Econophysics WS1999/2000: Notizen zur Vorlesung über Optionen

Jörg C. Lemm

Institut für Theoretische Physik I, Universität Münster
Wilhelm–Klemm–Str.9, D–48149 Münster, Germany
`lemm@uni-muenster.de`
`http://pauli.uni-muenster.de/~lemm/`

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkung

Nach der vorbereiteten Behandlung von Forwards und Futures kommen wir nun zur Bepreisung von Optionen auf der Basis des Ansatzes von Bouchaud–Sornette–Potters [4]. Dieser Ansatz, basierend auf einem Kriterium der minimalen Varianz, und ist allgemeiner als der klassische Black–Scholes–Zugang [6, 10, 11, 1, 7, 8], den wir später vorstellen werden. Er erfordert jedoch mehr Rechenaufwand als der klassiche Weg über den Ito–Kalkül. Einige typische Rechnungen führen wir in dieser Vorlesung exemplarisch im Detail vor.

2 Optionen

2.1 Grundlegende Begriffe

Eine Option ist ein bedingtes Termingeschäft. Vekauft wird ein Recht. Der Käufer kann dieses Recht einlösen, er muß es aber nicht. Käufer und Verkäufer befinden sich bei eienm Optionsgeschäft in folgender Situation:

Der **Käufer (Long–Position)**

A. erwirbt ein Recht.

B. Für dieses Recht zahlt er eine Prämie.

Der **Verkäufer (Schreiber, Stillhalter, Short–Position)**

A. übernimmt eine Pflicht.

B. Für das Übernehmen dieser Pflicht erhält er eine Prämie.

Die Prämie wird üblicherweise sofort gezahlt.

Insbesondere gibt es folgende Optionsgrundtypen:

Call–Option (Kaufoption): Der Käufer erwirbt das Recht auf Kauf eines Underlyings (etwa einer Aktie) zu einem bestimmten Preis (Basispreis, "strike price") an (oder bis zu) einem bestimmten Verfalls(Ablauf,Fälligkeits)datum.

Put–Option (Verkaufsoption): Der Käufer erwirbt das Recht auf Verkauf eines Underlyings (etwa einer Aktie) zu einem bestimmten Preis (Basispreis, strike price) an (oder bis zu) einem bestimmten Fälligkeitsdatum.

Die Abbildungen 1, 2, sowie 3, 4 zeigen die Gewinne und Verluste am Verfallstag in Abhängigkeit vom Preis des Underlyings (z.B. Aktienkurs) für die entsprechenden vier Kombinationsmöglichkeiten von Call– und Put–Optionen in Long– und Short–Position. Diese vier Grungtypen von Optionspositionen können als Bausteine dienen um komplexere Gewinn/Verlustfunktionen zu konstruieren. Bei einem "spread" werden beispielsweise Optionen gleichen Typs (Call/Put) aber unterschiedlichen Basispreisen gekauft und verkauft. Abb. 5 zeigt einen "bullish vertical spread", die Kombination eines Calls in Long–Position und eines Calls in Short–Position letzterer mit höherem Basispreis. Bei einer "combination" werden Calls und Puts kombiniert. Abb. 6 zeigt z.B. eine "bottom vertical combination" die Kombination eines Calls in Long–Position und eines Puts in Long–Position mit höherem Basispreis.

Der Käufer eines Calls, sowie der Schreiber eines Puts profitieren von steigenden Underlyingkursen. Umgekehrt profitieren der Schreiber eines Calls, sowie der Käufer eines Puts von fallenden Kursen. Neben spekulativen Gesichtspunkten, kann eine Option als Versicherung eingesetzt werden. Beispielsweise sichert der Kauf Einer Put–Option für eine Aktie im eigenen Besitz gegen einen Kursverfall dieser Aktie.

Weiterhin unterscheidet man:

Europäische Option: Das Recht auf Kauf (Call) oder Verkauf (Put) gilt nur für den Verfallstag der Option.

Amerikanische Option: Das Recht auf Kauf (Call) oder Verkauf (Put) gilt ab sofort bis zum Verfallstag der Option.

Wir werden uns im Folgendem hauptsächlich mit europäischen Optionen beschäftigen (wie z.B. die DAX–Option). Da eine amerikanische Option ein umfassenderes Recht als eine entsprechende europäische Option einräumt, kann ihr Wert (Preis) insbesondere nie geringer als die einer europäischen Option sein.

Ähnlich zu Futures sind an der Börse handelbare Optionen stark genormt (im Gegensatz zu mehr individuellen "over the counter" (OTC) Optionen oder individuellen Versicherungsverträgen). Außerdem ist bei börsennotierten Optionen das Erfüllungsrisiko durch ein Marginkonto abgesichert (siehe Notizen zu Forards und Futures). Man beachte, daß nach Abschluß eines Optionsgeschäftes (Call oder Put) nur der Halter der Short–Position ein verbleibendes Risiko zu tragen hat. Der Käufer hat seine Verpflichtung mit der Bezahlung der Prämier bereits erfüllt. Im Gegensatz zu einem unbedingten Termingeschäft (Forward oder Future) ist hier die Situation asymmetrisch. Deshalb ist auch nur für den Schreiber einer Option ein Marginkonto erforderlich um seine Erfüllungspflicht zum Ablaufdatum abzusichern.

Wie bei Futures, gibt es auch Optionen bei welchen das Underlying nicht tatsächlich geliefert werden muß sondern bei Einlösung der Option ein Barausgleich erfolgt.

Für weitergehende Informationen zu praktischen Aspekten im Zusammenhang mit Optionen siehe beispielsweise [9, 2, 3].

2.2 Beispiel ODAX (Eurex)

Als Beispiel seien die Spezifikationen der DAX–Optionen hier wiedergegeben. Quelle:
`http://www.eurexchange.com/entrancehall/e_specification_odax.html`

Underlying Instrument:	The Deutscher Aktienindex (DAX).
Contract Value:	EUR 5 per DAX index point.
Settlement:	Cash settlement, payable on the first exchange trading day immediately following the last trading day.
Quotation:	In points, carried out one decimal place.
Min. Price Movem.:	0.1 of a point, representing a value of EUR 0,50.
Last Trading Day:	The third Friday of the expiration month, if that is an exchange trading day; otherwise, on the exchange trading day immediately prior to that Friday. Trading ceases at the start of the intra-day trading auction on the electronic trading system (Xetra) at 1:00 p.m. CET.

