# Econophysics WS1999/2000: Notizen zur Vorlesung über Optionen 2: Der klassische Ansatz nach Black–Scholes

Jörg C. Lemm

Institut für Theoretische Physik I, Universität Münster
Wilhelm–Klemm–Str.9, D–48149 Münster, Germany
lemm@uni-muenster.de
http://pauli.uni-muenster.de/~lemm/

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Vorbemerkung

# 2 Markov–Prozesse

## 2.1 Markov–Eigenschaft

Den den Aktienpreisen zugrundeliegenden stochastischen Prozeß haben wir stets als Markov–Prozeß angenommen. Rechentechnisch ist dies eine Vereinfachung, empirisch gibt es für diese Annahme auch ausreichend Bestätigung, zumindest für nicht zu kleine Zeiten. Markov–Prozesse tauchen an vielen Stellen in der Physik und Chemie auf. Zum Vergleich mit dem Kalkül der stochastischen Differentialgleichungen, auf dem die klassische Herleitung der Black–Scholes–Formel beruht, wollen wir hier kurz die gebräuchlisten Verfahren zur Behandlung von Markov–Prozessen vorstellen. Anschließend werden wir dann auf den Kalkül der stochastischen Differentialgleichungen eingehen. Zur weitergehenden Information über stochastische Prozesse sei auf den Klassiker [9] verwiesen. Ebenfalls empfehlenswert ist [7].

Wir beginnen mit der Definition der Markov–Eigenschaft. Ganz allgemein kann die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis ($A$ UND $B$ UND $C$ UND $C \cdots$) auf verschiedene Weisen faktorisiert werden,

$$\begin{aligned} p(A,B,C,D,\cdots) &= p(A)\,p(B|A)\,p(C|A,B)\,p(D|A,B,C)\cdots \\ &= p(B)\,p(A|B)\,p(C|A,B)\,p(D|A,B,C)\cdots \\ &= p(C)\,p(A|C)\,p(B|A,C)\,p(D|A,B,C)\cdots \\ &= \cdots. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Menge von Ereignissen hat die Markov–Eigenschaft, falls es eine ausgezeichnete (z.B zeitliche) Anordnung gibt, für die sich die Darstellung vereinfacht

$$p(A,B,C,D,\cdots) = p(A)\,p(B|A)\,p(C|B)\,p(D|C)\cdots. \tag{2}$$

Handelt es sich bei den Ereignissen um zeitlich aufeinanderfolgende Ereignisse mit $t(A) < t(B) < t(C) < t(D) < \cdots$, so bedeuted dies, daß die Wahrscheinlichkeit für den nächsten Zustand nur vom unmittelbar vorausgehenden Zustand abhängt, also beispielsweise die Wahrscheinlichkeit für $C$ nur vom vorherigen $B$ und nicht auch noch von dem noch früheren $A$.

Die Markov–Eigenschaft ist eine übliche Annahme für viele physikalische Systeme, und entspricht der Annahme, daß eine (idealerweise geringe) Anzahl von Zustandsgrößen die probabilistische Zeitentwicklung eines Systems bestimmt. Analog, haben wir für den Aktienkurs die Markov–Eigenschaft angenommen. In der Praxis ist jedoch zu beachten, daß die Annahme einer Markov–Eigenschaft bezüglich spezifischer Zustandvariablen (Ereignisse) in der Regel nur für eine bestimmte Zeitskala brauchbar ist. Für zu kleine Zeiten bricht sie oft zusammen. Im Minutenbereich, beispielsweise, sind die Änderungen der Aktienkurse tatsächlich miteinander korreliert.

Es ist vielleicht auch hilfreich zu bemerken, daß sich jedes System als Markov–Kette schreiben läßt, indem man "Gedächtnisvariablen" einführt, die alle relevanten Variablen speichern. Solche "Gedächtnisvariablen" wären im allgemeinsten Fall $B' = A \cup B$, $C' = C \cup B'$, $D' = D \cup C'$, $\cdots$. In Systemen der klassischen Mechanik, beispielsweise, wird die Zeitentwicklung eines Systems ja nicht durch die Position eines Teilchens alleine, sondern auch durch dessen Geschwindigkeit bestimmt. Die Geschwindigkeit läßt sich als solch eine "Gedächtnisvariable" interpretieren.

Analog zu dem diskreten Fall (2) spricht man bei einer kontinuierlicher Zeitvariable $t$ von einem Markov–Prozeß, wenn für die Wahrscheinlichkeit für $x_n$ zum Zeitpunkt $t_n$ bei gegebener kompletter Vorgeschichte $\{(x_i, t_i)|1 \le i \le n-1\}$ gilt

$$p(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1}; \cdots ; x_1, t_1) = p(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1}) \qquad (3)$$

für alle Zeiten mit $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$. Dies bedeuted beispielsweise

$$p(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) = p(x_1, t_1)p(x_2, t_2|x_1, t_1)p(x_3, t_3|x_2, t_2), \qquad (4)$$

für $t_1 < t_2 < t_3$.

Wir wollen noch bemerken, daß die Schreibweisen $p(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1)$ oder $p(x_2, t_2|x_1, t_1)$ nicht ganz der ansonsten üblichen Konvention entsprechen die bedingenden (festgehaltenen) Variablen von den Zufallsvariablen durch einen senkrechten Strich zu trennen. In der sonst üblichen Schreibweise, bei der die bedingenden Variablen rechts vom senkrechten Strich stehen, würde man beispielsweise schreiben $p(x_3, x_2, x_1|t_3, t_2, t_1)$ oder $p(x_2|x_1, t_1; t_2)$. In der Tat wird in der Normierungsbedingung ja auch nur über die $x_i$ und nicht über $t_i$ integriert, also z.B.,

$$1 = \int dx_2 p(x_2, t_2|x_1, t_1) \quad 1 = \int dx_3\, dx_2\, dx_1\, p(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1). \qquad (5)$$

## 2.2 Chapman–Kolmogorov–Gleichung

Integrieren der Markov–Prozesse kennzeichnenden Gl. (4) über $x_2$ und dividieren durch $p(x_1, t_1)$ liefert die sogenannte *Chapman–Kolmogorov–Gleichung*

$$p(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int dx_2\, p(x_3, t_3|x_2, t_2) p(x_2, t_2|x_1, t_1), \tag{6}$$

für $t_1 < t_2 < t_3$. Diese Gleichung haben wir beispielsweise benutzt bei der Berechnung von Erwartungswerten bei der Behandlung des Zugangs von Bouchaud–Sornette–Potters. Bei Gl. (6) handelt es sich um eine nichtlineare Integralgleichung.

