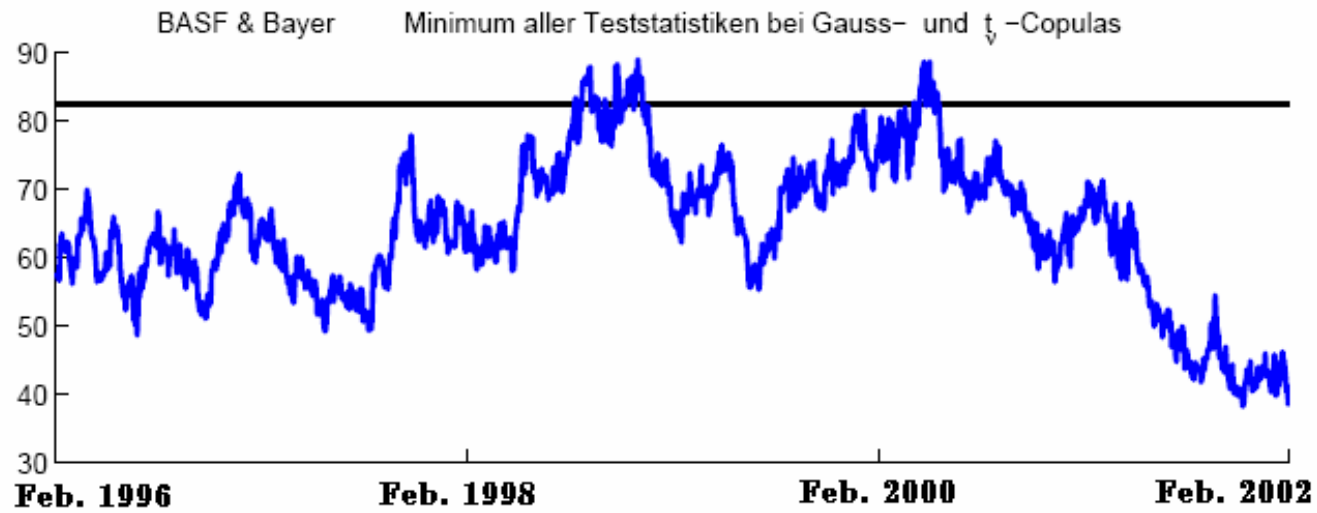
DAX 30 Backtestinguntersuchung

- Zeitliche Veränderung der Abhängigkeitsstruktur vom Feb. 1996 bis Feb. 2002
- Ausgewähltes Zeitfenster beträgt 4 Jahre $\square T=1000$
- Insgesamt 1523 Beobachtungszeitpunkte
- Klasseneinteilung $r=s=9$
- Getestet auf die Clayton, Gumbel, Plackett, Gauss und “diskrete“ t_v -Copula, $v=1, \dots, 20$









5. Dobrić, Schmid (2007)

Anpassungstest mittels MPIT nach Rosenblatt

- Ausgangspunkt $(U_1, C_2(U_2 | U_1), \dots, C_d(U_d | U_1, \dots, U_{d-1})) \sim \Pi$
- Dimensionsreduktion durch

$$W = \sum_{i=1}^d [\Phi^{-1}(Z_i)]^2 \sim \chi_d^2$$

- Überprüfung der Chi-Quadrat Verteilung durch die Anderson Darling Teststatistik

$$A_T = -T - \left(\frac{1}{T}\right) \cdot \sum_{j=1}^T (2 \cdot j - 1) \cdot [\ln(h_j) + \ln(1 - h_{T-j+1})]$$