Daily Settlement Price: The last-paid price of the trading day; or, if the last-paid price is older than 15 minutes or does not reasonably reflect actual market conditions, then Eurex will establish the official settlement price.

Final Settlement Price: The value of the DAX, determined on the basis of the collective prices of the shares contained in the DAX index as reflected in the intraday trading auction on the electronic system of the Frankfurt Stock Exchange (Xetra).

Exercise Period: European style, i.e. an option may only be exercised on the last trading day of the options series up to the end of the Post-Trading Period.

Expiration Months: The three nearest calendar months, the three following months within the cycle March, June, September and December, as well as the two following months of the cycle June and December; i.e. options contracts are available with a duration of 1, 2, 3, max. 6, max. 9, max. 12, as well as max. 18 and max. 24 months.

Exercise Prices: Exercise price gradations for DAX options are as follows:

Expiration Months with a remaining term up to	Number of strike prices	Exercise price gradations in index points
6 months	9	50
12 months	5	100
24 months	5	200

Each contract month will be introduced with at least five strike prices.

Option Premium: The EUR equivalent of the premium in points is payable on the first trading day immediately following the trade date.

Trading Hours: 8:50 a.m. until 5:30 p.m. CET.

3 Der "faire" Preis einer Option

3.1 Erwartungswertprinzip und "No–Arbitrage"–Prinzip

Ist ein Handel mit dem Underlying eines Termingeschäftes nicht möglich, so ergibt sich aus einem Anfangsvermögen W_0 zur Zeit t_0 für ein Termingeschäft

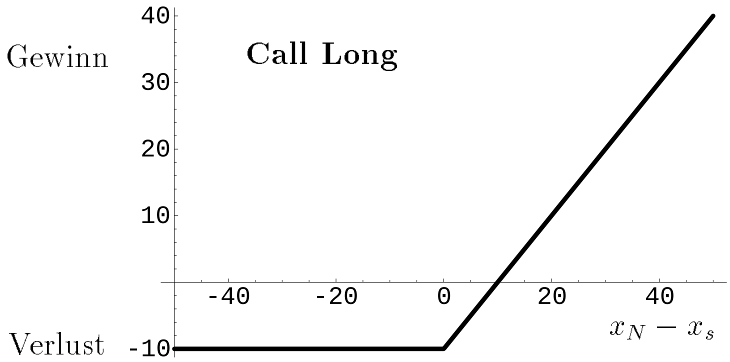

Abbildung 1: Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von der Differenz $x_N - x_s$ for den Käufer (Long–Position) einer Call–Option mit Berücksichtigung der Optionsprämie.

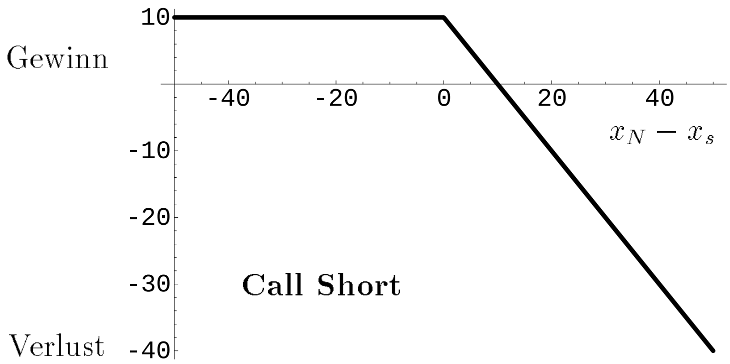

Abbildung 2: Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von der Differenz $x_N - x_s$ for den Schreiber (Stillhalter, Short–Position) einer Call–Option mit Berücksichtigung der Optionsprämie.

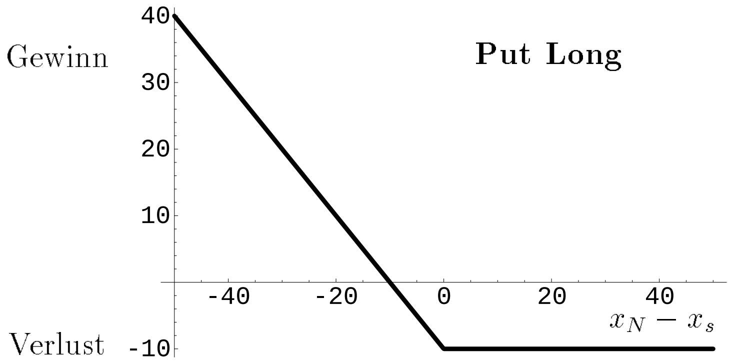

Abbildung 3: Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von der Differenz $x_N - x_s$ for den Käufer (Long–Position) einer Put–Option mit Berücksichtigung der Optionsprämie.

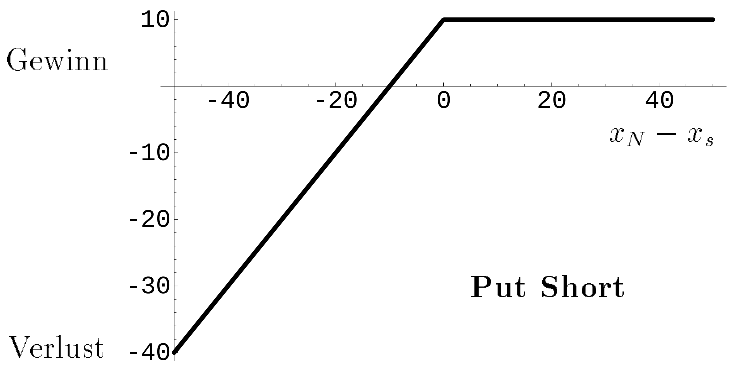

Abbildung 4: Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von der Differenz $x_N - x_s$ for den Schreiber (Stillhalter, Short–Position) einer Put–Option mit Berücksichtigung der Optionsprämie.