## 2.3 Mastergleichung

Wir betrachten nun Gl. (6) für $t_3 = t_2 + \tau$ mit kleinen Zeitdifferenzen $\tau$, um im Limes $\tau \to 0$ eine Gleichung für die Zeitableitung $\partial P/\partial t$ zu bekommen. Wir erhalten

$$p(x, t|x_0, t_0) = \int dx'\, p(x, t|x', t-\tau) p(x', t-\tau|x_0, t_0), \tag{7}$$

für $t < t' = t - \tau < t_0$. Wenn wir nun $p(x, t|x_0, t-\tau)$ für kleine $\tau$ taylorentwickeln wollen, müssen wir berücksichtigen, daß wegen der Normierungsbedingung

$$1 = N = \int dx'\, p(x, t|x', t-\tau), \tag{8}$$

also $p(x, t|x', t-\tau)$ auch von allen $p(x'', t|x', t-\tau)$ mit $x'' \neq x$ abhängt. Schreiben wir also

$$p(x, t|x', t-\tau) = \frac{p(x, t|x', t-\tau)}{\int dx''\, p(x'', t|x', t-\tau)} = \frac{p(x, t|x', t-\tau)}{N}, \tag{9}$$

(wobei wir die rechte Seite auch für unnormierte $p$ verwenden könnten), so erhalten wir durch eine Taylorentwicklung in $\tau = t - t'$,

$$\begin{aligned} p(x, t|x', t') \;\approx\; & \underbrace{p(x, t'|x', t')}_{\delta(x-x')} + \tau \Bigg( \underbrace{\frac{1}{N}}_{1} \underbrace{\frac{\partial p(x, t|x', t')}{\partial t}\Big|_{t=t'}}_{W_{t'}(x|x_0)} \\ & - \underbrace{\frac{1}{N^2}}_{1} \underbrace{p(x, t'|x', t')}_{\delta(x-x')} \underbrace{\int dx'' \frac{\partial p(x'', t|x', t')}{\partial t}\Big|_{t=t'}}_{a_0(x', t') = \int dx'' W_{t'}(x''|x')} \Bigg) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(1 - \tau \int dx''\, W_{t'}(x''|x')\Big)\delta(x-x') + \tau W_{t'}(x|x') \\
&= (1-\tau a_0)\delta(x-x') + \tau W_{t'}(x|x'). \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Hierbei bezeichnet

$$
W_{t'}(x|x') = \frac{\partial p(x,t|x',t')}{\partial t}\Big|_{t=t'}, \qquad (11)
$$

die momentane Übergangsrate von $x'$ nach $x$ pro Zeiteinheit und der Term

$$
a_0(x',t') = \int dx''\, W_{t'}(x''|x'), \qquad (12)
$$

sorgt dafür, daß die Normierungsbedingung auch für das taylorentwickelte $P$ gültig bleibt. Wir setzten hier die Existenz von $W_{t'}$ voraus, bemerken jedoch, daß im allgemeinen Gl. (10) nicht gelten muß [7, 9].

Setzen wir jetzt für kleines $\tau$ die Taylorentwicklung (10) in die Chapman–Kolmogorov–Gleichung Gl. (7) ein, so finden wir für $t = t' + \tau$,

$$
\begin{aligned}
p(x,t|x_0,t_0) &= \int dx' \Big([1-\tau a(x',t')]\delta(x-x') + \tau W_{t'}(x|x')\Big) p(x',t'|x_0,t_0) \\
&= p(x,t'|x_0,t_0)[1-\tau' a(x,t')] + \tau \int dx'\, W_{t'}(x|x')p(x',t'|x_0,t_0) \\
&= p(x,t'|x_0,t_0) + \tau \int \Bigg( W_{t'}(x|x')p(x',t'|x_0,t_0) \\
&\qquad - W_{t'}(x'|x)p(x,t'|x_0,t_0)\Bigg)\, dx'. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Bringen wir den Term $p(x,t'|x_0,t_0)$ auf die linke Seite, teilen durch $\tau$ und bilden den Grenzübergang $\tau' \to 0$, so erhalten wir [für in $t$ stetige $W_t(x|x')$, $a_0(x,t)$, $p(x,t'|x_0,t_0)$, also z.B. $\lim_{\tau\to 0} p(x,t'|x_0,t_0) = p(x,t|x_0,t_0)$] die sogenannte *Mastergleichung*

$$
\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \int \Big( \underbrace{W_t(x|x')\, p(x',t|x_0,t_0)}_{\text{Gewinn}} - \underbrace{W_t(x'|x)\, p(x,t|x_0,t_0)}_{\text{Verlust}} \Big) dx'. \qquad (14)
$$

Die Gleichung läßt sich also als Bilanzgleichung verstehen, in der die Änderung von $p(x,t|x_0,t_0)$ gegeben ist in der Form Gewinn– minus Verlustterm bzw. Zufluß– minus Abflußterm. Die Fall $\tau \to 0$ bedeuted hier also, daß Mehrfachterme, wie z.B. einen Wechsel von $x$ nach $x'$ und anschließend wieder zurück nach $x$, nicht berücksichtigt werden.

Für eine diskrete $x$-Variable wird Gl. (14) zu,

$$\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \sum_{x'} \Big( W_t(x|x')p(x',t|x_0,t_0) - W_t(x'|x)p(x,t|x_0,t_0) \Big). \tag{15}$$

Analog erhält man für diskrete Zeiten eine Differenzengleichung (unter der Voraussetzung, daß pro betrachtetem Zeitintervall nur ein Übergang gemäß der gewählten Übergangswahrscheinlichkeiten stattfindet).

In abstrakterer Form läßt sich die Mastergleichung (14) schreiben als

$$\dot{p} = \mathbf{W}_t p, \tag{16}$$

wobei $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t}$ und $\mathbf{W}_t$ einen linearen Operator darstellt mit Matrixelementen,

$$\mathbf{W}_t(x,x') = W_t(x|x') - \delta(x-x') \int dx''\, W_t(x''|x). \tag{17}$$

Gl. (16) hat für zeitunabhängiges $\mathbf{W}_t = \mathbf{W}$ die formale Lösung

$$p(t) = e^{t\mathbf{W}} p(t_0), \tag{18}$$

die aber in der Regel nicht benutzt werden kann um $p$ zu finden. Bei diskreten $x$ wird $\mathbf{W}_t$ eine endlichdimensionale Matrix. Die folgenden speziellen Eigenschaften von $\mathbf{W}_t$ lassen sich leicht überprüfen

$$\mathbf{W}_t(x,x') \geq 0 \text{ für } x \neq x', \qquad \int dx\, \mathbf{W}_t(x,x') = 0, \forall x'. \tag{19}$$

Für daraus sich ergebende Folgerungen siehe zum Beispiel [9].