$$\text{mit } h_j = G(w_j), j = 1, \dots, T$$



Gausscopula mit T= 2500 und M=5000

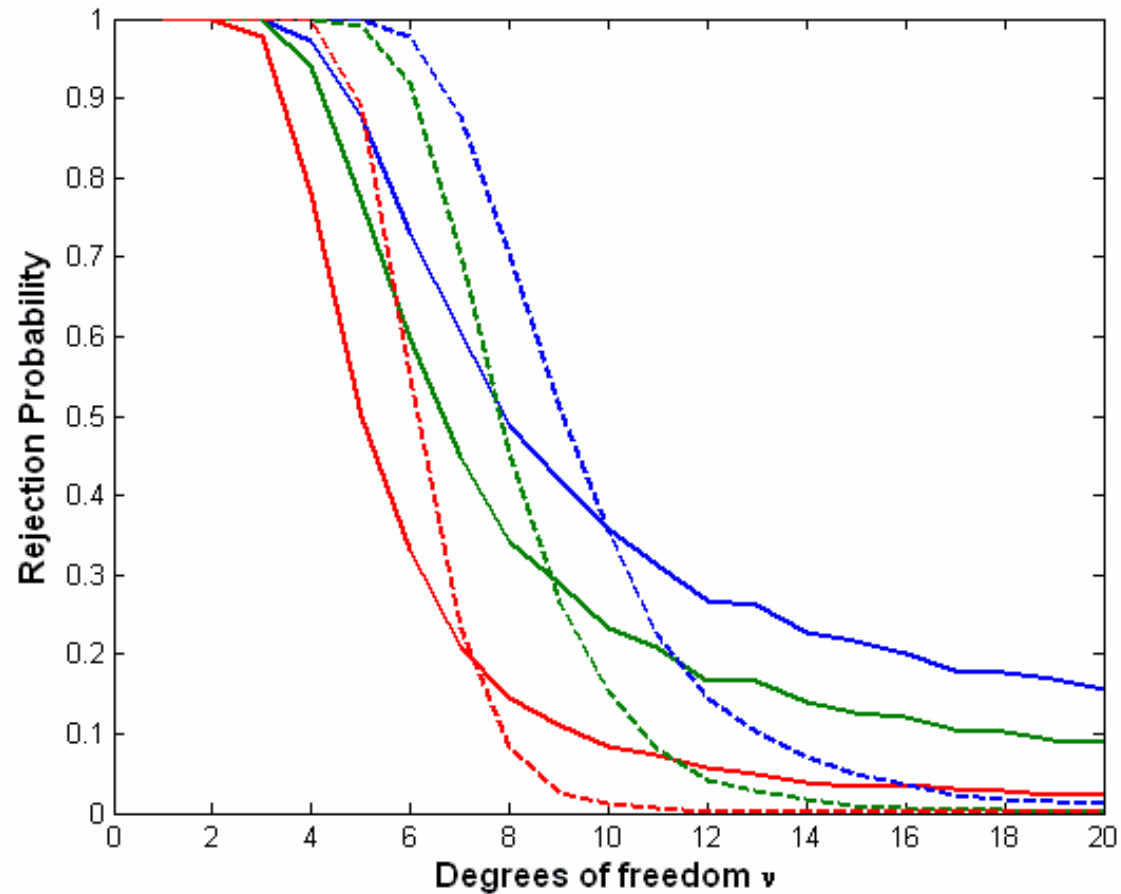
$$\lim_{T \rightarrow \infty} A_T^A = A$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A_T^B \neq A$$

	F _{xi} ; ρ bekannt			F _{xi} ; ρ unbekannt		
ρ\α	α=.1	α=.05	α=.01	α=.1	α=.05	α=.01
ρ = 0	.10	.05	.01	.00	.00	.00
ρ = .2	.11	.06	.01	.00	.00	.00
ρ = .4	.10	.05	.01	.00	.00	.00
ρ = .6	.10	.05	.01	.00	.00	.00
ρ = .8	.10	.05	.01	.00	.00	.00



Poweruntersuchung für die bivariate Gauss Copula gegen die t-Copula, $\nu=1, \dots, 20$, $\rho=0.8$



Bootstrap Verfahren

1. Schätze durch die Momentenmethode den Copulaparameter θ_T und A_T aus der Originalstichprobe
2. Generiere u.i.v. Beobachtungen aus einer zu testenden Copula mit dem geschätztem Parameter θ_T
3. Bestimme θ^* und A^* aus der generierten Stichprobe
4. Wiederhole die Schritte 2 und 3 B -mal, mit B als die Anzahl der Bootstrap Wiederholungen
5. Die Nullhypothese wird verworfen falls, $A_T > A^*_{(1-\alpha)}$ ist. Die kritischen Werte entsprechen den gebootstraptten empirischen $(1-\alpha)$ -Quantilen