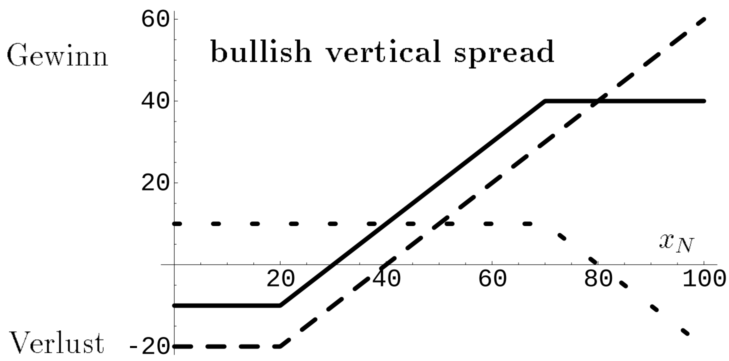

Abbildung 5: Schematische Darstellung eines “bullish vertical spread”. Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von dem Preis x_N bei Kombination eines Calls in der Long–Position mit Basispreis $x_s^{(c,l)} = 20$ und eines Calls in der Short–Position mit Basispreis $x_s^{(c,s)} = 70$.

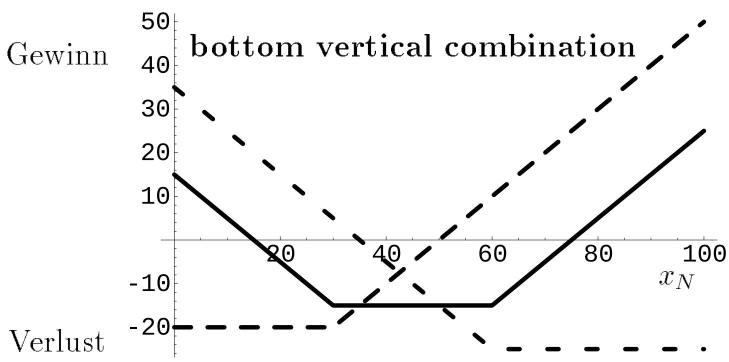

Abbildung 6: Schematische Darstellung einer “bottom vertical combination”. Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von dem Preis x_N bei Kombination eines Calls in der Long–Position mit Basispreis $x_s^{(c,l)} = 30$ und eines Puts in der Long–Position mit Basispreis $x_s^{(p,l)} = 60$.

mit der Vermögenswirkung W_T zur Zeit t_N ein Gesamtvermögen $W(t_N) = W_N$ zur Zeit t_N von

$$W_N = \underbrace{W_0(t_N)}_{\substack{\text{Aufgezinstes} \\ \text{Anfangsvermögen}}} + \underbrace{W_T(t_N)}_{\substack{\text{Gewinn/Verlust aus} \\ \text{Termingeschäft}}} . \tag{1}$$

Für ein Forward hatten wir beispielsweise gesehen, daß für den Halter der Short–Position

$$W_T(t_N) = F - x_N, \tag{2}$$

wobei $F = F(t_N)$ den Kaufpreis representiert zu dem der Halter der Short–Position sich zur Zeit t_0 verpflichtet hat das Underlying zur Zeit t_N zu kaufen. Die Variable x_N bezeichnet den tatsächlichen Preis des Underlyings der sich zur Zeit t_N ergeben hat. Nehmen wir für risikolose Anleihen eine Zinsrate an von r für die Zeit $\tau = T/N$, so ergibt sich nach N Zeitschritten

$$W_0(t_N) = W_0(t_0)(1+\rho)^N, \tag{3}$$

mit $\rho = r\tau$ bei konstantem $\tau = \Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. Eine naheliegende Bedingung an einen fairen Preis ist die Forderung, daß keine Partei durch das Termingeschäft bevorzugt oder benachteiligt werden soll. Dies bedeuted das das Vermögen W_N zur zeit T_N nicht durch Abschluß des Geschäftes beinflußt werden darf, also

$$0 = \Delta_\rho W_N = W_N - (1+\rho)^N W_0, \tag{4}$$

wobei $(1+\rho)^N W_0$ dasjenige Vermögen darstellt, was sich ohne Termingeschäft zur Zeit T_N ergäben hätte. Für den (unrealistischen) Fall eines Forwards auf ein Underlying mit deterministischer Zeitentwicklung ergäbe sich beispielsweise das triviale Resultat,

$$W_N = W_0(1+\rho)^N \Rightarrow F(t_N) = x_N. \tag{5}$$

Typischerweise ist x_N jedoch eine Zufallsgröße. Dann führt die Forderung, daß keine Partei im Mittel bevorzugt oder benachteiligt werden soll, zu,

$$0 =< \Delta_\rho W >=< W_N > -W_0(1+\rho)^N. \tag{6}$$

Im Falle eines Forwards folgt also

$$< W_N >= W_0(1+\rho)^N \Rightarrow F(t_N) =< x_N > . \tag{7}$$

Diese Methode einen Preis für ein Termingeschäft zu berechnen nennt sich deshalb **Erwartungswertprinzip** (Bachelier).

Sobald das Underlying aber handelbar ist, kann sich die Situation wesentlich verändern. Beschränken wir uns auf den Handel mit dem Underlying des betrachteten Termingeschäftes, so können wir eine Handelstrategie kennzeichnen durch die Anzahl ϕ_k der zur Zeit t_k gehaltenen Underlyinganteile zum momentanen Preis von x_k. Bezieht man den Gewinn bzw. Verlust aus dem Handel mit dem Underlying in die Vermögensbilanz mit ein, so verallgemeinert sich Gl. (1) zu,

$$W_N = \underbrace{W_0(t_N)}_{\substack{\text{Aufgezinstes}\\ \text{Anfangsvermögen}}} + \underbrace{W_\phi(t_N)}_{\substack{\text{Gewinn/Verlust}\\ \text{aus Handel}}} + \underbrace{W_T(t_N)}_{\substack{\text{Gewinn/Verlust aus}\\ \text{Termingeschäft}}} . \tag{8}$$