## 2.4 Fokker–Planck–Gleichung

Bei der *Fokker–Planck–Gleichung* handelt es sich um eine spezielle Mastergleichung (14), bei der $\mathbf{W}_t$ die Form eines Differentialoperators zweiter Ordnung hat,

$$\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x}\Big( A[x,t]\, p(x,t|x_0,t_0) \Big)}_{\text{Drift}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big( B^2[x,t]\, p(x,t|x_0,t_0) \Big)}_{\text{Fluktuationen}}. \tag{20}$$

Der erste Term wird auch Driftterm, Transportterm oder Konvektionsterm genannt, der zweite auch Fluktuationsterm oder Diffusionsterm. Die Fokker–Planck–Gleichung ist auch bekannt als verallgemeinerte Diffusionsgleichung, Smoluchowski–Gleichung oder zweite Kolmogorov–Gleichung.[1]

Falls ein Markov–Prozeß durch eine Fokker–Planck–Gleichung beschrieben werden kann, hat dies durchaus Vorteile gegenüber einer Beschreibung durch eine allgemeinere Mastergleichung (14). Zum einen ist die Fokker–Planck–Gleichung eine reine Differentialgleichung.[2] Die Mastergleichung ist dagegen eine Integro–Differentialgleichung, und damit ist es im allgemeinen schwieriger mit umzugehen als mit reinen Differentialgleichungen. Weiterhin erfordert die Fokker–Planck–Gleichung nur die Bestimmung der Funktionen $A[x,t]$, $B^2[x,t]$ während die Mastergleichung die ganzen (von $x$ und $x'$ abhängigen) Übergangsraten $W_t(x|x')$ benötigt. Darüber hinaus lassen sich, zumindest für lineare Fokker–Planck–Gleichungen (d.h. solche mit $A$ linear in $X$ und $B^2$ unabhängig von $x$), die Driftkoeffizienten $A$ aus den makroskopischen Gesetzen und die Fluktuationskoeffizienten aus Gleichgewichtsbetrachtungen der statistischen Mechanik herleiten. Bei nichtlinearen Fokker–Planck–Gleichung ist dagegen bei der Identifizierung von $A$ und $B^2$ Vorsicht geboten. Eine detaillierte Diskussion findet man dazu in [9].

Die Fokker–Planck–Gleichung (20) läßt sich, wie wir im Folgendem zeigen werden, aus der allgemeinen Mastergleichung (14) herleiten unter der Annahme, daß der stochastische Prozeß nur kleine Sprünge zuläßt. Man kann zeigen daß dies stochastischen Prozessen entspricht deren Realisierungen (Pfade) stetig sind. Beispielsweise sind die Pfade der Brownschen Bewegung stetig, aber mit Wahrscheinlichkeit eins nirgendwo differenzierbar.

Um die Fokker–Planck–Gleichung (20) herzuleiten, fassen wir die Übergangsraten $W_t(x, x')$ als Funktionen von $x'$ und $\Delta x = x - x'$ auf,

$$W_t(x|x') = W_t(\Delta x, x'). \tag{21}$$

[1] Wir benutzen hier die Bezeichnungsweise von van Kampen [9]. Gardiner [7], beispielsweise, bezeichnet die Mastergleichung in der Sprechweise von van Kampen als differentielle Chapman–Kolmogorov–Gleichung. Mastergleichung und Fokker–Planck–Gleichung bezeichnen dann Spezialfälle dieser Gleichung, wobei sich die Master–Gleichung in diesem engeren Sinne auf Sprungprozesse bezieht. Entsprechend ist die Definition der “$W$” bei beiden Autoren etwas unterschiedlich.

[2] Und zwar ist die Fokker–Planck–Gleichung eine parabolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Da alle Fokker–Planck–Gleichungen linear bezgl. $p$ sind, nutzt man die Bezeichnung lineare Fokker–Planck–Gleichung für den Fall bei dem $A$ eine lineare Funktion von $x$ und $B$ von $x$ unabhängig ist.

Die Mastergleichung (14) wird dann zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} &= \int W_t(\Delta x, x-\Delta x)\, p(x-\Delta x, t|x_0,t_0)\, d(\Delta x) \\ &\quad - p(x,t|x_0,t_0) \int W_t(-\Delta x, x)\, d(\Delta x). \end{aligned} \tag{22}$$

Nun nehmen wir an, daß $W(\Delta x, x')$ und $p(x',t|x_0,t_0)$ langsam variieren bezüglich $x'$, und daß nur kleine Sprünge auftauchen, also $W(\Delta x, x') \approx 0$ für $\Delta x > \delta$ für ein $\delta > 0$, und damit bezüglich des ersten Argumentes scharf gepeaked ist. Wir machen daher im ersten Integral von (22) nur eine Taylorentwicklung bezüglich $-\Delta x$ im zweiten Argument von $W(\Delta x, x-\Delta x)$ und in $p(x-\Delta x, t|x_0,t_0)$ während wir die Abhängigkeit vom ersten Argument nicht approximieren. Um auch den Fluktuationsterm zu erhalten gehen wir dabei bis zur zweiten Ordnung (vgl. die Beziehung $dz^2 = dt$ im Abschnitt über stochastische Differentialgleichungen). Dies ergibt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} &= \int W_t(\Delta x, x)\, p(x,t|x_0,t_0)\, d(\Delta x) \\ &\quad - \int (\Delta x) \frac{\partial}{\partial x} \left( W_t(\Delta x, x)\, p(x,t|x_0,t_0) \right) d(\Delta x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int (\Delta x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( W_t(\Delta x, x)\, p(x,t|x_0,t_0) \right) d(\Delta x) \\ &\quad - p(x,t|x_0,t_0) \int W_t(-\Delta x, x)\, d(\Delta x) \\ &= p(x,t|x_0,t_0) \int W_t(\Delta x, x)\, d(\Delta x) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \Big( p(x,t|x_0,t_0) \underbrace{\int (\Delta x) W_t(\Delta x, x)\, d(\Delta x)}_{a_1(x,t)} \Big) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big( p(x,t|x_0,t_0) \underbrace{\int (\Delta x)^2 W_t(\Delta x, x)\, d(\Delta x)}_{a_2(x,t)} \Big) \\ &\quad - p(x,t|x_0,t_0) \int W_t(\Delta x, x)\, d(\Delta x) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \Big( a_1(x,t) p(x,t|x_0,t_0) \Big) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big( a_2(x,t) p(x,t|x_0,t_0) \Big). \end{aligned} \tag{23}$$

Dies entspricht der Fokker–Planck–Gleichung (20), und ergibt somit eine Beziehung der Funktionen $A[x,t]$ und $B^2[x,t]$ zu den sogenannten "Sprungmomenten" $a_1(x,t)$, $a_2(x,t)$, deren Existenz wir hier annehmen,

$$A[x,t] \;=\; a_1(x,t) = \int (\Delta x) W_t(\Delta x, x)\; d(\Delta x), \tag{24}$$

$$B^2[x,t] \;=\; a_2(x,t) = \int (\Delta x)^2 W_t(\Delta x, x)\; d(\Delta x). \tag{25}$$

Eine komplette, nicht auf Terme zweiter Ordnung beschränkte Taylorentwicklung führt auf die *Kramers–Moyal–Entwicklung*,

$$\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big(a_n(y,t) p(x,t|x_0,t_0)\Big), \tag{26}$$

welche ausgedrückt werden kann durch die "Sprungmomente" $n$–ter Ordnung,

$$a_n(x,t) = \int (\Delta x)^n W_t(\Delta x, x)\; d(\Delta x). \tag{27}$$

Wir bemerken noch, daß die Fokker–Planck–Gleichung als Kontinuitätsgleichung aufgefaßt werden kann. In der Tat erhält durch die Definition einer Wahrscheinlichkeitsstromdichte,

$$J(x,t) = A[x,t]\, p(x,t|x_0,t_0) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(B^2[x,t]\, p(x,t|x_0,t_0)\Big), \tag{28}$$