Simulationsergebnisse

		Verwerfungshäufigkeit					
N_B	α	unter H_0		gg. t_{10}		gg. Clayton	
		$\rho_{SP}=0.4$	$\rho_{SP}=0.8$	$\rho_{SP}=0.4$	$\rho_{SP}=0.8$	$\rho_{SP}=0.4$	$\rho_{SP}=0.8$
500	0.10	0.09	0.10	0.93	0.97	0.76	1
1000		0.10	0.10	0.95	0.98	0.80	1
2500		0.10	0.10	0.95	0.98	0.80	1
500	0.05	0.04	0.05	0.88	0.94	0.63	1
1000		0.05	0.05	0.91	0.95	0.68	1
2500		0.05	0.05	0.91	0.95	0.69	1
500	0.01	0.01	0.01	0.73	0.82	0.36	1
1000		0.01	0.01	0.74	0.85	0.38	1
2500		0.01	0.01	0.74	0.85	0.39	1



DAX 30 Untersuchung

- Clayton Copula wird 28 mal verworfen
- Gauss Copula wird 28 mal verworfen
- t_{ν} , $\nu=1, \dots, 20$?

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	28	28	25	21	21	24	25	27	28	28

- Bestätigung aller Untersuchungen des modifizierten Chi-Square Tests



Literaturhinweise

Kap. 1: Nelsen, R. B. (2006) **An Introduction to Copulas**. Second Edition. Springer, New York.

Joe, H. (1997) **Multivariate Models and Dependence Concepts**. Chapman & Hall, London.

Kap. 2: Joe, H. (2005) **Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models**.

Journal of multivariate Analysis. Vol 94, p. 401-419.

Deheuvels, P. (1979) **La fonction de dépendance empirique et ses propriétés- un test non paramétrique d'indépendance**. Académie Royale de Belgique-Bulletin de la Classe des Sciences, 5th ser. 65, pp. 274-292.



Literaturhinweise

Kap. 3: Fermanian, J.-D., Radulović, D., Wegkamp, M. (2002) **Weak convergence of empirical copula processes**. CREST.

Fermanian, J.-D. (2005) **Goodnes-of-fit tests for copulas**. Journal of multivariate Analysis. Vol 95, pp. 119-152.

Chen, X., Fan, Y., Patton, A. (2004) **Simple Tests for Models of Dependence Between Multiple Financial Times Series**.

Malevergne, Y., Sornette, D. (2003) **Testing the Gaussian Copula hypothesis for financial assets dependence**. Quantitative Finance. Vol 3, pp. 62-72.

Malevergne, Y., Sornette, D. (2006) **Extreme Financial Risk – From Dependence to Risk Management**. Springer. New York.