Den Gewinn bzw. Verlust aus dem Handel mit dem Underlying haben wir bereits im Kapitel über unbedingte Termingeschäfte berechnet,

$$W_\phi(t_N) = (1+\rho)^N \left(\sum_{k=0}^{N-1} \phi_k [\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k] \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k [x_{k+1} - (1+\rho) x_k](1+\rho)^{N-k-1}, \tag{9}$$

bezogen auf die Zeit t_N und mit diskontierten (auf t_0 abgezinsten) $\tilde{x}_k = x_k(1+\rho)^{-k}$. Verschiedene Handelstrategien $\phi = \{\phi_k | 0 \leq k \leq N-1\}$ führen jetzt im allgemeinen zu einer unterschiedlichen Verteilung $p(W_N)$. Die Veränderung des Vermögens $\Delta_\rho W_N$ im Zeitraum T enthält zwei Zufallsanteile, nämlich

$$\Delta_\rho W_\phi = W_\phi(t_N) - W_\phi(t_0)(1+\rho)^N, \tag{10}$$

$$\Delta_\rho W_T = W_T(t_N) - W_T(t_0)(1+\rho)^N. \tag{11}$$

Zur Bestimmung eines Preises für ein Termingeschäft müssen wir uns also als erstes auf eine (Hedging–)Strategie ϕ festlegen. Ähnlich zu unserem Vorgehen bei Portfolio–Optimierung besteht nun eine Möglichkeit darin auf das **Prinzip der minimalen Varianz** zurückzugreifen. In diesem Falle verstehen wir als optimale Strategie dasjenige ϕ^*, welches die Varianz der Vermögensänderung minimiert,

$$\phi^* = \text{argmin}_\phi < [\Delta_\rho W_N(\phi)]^2 > . \tag{12}$$

Anstatt den Erwartungswert wie bei der Portfolio–Optimierung zu fixieren, können wir ihn nun zur Bestimmung eines fairen Preis verwenden indem wir fordern,

$$0 =< \Delta_\rho W_N(\phi^*) >=< W_N(\phi^*) > -W_0(1+\rho)^N, \tag{13}$$

also

$$< \Delta_\rho W_{\phi^*} > + < \Delta_\rho W_T > . \qquad (14)$$

Üblicherweise nehmen wir an, daß die Akteure keine marktbeherschende Stellung einnehmen, d.h., daß die Handelstrategie ϕ den Preis x_N nicht beeinflußt, also $\Delta_\rho W_T \neq \Delta_\rho W_T(\phi)$.

Im Falle eines Forward fanden wir

$$W_\phi = -W_T = F - x_N = F - x_0(1+\rho)^N - W_{\phi=1}, \qquad (15)$$

(wobei $F = F(t_N)$, $W_\phi = W_\phi(t_N)$, $W_T = W_T(t_N)$ und $W_\phi(t_0) = 0$, $W_T(t_0) = 0$), also

$$W_\phi = x_N - F = W_{\phi=1} + x_0(1+\rho)^N - F. \qquad (16)$$

Damit ist also bei der Wahl $\phi_k^* = 1$ die Varianz $< [\Delta_\rho W_N(\phi)]^2 > = 0$, so daß

$$F = x_0(1+\rho)^N. \qquad (17)$$

Wir haben bereits diskutiert, daß für den Fall der Handelbarkeit des Underlyings, sich dieser Preis einstellen muß da eine Abweichung davon risikolose Gewinne (Arbitrage) möglich macht. In solch einem risikolosen Fall spricht man vom **"No–Arbitrage"–Prinzip** zur Preisbestimmung eines Termingeschäftes.

Im Falle von Optionen ist eine Handelsstrategie, die eine Streuungsfreie Vermögensbilanz zur Zeit t_N liefert nur unter idealisierten Bedingungen möglich, auf denen z.B. der klassische Black–Scholes–Ansatz beruht.

Im allgemeinen Fall, wenn keine Hedging–Strategie ϕ^* mit verschwindender Varianz $< [\Delta_\rho W_N(\phi^*)]^2 > = 0$ möglich ist, wird der Verkäufer eine Risikoprämie C_{Risiko} zu dem aus der Forderung $< \Delta W_N >= 0$ bestimmten Preis $C_{\text{Erwartungswert}}(\phi^*)$ addieren. Als Gesamtpreis einer Option C_{Option} ergibt sich dann,

$$C_{\text{Option}} = C_{\text{Erwartungswert}}(\phi^*) + C_{\text{Risiko}}(\phi^*). \qquad (18)$$

3.2 Vermögensbilanz bei Optionsgeschäften

Betrachten wir nun die Vermögensbilanz des Schreibers (Long–Position) einer europäischen Call–Option mit Ausübungspreis (strike price) x_s,

$$W_N = (W_0 + C)(1+\rho)^N - \max(x_N - x_s, 0) + (1+\rho)^N \sum_{m=0}^{N-1} \phi_m \Delta\tilde{x}_m, \qquad (19)$$

wobei wir berücksichtigt haben, daß die Optionsprämie bereits bei Abschluß, also zur Zeit t_0 fällig wird.

Aus der Bedingung für einen fairen Preis

$$0 = < \Delta_\rho W_N > = < W_N > - W_0 (1+\rho)^N, \tag{20}$$

folgt für den Optionspreis (dem in dem realistischen Fall, in dem keine risikofreie Hedging–Strategie möglich ist, noch eine Risikozulage zugeschlagen werden muß),

$$C = (1+\rho)^{-N} < \max(x_N - x_s, 0) > - < \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k \Delta\tilde{x}_k > . \tag{21}$$

Hierbei ist

$$\Delta\tilde{x}_k = \tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k = (1+\rho)^{-(k+1)} \Delta_\rho x \tag{22}$$

mit

$$\Delta_\rho x_k = x_{k+1} - (1+\rho) x_k = \Delta x_k - \rho x_k \tag{23}$$

und $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Analog zu den relativen Änderungen

$$\eta_k = \frac{\Delta x_k}{x_k}, \tag{24}$$

definieren wir nun

$$\tilde{\eta}_k = \frac{\Delta\tilde{x}_k}{(1+\rho)\tilde{x}_k} = \frac{\Delta_\rho x_k}{x_k}, \tag{25}$$

welches zu η_k in der Beziehung steht $\eta_k = \tilde{\eta}_k + \rho$.