Gl. (20) die typische Form einer Kontinuitätsgleichung,

$$\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x,t)}{\partial y}. \tag{29}$$

Eine häufig vorkommender Fall ist eine zeitunabhängige, lineare Fokker–Planck–Gleichung mit $A[x,t] = a\,x$ und $B^2[x,t] = B^2$,

$$\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = -a\frac{\partial}{\partial x}\Big(x\, p(x,t|x_0,t_0)\Big) + \frac{B^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,t|x_0,t_0). \tag{30}$$

Für die Anfangsbedingung[3] $x(t=0) = x_0$ und im Unendlichen verschwindenden $p$ ist die Lösung von (30) gegeben durch die Gauß-Funktion

$$p(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{\mathrm{FP}}}}\, e^{-\dfrac{\left(x - x_0 e^{at}\right)^2}{2\sigma^2_{\mathrm{FP}}}}, \tag{31}$$

[3] Für eine systematische Diskussion von Anfangs– und Randbedingungen siehe [7].

mit Mittelwert

$$\mu_{\mathrm{FP}}(t) = x_0\, e^{at}, \tag{32}$$

und mit Varianz

$$\sigma^2_{\mathrm{FP}}(t) = \frac{B^2}{2a}\left(e^{2at} - 1\right). \tag{33}$$

Dies läßt sich durch (etwas mühsames) direktes Nachrechnen verifizieren. Für $a < 0$ geht dies für große Zeiten gegen eine stationäre (zeitunabhängige) Gaußverteilung mit der Varianz $-B^2/2a$. Für $a > 0$ wächst $e^{2ta}$ unbeschränkt und es gibt daher dann keine stationäre Verteilung.

## 2.5 Langevin–Gleichung

Eine Alternative zur Behandlung von Markov–Prozessen mit Hilfe von Fokker–Planck–Gleichungen ist der Kalkül der stochastische Differentialgleichungen. Als einfaches Beispiel wollen wir in diesem Abschnitt die Langevin–Gleichung diskutieren. Diese ist eine stochastische Differentialgleichung der Gestalt

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad + \quad B \quad \underbrace{\xi(t)}_{\text{Zufallsvariable}}. \tag{34}$$

Stochastisch heißt diese Diferentialgleichung, da hierin $\xi$ als eine normalverteilte Zufallsvariable angenommen wird, mit Mittelwert

$$< \xi(t) >= 0, \tag{35}$$

und Kovarianz

$$< \xi(t)\xi(t') >= \delta(t - t'). \tag{36}$$

Mit $\xi$ ist auch $x$ eine Zufallsvariable. In der ursprünglichen Anwendung der Langevin–Gleichung in der Physik steht hierbei die Zufallsvariable $x$ für die Geschwindigkeit eines Teilchen, welches durch eine Reibungskraft $ax$ mit $a < 0$ abgebremst wird und dem Einfluß von Zufallskräften $\xi(t)$ ausgesetzt ist. Bei der Herleitung der Black–Scholes–Formel wird uns eine etwas allgemeinere Gleichung begegnen, bei der $x$ beispielsweise den Aktienkurs und $\xi$ die Änderung des Aktienkurses representieren.

Nehmen wir eine Zufallsrealisierung von $\xi(t)$ als gegeben an, so können wir naiv (ohne uns ersteinmal über die Existenz des Integrals Gedanken zu machen) eine Lösung von Gl. (34) angeben,

$$x(t) = x_0 e^{at} + e^{at} B \int_0^t e^{-at'} \xi(t') dt'. \tag{37}$$

Da Gl. (37) $x(t)$ als eine Linearkombination der $\xi(t)$ darstellt und eine Summe von normalverteilten Variablen wieder normalverteilt ist, ist daher in diesem Falle mit $\xi(t)$ auch $x(t)$ normalverteilt.

Für den Mittelwert von $x$ zur Zeit $t$ unter der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ folgt unter Benutzung von Gl. (35),

$$\begin{aligned} < x(t) > &= < x_0 e^{at} > + e^{at} \int_0^t e^{-at'} B \underbrace{< \xi(t') >}_{=0} dt' \\ &= x_0 \, e^{at}. \end{aligned} \tag{38}$$

Dies entspricht der Gl. (32) für den Mittelwert der Lösung (31) der linearen Fokker–Planck–Gleichung (30). Ähnlich folgt für den Erwartungwerts von $x^2$ zur Zeit $t$ unter Verwendung von Gl. (35) und Gl. (36),

$$\begin{aligned} < x^2(t) > &= < x_0^2 \, e^{2at} > + 2x_0 \, e^{2at} \int_0^t e^{-at'} B \underbrace{< \xi(t') >}_{=\,0} dt' \\ &\quad + B^2 e^{2at} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \, e^{-at'} e^{-at''} \underbrace{< \xi(t')\xi(t'') >}_{=\,\delta(t'-t'')} \\ &= x_0^2 \, e^{2at} + B^2 e^{2at} \underbrace{\int_0^t e^{-2at'} dt'}_{= -(e^{-2at}-1)/2a} \\ &= x_0^2 \, e^{2at} + \frac{B^2}{2a}(e^{2at} - 1), \end{aligned} \tag{39}$$

und daher für die Varianz,

$$V[x(t)] = < x^2(t) > - < x(t) >^2 = \frac{B^2}{2a}(e^{2at} - 1). \tag{40}$$

Dies entspricht der Gl. (33) für die Varianz der Lösung (31) der linearen Fokker–Planck–Gleichung (30). Eine Gaußverteilung ist durch Mittelwert und Varianz bereits vollständig beschrieben. Nehmen wir also die $\xi$ und damit nach Gl. (37) auch die $x$, als normalverteilt an, so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der $x(t)$ durch Gl. (38) und Gl. (40) vollständig bestimmt. Damit ist also die Langevin–Gleichung (34) equivalent zu der linearen Fokker–Planck–Gleichung (30).