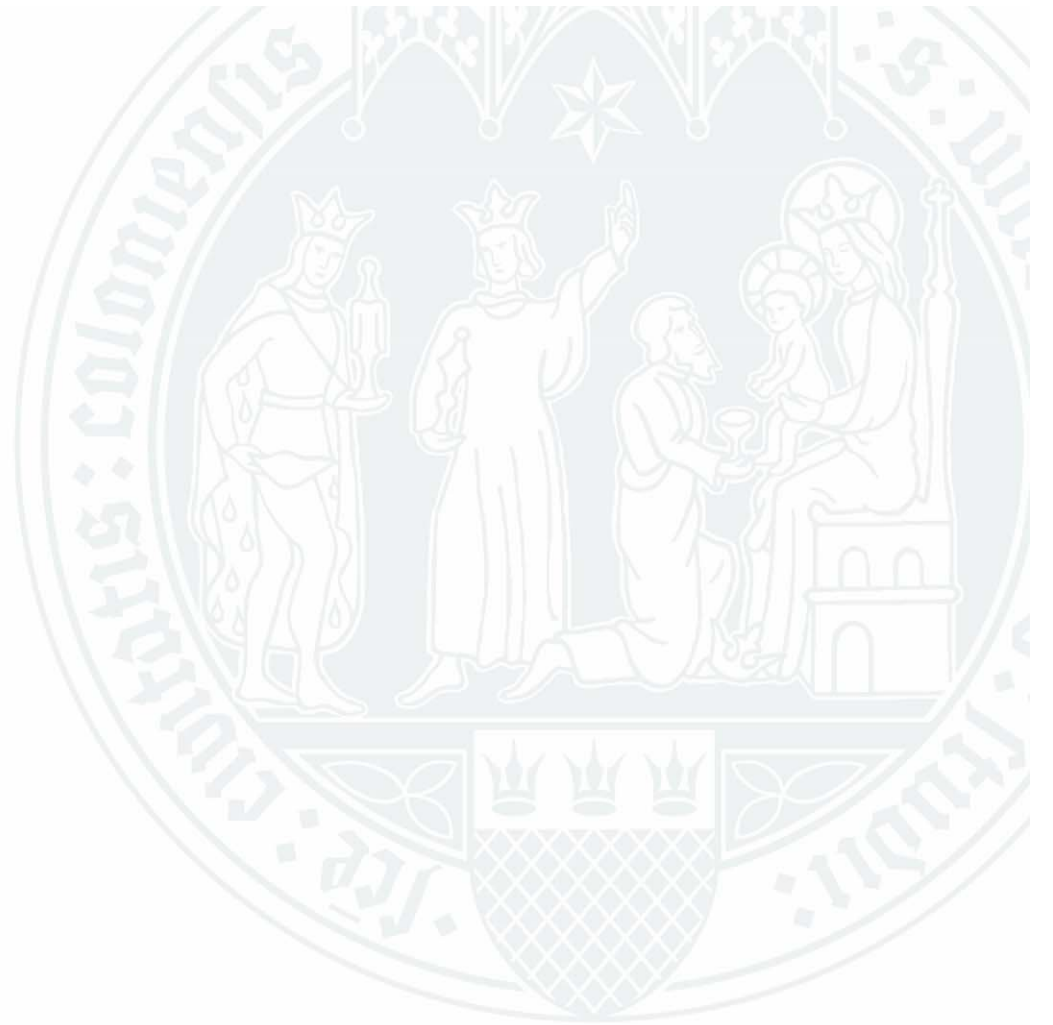


Literaturhinweise

Kap. 4: Dobrić, J., Schmid, F. (2005) **Testing Goodness of Fit for Parametric Families of Copulas -- Application to Financial Data.** Communications in Statistics: Simulation and Computation, Volume 34, Issue 4, pp. 1053-1068.

Kap. 5: Dobrić, J., Schmid, F. (2007) **A Goodness of Fit Test for Copulas based on Rosenblatt's Transformation.** Forthcoming in Computational Statistics and Data Analysis.





Universität zu Köln



Backup-Folien



DAX 30

v	BASF	HVB	BMW	BAYER	D.B.	SAP	SIEM.	VW
BASF								
HVB	4*							
BMW	4	3						
BAYER	3*	3*	3*					
D. BANK	3	2	3	3				
SAP	6*	4*	4*	5*	4*			
SIEMENS	3	2	2	3	2	3*		
VW	5*	4	3*	4*	4	5*	4	

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	4	11 (5)	9 (5)	3 (3)	1 (1)	0	0	0	0



Erweiterung auf höhere Dimensionen

$$df = \prod_{j=1}^d k_j - 1 - \sum_{j=1}^d (k_j - 1) - q$$

k_j ist eine bel. ganzzahlige Zelegung von $[0,1]$

$$C^{Gauss}(u_1, u_2, u_3; R), T = 2500, M = 1000,$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 5, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow df = \prod_{j=1}^3 5 - 1 - \sum_{j=1}^3 (5 - 1) - 1 = 111$$



Simulationsergebnisse (d=3)

Emp. ρ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.49	0.59	0.69
Emp. Mittel.	110.3	110.1	110.6	111.4	111.1	110.8	110.2	108.8
	Verwerfungshäufigkeit							
$\alpha = 0.10$	0.10	0.08	0.10	0.11	0.09	0.09	0.08	0.08
$\alpha = 0.05$	0.06	0.04	0.04	0.06	0.06	0.04	0.04	0.06
$\alpha = 0.01$	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01



$$H_0 : C^{Clayton}(u, v; \theta) \quad \theta = 1.0759$$

r=s	5	6	7	8	9	10
v	15	24	35	48	63	80
Emp. Mittel.	15.2	24.3	34.9	48.0	63.1	79.9
Emp. Var.	29.9	49.1	69.6	95.0	127.5	159.2
Emp. θ	1.07	1.07	1.06	1.06	1.05	1.05
	Anteil der Verwerfungen					
$\alpha = 0.10$	0.10	0.11	0.10	0.10	0.10	0.09
$\alpha = 0.05$	0.06	0.06	0.05	0.05	0.06	0.05
$\alpha = 0.01$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01