Wir nehmen nun an, daß die $\Delta_\rho x_k$ bzw. $\tilde{\eta}_k = \frac{\Delta_\rho x_k}{x_k}$ unabhängig normalverteilt sind. In beiden Fälen können wir die Kurse x_n durch die unabhängigen Zufallsgrößen $\Delta_\rho x_k$ bzw. $\tilde{\eta}_k$ ausdrcken. Für $\Delta_\rho x_k$ erhalten wir beispielsweise durch Iteration, analog zu $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k \left[= x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_\rho x_k + \rho x_k)\right]$,

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \Delta x_{n-1} = x_{n-1} + \Delta_\rho x_{n-1} + \rho x_{n-1} \\ &= x_{n-1}(1+\rho) + \Delta_\rho x_{n-1} \\ &= x_{n-2}(1+\rho)^2 + \Delta_\rho x_{n-2}(1+\rho) + \Delta_\rho x_{n-1} \\ &\quad \ldots \\ &= x_0(1+\rho)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_\rho x_k (1+\rho)^{N-k-1}. \end{aligned} \tag{26}$$

Dies bedeutet, daß x_n nur von den $\Delta_\rho x_k$ mit $k < n$ abhängt. Dasselbe gilt daher für die Zahl der gehaltenen Aktien $\phi_n(x_n)$, die nur vom bekannten aktuellen Kurs x_n, aber nicht von der noch unbekannten zukünftigen Kursänderung $\Delta_\rho x_k$ abhängt. Die Unabhängigkeit der ϕ_n von $\Delta_\rho x_n$, bedeutet

$$< \phi_n \Delta_\rho x_n > = < \phi_n >< \Delta_\rho x_n > . \tag{27}$$

In der Tat, folgt diese Beziehung direkt aus Gleichung (26) und der Unabhängigkeit der $\Delta_\rho x_k$, d.h. einer faktorisierenden gemeinsamen Wahrscheinlichkeit $p(\Delta_\rho x_0, \cdots, \Delta_\rho x_n) = \prod_{k=0}^n p(\Delta_\rho x_k)$,

$$\begin{aligned} < \phi_n \Delta_\rho x_n > &= \int \left(\prod_{k=0}^{n} d(\Delta_\rho x_k) p(\Delta_\rho x_k) \right) \underbrace{\phi_n(x_n)}_{\substack{\text{von } \Delta_\rho x_n \\ \text{unabhängig}}} \Delta_\rho x_n \\ &= \underbrace{\left[\int \left(\prod_{k=0}^{n-1} d(\Delta_\rho x_k) p(\Delta_\rho x_k) \right) \phi_n(x_n) \right]}_{< \phi_n >} \underbrace{\left[\int d(\Delta_\rho x_n) p(\delta_\rho x_n) \Delta_\rho x_n \right]}_{< \Delta_\rho x_n >} \\ &= < \phi_n >< \Delta_\rho x_n > . \end{aligned} \tag{28}$$

Ähnlich wie (26) läßt sich x_n auch durch die bis zum Zeitpunkt t_n bereits aufgetretenen η_k bzw. $\tilde{\eta}_k$ ausdrücken

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k x_k = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{\eta}_k + \rho) \, x_k. \tag{29}$$

Expliziter erhalten wir durch Iteration,

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \eta_{n-1} x_{n-1} = x_{n-1}(1 + \eta_{n-1}) \\ &= x_{n-2}(1 + \eta_{n-2})(1 + \eta_{n-1}) \\ &\cdots \\ &= x_l(1 + \eta_l)(1 + \eta_{l+1}) \cdots (1 + \eta_{n-1}) \\ &= x_l \prod_{k=l}^{n-1} (1 + \eta_k) = x_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \eta_k), \end{aligned} \tag{30}$$

für $0 \leq l \leq k$, und ebenso für die $\tilde{\eta}_k$,

$$x_n = x_{n-1} + \tilde{\eta}_{n-1} x_{n-1} + \rho x_{n-1} = x_{n-1}(1 + \rho + \tilde{\eta}_{n-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= x_{n-2}(1+\rho+\tilde{\eta}_{n-2})(1+\rho+\tilde{\eta}_{n-1}) \\
&\quad \cdots \\
&= x_l(1+\rho+\tilde{\eta}_l)(1+\rho+\tilde{\eta}_{l+1})\cdots(1+\rho+\tilde{\eta}_{n-1}) \\
&= x_l \prod_{k=l}^{n-1}(1+\rho+\tilde{\eta}_k) = x_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1+\rho+\tilde{\eta}_k). \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Für den Fall, daß die $\tilde{\eta}_k$ als unabhängige Zufallsvariablen aufgefaßt werden gilt daher,

$$
<\phi_n \Delta_\rho x_n> = <\phi_n x_n \tilde{\eta}_n> = <\phi_n x_n><\tilde{\eta}_n> . \qquad (32)
$$

Unter der Annahme $<\Delta_\rho x_k> = m_1 = m\tau = 0$ bei unabhängigen Zufallsvariablen $\Delta_\rho x_k$, bzw. $<\tilde{\eta}_k> = m_1 = m\tau = 0$ bei unabhängigen $\tilde{\eta}_k$, fällt also der ganze "Tradingterm" $<\sum_{k=0}^{N-1}\phi_k \Delta\tilde{x}_k>$ aus Gl. (21) heraus.

3.3 Abschätzung des Einflusses von m

Da wir im Folgenden spezeill den Fall $m = 0$ näher diskutieren wollen, schätzen wir den Einfluß von m auf den Optionspreis ab. Wir berechnen dazu den Erwartungswert

$$
<\max(x_N - x_s, 0)> = \int_{x_s}^{\infty} dx \, \frac{x - x_s}{\sqrt{2\pi DT}} e^{-\frac{(x-x_0-mT)^2}{2DT}}, \qquad (33)
$$

für eine "At the money"–Option, d.h., für $x_0 = x_s$. Da eine normale und log–normale Verteilung in ihrem zentralen Bereich gut übereinstimmen, wählen wir eine Gaußverteilung für die Differenz $x_N - x_0$ mit Mittelwert mT und Varianz $DT = \sigma^2 x_0^2 T$. (Unter der Annahme $\eta_k = \Delta x_k/x_k \approx \Delta x_k/x_0$ gilt $\sigma^2_{\Delta x_k} = x_0^2\sigma^2_{\eta_k}$). Wir erhalten für $x_0 = x_s$,