## 2.6 Stochastische Differentialgleichungen

Betrachten wir nun eine allgemeine stochastische Differentialgleichung der Form,

$$\frac{dx}{dt} = A[x(t), t] + B[x(t), t]\,\xi(t). \tag{41}$$

Die mathematische Bedeutung einer solchen Gleichung ist aber nicht von vornherein klar. Einen Schritt weiter kommen wir, wenn wir Gl. (41) als abkürzende Schreibweise auffassen für die korrespondierende Integralgleichung,

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} A[x(t'), t']dt' + \int_{t_0}^{t} B[x(t'), t']\xi(t)dt'. \tag{42}$$

Das mathematische Problem besteht nun darin dem Integral über die Zufallsvariable $\xi(t)$ in (42) eine Bedeutung zu geben. In der Tat, nehmen wir an, daß ein $z$ existiert mit $\xi dt = dz$, also $\xi = \frac{\partial z}{\partial t}$, wie es sein muß, damit das Integral existiert, so finden wir beispielsweise

$$\int_{t_0}^{t} \xi\, dt' = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=t'}}_{\substack{\text{Ableitung}\\ \text{existiert nicht!}}} dt'. \tag{43}$$

Es ist aber bekannt, daß beispielsweise bei der Brownschen Bewegung an allen Orten die Ableitung mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht existiert. Damit kann das Integral im üblichen Riemann-Sinne nicht existieren. (Da auch die totale Variation unendlich wird, existiert auch keine Lebesque–Integral.) Eine Konstruktion analog zur Definition des Riemann–Integrals als Grenzwert von Riemann–Summen ist jedoch möglich. Beim klassichen Riemann–Integral wird also die zu integrierende Funktion auf äquidistanten Intervallen $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t$ stückweise konstant approximiert. Das Integral über diese stückweise konstanten Funktionen ist eine Summe, deren Grenzwert $N \to \infty$ das Riemann–Integral liefert. Anders als bei Riemann–Integralen, macht es bei stochastischen Integralen jedoch einen Unterschied, an welcher Stelle des Intervalls der Funktionswert für eine stückweise konstante Approximation gewählt wird. Zwei Möglichkeiten sind besonders gebräuchlich. Itô's Wahl besteht darin stets den Funktionswert des linken Randes zu nehmen, also

$$\int_{t_0}^{t} f[x]\, dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f[x(t_{i-1})]\Big(z(t_i) - z(t_{i-1})\Big). \tag{44}$$

Diese Wahl korrespondiert zu der Markov–Eigenschaft. Stratonowich wählte den Funktionwert in der Mitte des Intervalls

$$\int_{t_0}^{t} f[x]\,dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f\left[\frac{x(t_i)+x(t_{i-1})}{2}\right]\Big(z(t_i)-z(t_{i-1})\Big). \tag{45}$$

Diese Wahl ist angemessen, wenn die Diracfunktion in Gl. (36) als Idealisierung einer endlichen Kovarianz gesehen wird. Für Details zur Definition stochastischer Integrale und Differentialgleichungen sei hier beispielsweise auf [8, 1, 15] verwiesen. Es stellt sich heraus, daß im Stratonovich–Kalkül bezüglich Variablensubstitution in den Differentialen die üblichen Regeln gelten, während im Itô–Klakül Terme zweiter Ordnung in $dz$ mitgenommen werden müssen. In der Tat, wenn $z$, definiert als Summe von Inkrementen $dz$, eine Gauß'sche Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Varianz $t$ sein soll, so muß $dz$ eine Gauß'sche Zufallsvariable sein mit Mittelwert 0 und Varianz $dt$. Dies schreibt man auch

$$dz^2 = dt. \tag{46}$$

Technisch gesehen, besteht der Itô–Kalkül im wesentlichen aus der Anwendung der Beziehung (46). Mathematisch folgt diese Beziehung aus dem Verhalten von Itô–Integralen unter Variablensubstitution. Sie korresondiert zu der Tatsache, daß die mittlere zurückgelegte Weglänge beim Wienerprozeß proportional zur Wurzel aus der Zeitdifferenz zunimmt, $<|x-x_0|> \propto \sqrt{t-t_0}$. (Während der Erwartungswert bei fehlendem Driftterm verschwindet, $<x-x_0> = 0$.)

Gl. (41) kann man nun auch mit der Variablen $z$ schreiben

$$\frac{dx}{dt} = A[x,t] + B[x,t] \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{\text{Zufallsvariable}} , \tag{47}$$

oder, "multipliziert" mit $dt$, in Form eines stochastisches Differentials

$$dx = \underbrace{A[x,t]}_{\frac{\partial x}{\partial t}}\, dt + \underbrace{B[x,t]}_{\frac{\partial x}{\partial z}}\, dz. \tag{48}$$

Damit erhalten wir beispielsweise unter Verwendung von (46)

$$dx^2 \quad = \quad A^2[x,t]\,dt^2 + B^2[x,t]\underbrace{dz^2}_{dt} + A[x,t]B[x,t]\,dt\,dz$$

$$\approx \quad B^2[x,t]\,dt = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 dt. \tag{49}$$

Im nächsten Abschnitt betrachten wir nun Differentiale von allgemeinen Funktionen $f[x(t),t]$.

## 2.7 Itô's Lemma

Das stochastische Differential einer beliebigen von $x$–abhängigen Funktion $f[x(t),t]$, läßt sich mit den Beziehungen (46) und (49) nun ebenfalls berechnen. Dazu machen wir eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung in $dt$, das heißt also bis zur zweiten Ordnung in $dz$,

$$\begin{aligned}
df[x(t),t] &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}\,dz + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 dz^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt \\
&= A[x,t]\frac{\partial f}{\partial x}\,dt + B[x,t]\frac{\partial f}{\partial x}\,dz + \frac{1}{2}B^2[x,t]\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dz)^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt \\
&= B[x,t]\frac{\partial f}{\partial x}\,dz + \left(A[x,t]\frac{\partial f}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{2}B^2[x,t]\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{\text{Spezieller “Itô–Term”}} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt. \qquad (50)
\end{aligned}$$

Diese Beziehung ist bekannt als Itô's Lemma. Sie ist von grundlegender Bedeutung für den Itô–Kalkül und daher auch für die klassische Herleitung der Black–Scholes–Formel.

Itô's Lemma kann auch dazu verwendet werden, die Äquivalenz einer stochastische Differentialgleichung zu einer Fokker–Planck–Gleichung zu zeigen. Bilden wir den Erwartungswert der Gl. (50) unter $p(x,t|x_0,t_0)$ und dividieren durch $dt$, so erhalten wir für eine beliebige, nicht explizit zeitabhängige Funktion $f[x(t)]$,

$$\frac{d}{dt} < f[x(t)] > \; = \; \underbrace{< B[x,t]\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dz}{dt} >}_{< B[x,t]\frac{\partial f}{\partial x} >< \xi(t) >= 0} + < A[x,t]\frac{\partial f}{\partial x} > + \frac{1}{2} < B^2[x,t]\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > . \tag{51}$$

Wir haben hierbei benutzt, daß Im Itô–Kalkül $x(t)$ zur Zeit $t$ von der zukünftigen Änderung $\frac{dz}{dt} = \xi(t)$ unabhängig ist. Daher faktorisiert der erste Term und verschwindet dann wegen $<\xi(t)> = 0$. Das Wegfallen des $z$–abhängigen Terms ist also bedingt durch die Definition der "Riemann"–Summen in der Definition des Itô–Integrals, bei der immer der Funktionswert am Anfang des Teilintervalls zur Bildung der Teilsummen gewählt wird. Dies korrespondiert zu der Markov–Eigenschaft. Einsetzen der Definition des Erwartungswertes liefert dann

$$\begin{aligned}\int dx\, f[x] \frac{d}{dt} p(x,t|x_0,t_0) &= \int dx\, p(x,t|x_0,t_0) A[x,t] \frac{\partial f}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{2} \int dx\, p(x,t|x_0,t_0) B^2[x,t] \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{52}$$