$$
\begin{aligned}
<\max(x_N - x_s, 0)> &= \int_{x_s}^{\infty} dx \, \frac{x - x_s}{\sqrt{2\pi DT}} e^{-\frac{(x-x_s-mT)^2}{2DT}} \\
\left[\text{Substitution } z = \tfrac{x-x_s-mT}{\sqrt{DT}}\right] &= \sqrt{\frac{DT}{2\pi}} \int_{-\frac{mT}{\sqrt{DT}}}^{\infty} dz\, z\, e^{-\frac{z^2}{2}} + \frac{mT}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{mT}{\sqrt{DT}}}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} \\
[\text{Integrale (35) und (36)}] &= \sqrt{\frac{DT}{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{mT}{\sqrt{DT}}\right)^2}{2}} + \frac{mT}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(-\frac{mT}{\sqrt{2DT}}\right)\right] \\
[\text{Entwicklung (38) und (39)}] &\approx \sqrt{\frac{DT}{2\pi}} + \frac{mT}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{mT}{\sqrt{DT}}\right]
\end{aligned}
$$

$$[\text{Annahme (40)}] \approx \sqrt{\frac{DT}{2\pi}} + \frac{mT}{2}. \tag{34}$$

mit $y = x - x_0 - mT$, $z = \frac{y}{\sqrt{DT}}$. Hierbei haben wir benutzt, daß

$$\int_a^b dz\, z\, e^{-\frac{z^2}{2}} = -e^{-\frac{z^2}{2}}|_a^b = -e^{-\frac{a^2}{2}} - e^{-\frac{b^2}{2}}, \tag{35}$$

sowie

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}(\frac{a}{\sqrt{2}})\right]. \tag{36}$$

Schließlich haben wir bis zur ersten Ordnung in mT entwickelt gemäß

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \cdots, \tag{37}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(-x^2)^n \approx 1, \tag{38}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \approx x, \tag{39}$$

und angenommen, daß

$$\frac{mT}{\sqrt{DT}} << 1, \tag{40}$$

ist (also $mT << \sqrt{DT}$).

Bei $T = 100$ Tagen, einer Tagesvolatilität von $\sigma^2 = 1\%$, einer durchschnittlichen jährlichen Rendite von $m = 5\%$ und einem Underlyingkurs von $x_0 = 100$ Punkten, erhalten wir

$$\sqrt{\frac{DT}{2\pi}} \approx 4 \text{ Punkte}, \quad \frac{mT}{2} \approx 0.67 \text{ Punkte}. \tag{41}$$

Resultate für $m = 0$ können also eine sinnvolle erste Näherung sein. Insbesondere ist die klassische Black–Scholes–Lösung m–unabhängig.

3.4 Der Fall $m = 0$

Als nächstes nehmen wir an, daß über die risiokofreie Verzinsung mit $\rho = rT$ kein weiterer systematischer Drift im Aktienkurs zu finden ist. Wir haben gesehen, daß bei $m\tau = < \Delta_\rho x_k > = 0$, bzw. $m\tau = < \tilde{\eta}_k > = 0$, der

"Tradingterm" $< \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k \Delta \tilde{x}_k >$ in Gl. (21) nicht beiträgt. Es verbleibt also,

$$\begin{aligned} C &= (1+\rho)^{-N} < \max(x_N - x_s, 0) > \\ &= (1+\rho)^{-N} \int_{x_s}^{\infty} dx_n \, (x_N - x_s, 0) p(x_N). \end{aligned} \tag{42}$$

Wir diskutieren den Fall einer log–normalen Verteilung der Aktienkurse, also von normalverteilten $\tilde{\eta}_k$, mit $< \tilde{\eta}_k > = 0$. Hierzu ist es zweckmäßig zu logarithmischen Kursen überzugehen. Definieren wir

$$y_N = \log x_N - \log x_0 (1+\rho)^N = \log \frac{x}{x_0 (1+\rho)^N}, \tag{43}$$

d.h. $x_N = x_0 (1+\rho)^N e^y$, und

$$y_s = \log x_s - \log x_0 (1+\rho)^N = \log \frac{x_s}{x_0 (1+\rho)^N}, \tag{44}$$

d.h. $x_s = x_0 (1+\rho)^N e_s^y$, so folgt aus (42) für $m = 0$,

$$C = x_0 \int_{y_s}^{\infty} dy_N \, \left(e^{y_N} - e^{y_s} \right) p(y_N). \tag{45}$$

Definieren wir weiterhin, analog zu (43) und (44),

$$y_m = \log x_m - \log x_0 (1+\rho)^m = \log \frac{x_m}{x_0 (1+\rho)^m}, \tag{46}$$

so folgt für die Differenz $\Delta y_m = y_{m+1} - y_m$,

$$\begin{aligned} y_{m+1} - y_m &= \log \frac{x_{m+1}}{x_0 (1+\rho)^{m+1}} - \log \frac{x_m}{x_0 (1+\rho)^m} \\ &= \log \frac{x_{m+1}}{x_m (1+\rho)} \\ &= \log \frac{x_m (1+\rho) + \Delta_\rho x_m}{x_m (1+\rho)} \\ &= \log \left(1 + \frac{\tilde{\eta}_m}{1+\rho} \right) \\ &\approx \frac{\tilde{\eta}_m}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_m^2}{2(1+\rho)^2} \\ &\approx \frac{\tilde{\eta}_m}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_m^2}{2}, \end{aligned} \tag{47}$$

mit $\tilde{\eta}_m = \frac{\Delta_\rho x_m}{x_m}$ und unter Benutzung von $\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ bei Mitnahme des Terms 2ter Ordnung in $\tilde{\eta}$ und Weglassen von Termen höherer Ordnung in $\tilde{\eta}$ und ρ.