Durch partielle Integration erhalten wir daraus bei verschwindenden Randtermen,

$$\begin{aligned}\int dx\, f[x] \frac{d}{dt} p(x,t|x_0,t_0) &= -\int dx\, f[x] \frac{\partial}{\partial x} \Big( A[x,t] p(x,t|x_0,t_0) \Big) \\ &+ \frac{1}{2} \int dx\, f[x] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big( B^2[x,t] p(x,t|x_0,t_0) \Big). \end{aligned} \tag{53}$$

Da wir $f[x]$ beliebig wählen können, folgt daraus

$$\frac{d}{dt} p(x,t|x_0,t_0) = -\frac{\partial}{\partial x} \Big( A[x,t] p(x,t|x_0,t_0) \Big) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big( B^2[x,t] p(x,t|x_0,t_0) \Big), \tag{54}$$

also gerade die allgemeine Fokker–Planck–Gleichung (20). Damit folgt die Äquivalenz der allgemeinen stochastischen Differentialgleichung (41) (im Itô–Kalkül) mit der Fokker–Planck–Gleichung (20).

Bei der Herleitung dieser Äquivalenz haben wir an zwei Stellen auf den Itô–Kalkül Bezug genommen: Einmal durch Benutzung der Itô–Formel, zum anderen durch das Wegfallen des ersten Terms in Gl. (51). Im Stratonovich–Kalkül findet man, daß eine stochastische Differentialgleichung der Form (41), interpretiert im Sinne von Stratonovich [und daher nicht equivalent zu einer im Itô–Kalkül interpretierten Gl. (41)] korrespondiert zu einer Fokker–Planck–Gleichung der Form [7, 9]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} p(x,t|x_0,t_0) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( A[x,t] + \frac{1}{2} B[x,t] \frac{d}{dx} B[x,t] \right) p(x,t|x_0,t_0) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ B^2[x,t] p(x,t|x_0,t_0) \right]. \end{aligned} \tag{55}$$

Zum Abschluß sei nochmal betont, daß die Fokker–Planck–Gleichung eine normale, und keine stochastische partielle Differentialgleichung darstellt. Eine Fokker–Planck–Gleichung ist daher stets eindeutig definiert und von der Wahl einer Definition des stochastischen Integrals nicht betroffen. Zu ihr korrespondieren aber, in Abhängigkeit von der Definition des stochastischen Integrals, unterschiedliche stochastische Differentialgleichungen,

Abbildung 1 faßt die diskutierten Ansätze zur Behandlung von Markov–Prozessen nochmals zusammen.

# 3 Optionspreise nach Black–Scholes

## 3.1 Die Black–Scholes –Differentialgleichung

Wir verwenden nun den Itô–Kalkül zur Herleitung der Black–Scholes–Formel. Diese Herleitung findet sich beispielsweise in [11, 16, 17, 2, 12, 13].

Nehmen wir log–normalverteilte Aktienkurse an bei einer risikolosen Verzinsung $r$, so bedeuted dies

$$dx = rx\,dt + \sigma x\,dz. \tag{56}$$

Damit ergibt sich

$$dx^2 = \sigma r x^2\,dx\,dt + \sigma^2 x^2 dz^2 + r^2 x^2 dt^2 \approx \sigma^2 x^2\,dt. \tag{57}$$

Berechnen wir nun das Differential des logarithmischen Aktienkurses $f[x] = \ln x$. Mit Hilfe von Itô's Lemma (50) finden wir für

$$A[x,t] = rx, \qquad B[x,t] = \sigma x, \tag{58}$$

sowie mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{59}$$

daß

$$\begin{aligned} d\ln x(x,t) &= \left(rx\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt + \sigma x \frac{\partial f}{\partial x}\,dz \\ &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dz. \end{aligned} \tag{60}$$

**Markov–Prozeß**

$$p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \cdots ; x_1, t_1) = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

$$\downarrow$$

**Chapman–Kolmogorov–Gleichung:**

$$p(x, t | x_0, t_0) = \int dx' \, p(x, t | x', t') p(x', t' | x_0, t_0)$$

$$\downarrow$$

**Master–Gleichung:**

$$\frac{\partial p(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = \int \Big( \underbrace{W_t(x|x') \, p(x', t | x_0, t_0)}_{\text{Gewinn}} - \underbrace{W_t(x'|x) \, p(x, t | x_0, t_0)}_{\text{Verlust}} \Big) dx'$$

$$\downarrow$$

**Fokker–Planck–Gleichung:**

(für Prozesse mit stetigen Pfaden)

$$\frac{\partial p(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x} A[x, t] \, p(x, t | x_0, t_0)}_{\text{Drift}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big( B^2[x, t] \, p(x, t | x_0, t_0) \Big)}_{\text{Fluktuationen}}$$

$$\updownarrow$$

**equivalent zu stochastischer Differentialgleichung**

**im Itô Kalkül:**

$$dx = \underbrace{A[x, t] dt}_{\text{Drift}} + \underbrace{B[x, t] dz}_{\text{Fluktuationen}}$$

$$\updownarrow$$

**im Stratonovich Kalkül:**

$$dx = \left( A[x, t] - \tfrac{1}{2} B[x, t] \frac{\partial}{\partial x} B[x, t] \right) dt + B[x, t] dz$$

Abbildung 1: Überblick über Ansätze zur Behandlung von Markov–Prozessen

Also ist $d\ln x$ normalverteilt mit Varianz $\sigma^2 dt$ und Mittelwert $\left(rx - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt$. Daher ist die Summenvariable $\ln x$ ebenfalls normalverteilt mit Varianz $\sigma^2 t$ und Mittelwert $\left(rx - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t$. Wir hatten bereits gesehen, daß eine direkte Berechnung diese Resultats ohne benutzung von Itô's Lemma sehr viel schwieriger vonstatten ging.

As nächstes betrachten wir eine von $x$ und evtl. auch von $t$ abhängige Zufallsvariable $C(x,t)$. Solch eine Zufallsvariable wird nun im Folgenden den Preis eines beliebigen Derivats darstellen. Wir werden speziell den Fall später detaillierter diskutieren in dem $C$ den Preis einer Call–Option represäntiert.

Grundlegend für den Zugang von Black–Scholes ist die Moglichkeit durch Halten des Underlyings des Derivats ein risikoloses Portfolio zu konstruieren. Dazu betrachten wir ein Portfolio bestehend aus einer Option und von $-\phi$ Anteilen des Underlyings,

$$W = C - \phi x. \tag{61}$$

Analog ist $-W$ das Portfolio des Verkäufers der Option (Schreiber, Halter der Short–Position). Der Preis $-C$ entspricht der Verpflichtung, die der Schreiber der Option eingegangen ist. Durch Kauf der gleichen Option, also zum Preis von $C$, kann sich der Schreiber von dieser Verpflichtung wieder freistellen. Die Variable $\phi$ beschreibt aus dieser Sicht den Underlyinganteil (z.B. Aktien), den der Schreiber hält, z.B. zum Zwecke des Absicherns der möglichen aus dem Optiongeschäft entstehenden Verluste (hedgen). Wir haben nun eine Kette von Zufallsvariablen definiert,

$$(z,t) \to x(z,t) \to C(x,t) \to W(C,t). \tag{62}$$

Um zur Black–Scholes–Formel zu gelangen, müssen wir nun das stochastische Differential $dC$ bestimmen. Dies geschieht mit Hilfe von Itô's Lemma (50). Zusätzlich müssen wir die Forderung nach Arbitragefreiheit einbeziehen. Diese wird durch eine Bedingung an $dW$ formuliert. So gelangen wir zu einer stochastischen Differentialgleichung für den Preis $C$. Als deren Lösung werden wir schließlich die Black–Scholes–Formel finden.