Wir sind interessiert an der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Variablen y_N zum Ablaufzeitpunkt t_N der Option. Die Variable y_N läßt sich als Summe über Inkremente Δy_k schreiben,

$$y_N = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\tilde{\eta}_k}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_k^2}{2} \right), \tag{48}$$

da $y_0 = 0$. Solch eine "verallgemeinerte" Summenvariable entspricht einer "verallgemeinerte" Faltung und läßt sich durch eine "verallgemeinerte" Fouriertransformation berechnen. Ganz analog zur Berechnung der Verteilung einer einfachen Summenvariable finden wir für unabhängig, identisch verteilte $\tilde{\eta}_n$, d.h. $p(\tilde{\eta}_0, \cdots, \tilde{\eta}_{N-1}) = \prod_{k=0}^{N-1} p(\tilde{\eta}_k)$,

$$\begin{aligned}
p(y_N) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{N-1} d\tilde{\eta}_k p(\tilde{\eta}_k) \right) \delta \left[y_N - \sum_{k=0}^{N-1} \Delta y_k(\tilde{\eta}_k) \right] \\
\text{[mit (50)]} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} \left(\prod_{k=0}^{N-1} d\tilde{\eta}_k p(\tilde{\eta}_k) \right) e^{-iz\left[y_N - \sum_{k=0}^{N-1} \Delta y_k(\tilde{\eta}_k)\right]} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{-izy_N} \underbrace{\left(\prod_{k=0}^{N-1} d\tilde{\eta}_k p(\tilde{\eta}_k) e^{iz\Delta y_k(\tilde{\eta}_k)} \right)}_{\tilde{p}(z)^N \text{[siehe Def. (51)]}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{-izy_N} \, \tilde{p}(z)^N .
\end{aligned} \tag{49}$$

Hierbei haben wir die Fourierdarstellung der δ–Funktion benutzt

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \, e^{-izx}, \tag{50}$$

und eine verallgemeinerte Fouriertransformation definiert

$$\tilde{p}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k \, e^{iz\Delta y_k(\tilde{\eta}_k)} p(\tilde{\eta}_k) \approx \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k \, e^{iz\left[\frac{\tilde{\eta}_k}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_k^2}{2}\right]} p(\tilde{\eta}_k), \tag{51}$$

unter Benutzung von (47). Das bedeutet, die Verteilung einer verallgemeinerten Summe von unabhängigen Zufallsvariablen wird berechnet durch multiplizieren der verallgemeinerten Fouriertransformierten und anschließender (normaler) Fourierrücktransformation.

Die Berechnungsmethode (49) können wir nun verwenden für den Fall normalverteilter $\tilde{\eta}_k$,

$$p(\tilde{\eta}_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau} e^{-\frac{\tilde{\eta}_k^2}{2\sigma_\tau^2}}, \tag{52}$$

wobei $\sigma_\tau = \sigma\sqrt{\tau}$. Als verallgemeinerte Fouriertransformierte finden wir

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k \, e^{iz\left[\frac{\tilde{\eta}_k}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_k^2}{2}\right]} p(\tilde{\eta}_k) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k \, e^{iz\left[\frac{\tilde{\eta}_k}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_k^2}{2}\right]} e^{-\frac{\tilde{\eta}_k^2}{2\sigma_\tau^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k \, e^{-\frac{1+iz\sigma_\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\left[\tilde{\eta}^2 + 2\tilde{\eta}\frac{iz\sigma_\tau^2}{(1+\rho)(1+iz\sigma_\tau^2)}\right]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\tau^2}} e^{-\frac{z^2\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2(1+iz\sigma_\tau^2)}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k \, e^{-\frac{1+iz\sigma_\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\left[\tilde{\eta} + \frac{iz\sigma_\tau^2}{(1+\rho)(1+iz\sigma_\tau^2)}\right]^2}}_{\sqrt{\frac{2\pi\sigma_\tau^2}{1+iz\sigma_\tau^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+iz\sigma_\tau^2}} e^{-\frac{z^2\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2(1+iz\sigma_\tau^2)}},
\end{aligned} \tag{53}$$

wobei wir wieder den Exponenten quadratisch ergänzt und das verbleibende Gauß–Integral ausgeführt haben. Um die Verteilung für y_N zu erhalten müssen wir nun $\tilde{p}(z)^N$ invers fouriertransformieren,

$$\begin{aligned}
p(y_N) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \; e^{-izy_N} \tilde{p}(z)^N \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \; e^{-izy_N} \frac{1}{\sqrt{1+iz\sigma_\tau^2}^N} e^{-\frac{z^2 N\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2(1+iz\sigma_\tau^2)}}.
\end{aligned} \tag{54}$$

Dies ist ein unangenehmes Integral, insbesondere ist es kein Gauß–Integral in z. Es genügt uns jedoch den Fall $\tau \to 0$ zu betrachten, also $N \to \infty$ und $\sigma_\tau \to 0$, wobei aber $N\sigma_\tau^2 = T\sigma^2$ (mit $T = t_N - t_0 = N\tau$) endlich bleiben soll. Daraus haben wir $1 + iz\sigma_\tau^2 \to 1$ für den Term im Exponenten, und für den

Vorfaktor erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{1+iz\sigma_\tau^2}^N} = e^{-\frac{N}{2}\log(1+iz\sigma_\tau^2)} \to e^{-\frac{izN\sigma_\tau^2}{2}}, \tag{55}$$

nach Entwickeln der Logarithmusfunktion, also $\log(1+iz\sigma_\tau^2) \approx iz\sigma_\tau^2$. Damit wird die inverse Fouriertransformation (54) durchführbar und wir erhalten durch quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}
p(y_N) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz\ e^{-iz\left(y_N+\frac{N\sigma_\tau^2}{2}\right)} e^{-\frac{z^2 N\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz\ e^{-\frac{N\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2}\left(z^2+2zi\frac{(y_N+\frac{N\sigma_\tau^2}{2})(1+\rho)^2}{N\sigma_\tau^2}\right)} \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(y_N+\frac{N\sigma_\tau^2}{2}\right)^2}{2N\frac{\sigma_\tau^2}{(1+\rho)^2}}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz\ e^{-\frac{N\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2}\left(z-\frac{(y_N+\frac{N\sigma_\tau^2}{2})(1+\rho)^2}{N\sigma_\tau^2}\right)^2}}_{\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\frac{1+\rho}{\sigma_\tau}} \\
&= \frac{1+\rho}{\sigma_\tau\sqrt{2\pi N}}\ e^{-\frac{\left(y_N+\frac{N\sigma_\tau^2}{2}\right)^2}{2N\frac{\sigma_\tau^2}{(1+\rho)^2}}}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Wenn wir auch noch benutzen, daß $\rho = r\tau \to 0$, so können wir schreiben

$$p(y_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma_\tau^2}}\ e^{-\frac{\left(y+\frac{N\sigma_\tau^2}{2}\right)^2}{2N\sigma_\tau^2}}. \tag{57}$$

Dies ist also eine Gaußverteilung mit Mittelwert $\mu_{y_N} = -\frac{N\sigma_\tau^2}{2}$ und Varianz $\sigma_{y_N} = N\sigma_\tau^2 = T\sigma^2$. Wir wollen noch bemerken, daß diese Formel bei Verwendung des Ito–Kalküls (siehe nächste Stunde) sehr viel schneller erhalten werden kann. Ein Beispiel einer aus Gl. (57) resultierenden Verteilung $p(x_N)$ ist in Abb. 7 gezeigt.