Nehmen an, daß während des Zeitschrittes nicht gehandelt wird, also daß $d\phi = 0$, so gilt

$$dW(x) = dC(x) - \phi\, dx = dC(x) - \phi\, (rxdt + \sigma x dz)\,. \tag{63}$$

Durch Anwendung von Itô's Lemma (50) erhalten wir nun für den Preis $C$

eines beliebigen Derivats,

$$
\begin{aligned}
dC(x,t) &= \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\,dt + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}\,dz + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 dz^2 + \frac{\partial C}{\partial t}\,dt \\
&= B[x,t]\frac{\partial C}{\partial x}\,dz + \left(A[x,t]\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}B^2[x,t]\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t}\right) dt \\
&= \sigma x\frac{\partial C}{\partial x}\,dz + \left(rx\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t}\right) dt. \qquad (64)
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich

$$
dW = \sigma x \underbrace{\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \phi\right)}_{\substack{=0 \\ \text{bei opt. Hedg.}}} dz \; + \left(\underbrace{rx\frac{\partial C}{\partial x} - rx\,\phi}_{\substack{=0 \\ \text{bei opt. Hedg.}}} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t}\right) dt. \qquad (65)
$$

Interessanterweise sieht man bereits hier, daß bei der Wahl von

$$
\phi = \frac{\partial C}{\partial x} \qquad (66)
$$

der Zufallsterm $dz$ eliminiert wird (und an dieser Stelle auch vorläufig die Variable $r$ herausfällt). Wir bezeichnen diese Wahl im Folgenden als "optimales Hedging", da dadurch der Zufallseinfluß , und damit das Risiko, vollständig eliminiert wird. Wir erhalten damit,

$$
dW = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t}\right) dt. \qquad (67)
$$

Um weiterhin die Variable $W$ zu eliminieren, brauchen wir eine zweite Bedingung. Diese folgt aus der Forderung nach Arbitragefreiheit. In der Tat haben wir bereits diskutiert, daß Arbitragegewinne möglich sind bei Abweichungen einer (durch Wahl der optimalen Hedginstrategie) deterministischen Wertentwicklung des Portfolios $W$ von einer sich durch durch Verzinsung des Vermögens ergebenden risikolosen Anlage. Eine risikolose Verzinsung entspricht einem Differential [siehe Gl. (56)],

$$
dW = rW\,dt. \qquad (68)
$$

Setzen wir nun also (67) und (68) gleich, erhalten wir

$$
rW\,dt = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t}\right) dt. \qquad (69)
$$

Kürzen von $dt$ liefert,

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t} - rW, \tag{70}$$

und Einsetzen der Definition von $W$,

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t} - r\left(C - \phi x\right). \tag{71}$$

Nach $W$ wird nun $\phi$ eliminiert durch Einsetzen der optimalen Hedgingstrategie (66),

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - rx\frac{\partial C}{\partial x} + rC. \tag{72}$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung von Black–Scholes.

Diese Gleichung folgt also aus:

1. Der Anwendung von Itô's Lemma (50), unter Annahme eines log–normal verteilten Aktienkurses (56),

2. dem Verwenden einer optimalen Hedgingstrategie (66),

3. sowie der Annahme der Arbitragefreiheit, entsprechend Gl. (68).

Insbesondere ist es bemerkenswert, daß bisher keinerlei Annahmen über die Art des Derivats, d.h. der Funktion $C$, gemacht wurden. Die Black–Scholes Differentialgleichung kann also verwendet werden um den Preis beliebiger Derivate zu berechnen (unter den notwendigen idealisierten Bedingungen, wie fehlende Transaktionskosten, sowie der Möglichkeit eines kontinuierlichen Handels von beliebigen Underlyinganteilen inklusive Shortselling). Die verschiedenen Derivate (z.B Call/Put–Optionen) werden alleine durch die Randbedingungen unterschieden.

Technisch gesehen, handelt es sich bei der Black–Scholes–Differentialgleichung um eine Gleichung von der Art einer Diffusionsgleichung. Die klassiche Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{73}$$

enthält als Ableitungsterm in $x$ nur eine zweite Ableitung. Zudem unterscheidet sich das Vorzeichen dieses Terms von dem der Black–Scholes–Differentialgleichung. Dies mag auf den ersten Blick problematisch erscheinen, da Anfangswertprobleme für solch eine Diffusionsgleichung mit "falschem" Vorzeichen keine stabile Lösung haben. In der Tat entspricht ein Anfangswertproblem für solch eine Gleichung mit zusätzlichem Minuszeichen nach der Substitution $t \to -t$ einer rückwärts zu lösenden Diffusionsgleichung, also dem Problem bei gegeben Endzustand den entsprechenden Anfangszustand zu suchen. Da die Diffusionsgleichung Unebenheiten der Anfangsverteilung glättet, werden bei umgekehrter Zeitentwicklung kleinste Störungen verstärkt. Die entsprechenden Lösungen sind also nicht stabil gegenüber kleinsten Änderungen der Anfangsverteilung. Wie wir jetzt sehen werden, ist jedoch bei klassischen Anwendungen der Black–Scholes–Differentialgleichung nicht der Anfangs– sondern der Endwert von $C$ vorgegeben. Dadurch kann Gl. (72) durch geeignete Substitutionen in ein Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Diffusionsgleichung überführt werden. Dessen Lösungen sind stabil.

## 3.2 Der Preis einer Call–Option

Zur Berechnung des Preises einer (europäischen) Call–Option müssen daher als erstes die entsprechenden Randbedingungen festgelegt werden. Zum Fälligkeitstermin gilt $C(x,T) = \max(x - x_s, 0)$. Bei einem Underlyingkurs von 0 ist es nie lohnend das Optionsrecht wahrzunehmen. Da weiterhin ein Kurs von 0 unter einem log–normalem Model sich nicht mehr verändert gilt also für alle Zeiten $C(0,t) = 0$. Im Limes $x \to \infty$ lohnt es sich die Option einzulösen. Bei europäischen Optionen ist dies jedoch nur zum Fälligkeitstermin möglich. Berücksichtigung des Zinsfaktors liefert $\lim_{x\to\infty} C(x,t) = \lim_{x\to\infty}\left(x - x_s e^{-r(T-t)}\right) = x$.

Um die Black–Scholes–Differentialgleichung (72) zu vereinfachen, substituieren wir nun

1. $x = x_s e^y$, um von log–normal zu normalverteilten Größen überzugehen, d.h um die Potenzen von $x$ vor den Ableitungstermen zum Verschwinden zu bringen,

2. $t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$, um eine dimensionslose Variable $\tau$ zu bekommen und um das Endwertproblem bzgl. $t$ in ein Anfangswertproblem bzgl. $\tau$ zu überführen,

3. sowie $C(x,t) = x_s v(x,\tau)$ um eine dimensionslose Preisvariable zu erhalten.

Gl. (72) wird nun

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial y} - kv, \tag{74}$$

mit nur einem dimensionslosen Parameter $k = \frac{2r}{\sigma^2}$, und der Randbedingung

$$v(y,0) = \max(e^x - 1, 0). \tag{75}$$

Um neben der Zeitableitung nur einen Term mit zweiter Ableitung überzubehalten verwenden wir den Ansatz,

$$v(y,\tau) = e^{\alpha y + \beta \tau} u(y,\tau). \tag{76}$$

Eingesetzt in Gl.(74) entsteht,

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (k-1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - ku. \tag{77}$$

Die niedrigeren Ableitungsterme verschwinden, wenn

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \tag{78}$$

$$0 = 2\alpha + (k-1). \tag{79}$$

Dies läßt sich auflösen nach $\alpha$, $\beta$

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \tag{80}$$

$$\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2, \tag{81}$$

so daß also bei der Wahl von $u$ mit

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)y - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(y,\tau), \tag{82}$$

aus (72) die Diffusionsgleichung wird

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{83}$$

Hierbei ist $-\infty < x < \infty$, $\tau > 0$, und es gilt die Randbedingung

$$u(y,0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)y} - e^{\frac{1}{2}(k-1)y}\right). \tag{84}$$

Die Lösung der Diffusionsgleichung ist wohlbekannt (Nachprüfen durch Einsetzen, oder alternativ, durch Lösen durch Fouriertransformation). Für ein Anfangswertproblem lautet die Lösung der Diffusionsgleichung

$$u(y,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, u(s,0)\, e^{-\frac{(y-s)^2}{4\tau}}, \tag{85}$$

wobei $u(s,0)$ die Anfangswertverteilung aus Gl. (84) bezeichnet. Die max— Funktion kappt die untere Integrationsgrenze, und das resultierende Integral ist uns bei der Behandlung des Zuganges von Bouchaud–Sornette–Potters schon begegnet. Rückführung auf das Integral $G(a)$ in (87) und Rücksubstitution der Orginalvariablen liefert genau wie dort die Black–Scholes–Formel für eine europäische Call–Option,

$$C(x,t) = xG\left(\frac{y_-}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - x_s e^{-r(T-t)} G\left(\frac{y_+}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), \tag{86}$$

mit

$$G(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}x^2}, \tag{87}$$

und

$$y_- = \log x_s - \log x - r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \tag{88}$$

$$y_+ = \log x_s - \log x - r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t). \tag{89}$$

Die Abhängigkeiten des resultierenden Preises von den verschiedenen Parametern haben wir bereits ausführlich in der letzten Vorlesung diskutiert.

Wir fassen abschließend nocheinmal die Voraussetzungen, die dem Ansatz von Black–Scholes zugrunde liegen, zusammen:

1. Keine Arbitragemöglichkeit
2. Log–normal verteilte Aktienkurse
3. Zinsrate $r$ ist bekannt
4. Volatilität $\sigma$ ist bekannt
5. Keine Transaktionskosten

6. Kontinuierliches Handeln möglich

7. Shortselling ist erlaubt

8. Aktien sind beliebig teilbar

9. Keine Dividenden

Mehr pragmatisch orientierte Informationen zum Handel mit Derivaten findet man in [14, 3, 4]. Eine Sammlung von Optionspreisformeln (ohne Herleitungen) für verschiedenartigste Optionen ist [10].

Abschließend bemerken wir noch, daß die Black–Scholes–Formel von einer Kenntnis der Volatilität $\sigma$ ausgeht. Empirisch zugänglich sind jedoch nur die historischen Volatilitäten, wie sie den Kursentwicklungen der Vergangenheit entnommen werden können. Die von den Marktteilnehmern für die Zukunft erwarteten Volatilitäten können davon jedoch wesentlich verschieden sein. In der Tat, unterscheiden sich die historischen Volatilitäten deutlich von den "impliziten" Volatilitäten, d.h. denjenigen die sich aus den tatsächlichen Optionspreisen unter Annahme der Black–Scholes–Formel ergeben [6, 5]. Diese Abweichungen zwischen historischen und impliziten Volatilitäten können teilweise auch als Korrekturen des Marktes aufgefaßt werden, die beispielsweise der Abweichung der tatsächlichen Verteilung der Aktienkurse (z.B. lange Schwänze) von der der Black–Scholes–Formel zugrunde liegenden Log–Normal–Verteilung Rechnung tragen.

# Literatur


[1] L. Arnold: *Stochastic Differential Equations* Wiley, New York, 1974.

[2] M. Baxter, A. Rennie: *Financial Calculus.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] R. Beike, A. Potthoff: *Optionsscheine.* (2. Auflage) Beck–Wirtschaftsberater im dtv, Verlag Beck, München, 1998.

[4] R. Beike, J. Schlütz: *Finanznachrichten. Lesen–Vestehen–Nutzen.* (2. Auflage) Schäffer–Poeschel Verlag, Stuttgart, 1999.

[5] C. Bennemann, C. Burmester, A. Werner: *Random Walk auf dem Börsenparkett.* Physikalische Blätter, **56** (2), 61–63, 2000.

[6] J.-P. Bouchaud, M. Potters: *Theory of Financial Risk.* Draft version available from `http://www.science-finance.fr`, 1999.

[7] C. W. Gardiner: *Handbook of Stochastic Methods.* (2.te korrigierte Auflage) Springer–Verlag, Berlin, 1990.

[8] I. I. Gihman, A. V. Skorohod; *Stochastic Differential Equations* Springer, Berlin, 1972.

[9] N. G. van Kampen: *Stochastic Processes in Physics and Chemistry.* North–Holland, Amsterdam, 1992.

[10] E. G. Haug: *The Complete Guide to Option Pricing Formulas.* MacGraw–Hill, New York, 1997.

[11] J. Hull: *Options, Futures, and Other Derivative Securities.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[12] A. Irle: *Finanzmathematik.* Teubner Studienbücher Mathematik. Teubner Verlag, Stuttgart, 1998.

[13] R. Korn, E. Korn: *Optionsbewertung und Portfolio–Optimierung.* Gabler/Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1999.

[14] I. Uszczapowski: *Optionen und Futures verstehen.* Beck–Wirtschaftsberater im dtv, Verlag Beck, München, 1991.

[15] H. von Weizsäcker, G. Winkler: *Stochastic Integrals.* Vieweg Verlag, Braunschweig, 1990.

[16] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison,: *Option Pricing: Mathematical Models and Computation.* Oxford Financial Press, Oxford, 1993.

[17] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne: *The Mathematics of Financial Derivatives.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.