Nun sind wir in der Lage den Optionspreis (42), d.h. das Integral in (45), zu berechnen. Setzen wir also (57) für $p(y_N)$ in (45) ein, so erhalten wir

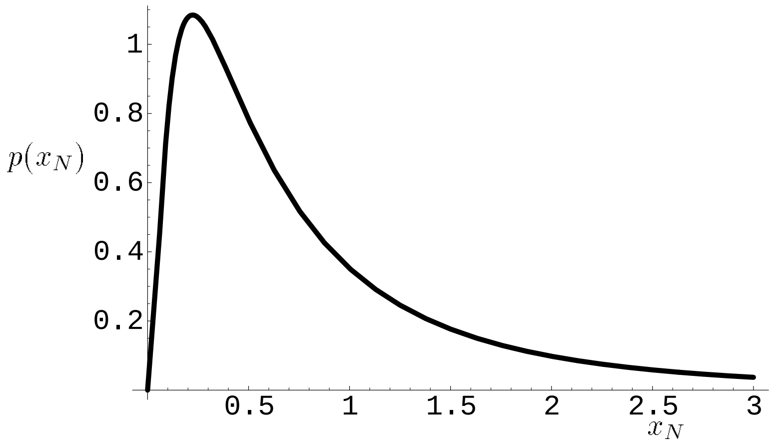

Abbildung 7: Beispiel einer Wahrscheinlichkeit $p(x_N)$ für den Preis des Underlyings bei Fälligkeit, die sich aus $p(y_N)$ aus Gl. (57) ergibt (N = 1000, ρ = 0, $\sigma_\tau = 1/\sqrt{N}$).

mit Hilfe quadratischer Ergänzung, den Substitutionen $z = \frac{y \mp \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$ und unter Verwendung von

$$(1+\rho)^{-N} = e^{-N\ln(1+\rho)} \to e^{-N\rho} = e^{-Nr\tau} = e^{-rT}, \tag{58}$$

also

$$y_s \to \log\frac{x_s}{x_0} - rT, \tag{59}$$

und

$$e^{y_s} \to \frac{x_s}{x_0} e^{-rT}, \tag{60}$$

die *Black–Scholes–Formel*,

$$\begin{aligned} C(x_0, x_s, T, \sigma, r) &= x_0 \int_{y_s}^{\infty} dy \, \frac{e^y - e^{y_s}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{\left(y+\frac{\sigma^2 T}{2}\right)^2}{2\sigma^2 T}} \\ &= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \left(\int_{y_s}^{\infty} dy \, e^{y-\frac{\left(y+\frac{\sigma^2 T}{2}\right)^2}{2\sigma^2 T}} - e^{y_s} \int_{y_s}^{\infty} dy \, e^{-\frac{\left(y+\frac{\sigma^2 T}{2}\right)^2}{2\sigma^2 T}} \right) \\ &= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \left(\int_{y_s}^{\infty} dy \, e^{-\frac{\left(y-\frac{\sigma^2 T}{2}\right)^2}{2\sigma^2 T}} - e^{y_s} \int_{y_s}^{\infty} dy \, e^{-\frac{\left(y+\frac{\sigma^2 T}{2}\right)^2}{2\sigma^2 T}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\frac{y_s - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} - e^{y_s} \int_{\frac{y_s + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} \right)$$

$$= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\frac{y_-}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} - \frac{x_s}{x_0} e^{-rT} \int_{\frac{y_+}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} \right), \tag{61}$$

wobei

$$y_- = \log \frac{x_s}{x_0} - rT - \frac{\sigma^2 T}{2}, \tag{62}$$

$$y_+ = \log \frac{x_s}{x_0} - rT + \frac{\sigma^2 T}{2}. \tag{63}$$

Mit Hilfe der Funktionen G, Φ oder erf, definiert durch (siehe auch Abb.8),

$$G(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^\infty dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} = \Phi(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-y} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}(\frac{y}{\sqrt{2}})\right], \tag{64}$$

läßt sich die Black–Scholes-Formel auch schreiben als

$$\begin{aligned} C(x_0, x_s, T, \sigma, r) &= x_0 G\left(\frac{\log\frac{x_s}{x_0} - rT - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right) - x_s e^{-rT} G\left(\frac{\log\frac{x_s}{x_0} - rT + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= x_0 \Phi\left(\frac{\log\frac{x_0}{x_s} + rT + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right) - x_s e^{-rT} \Phi\left(\frac{\log\frac{x_0}{x_s} + rT - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= x_0 G\left(\frac{y_-}{\sigma\sqrt{T}}\right) - x_s e^{-rT} G\left(\frac{y_+}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= x_0 \Phi\left(\frac{-y_-}{\sigma\sqrt{T}}\right) - x_s e^{-rT} \Phi\left(\frac{-y_+}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= \frac{x_0 - x_s e^{-rT}}{2} - \frac{x_0}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{y_-}{\sigma\sqrt{2T}}\right) + \frac{x_s e^{-rT}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{y_+}{\sigma\sqrt{2T}}\right). \end{aligned} \tag{65}$$

Die Abhängigkeit des Preises einer Call–Option von x_0, T, und r ist in den Abbildungen 9 – 11 dargestellt. Eine simultane Skalierung von σ^2 und r entspricht dabei einer entsprechenden inversen Änderung der Zeit T.

Für $T = 0$ wird $G(x)$ eine Stufenfunktion mit den Werten 1 für $x < 0$ und 0 für $x > 0$ sowie 0.5 für $x = 0$ (siehe Abb. 8),

$$\lim_{\sigma\to 0} G_\sigma(x) = \lim_{\sigma\to 0} G(x/\sigma) = \lim_{\sigma\to 0} \Phi(-x/\sigma) = \theta(-x), \tag{66}$$

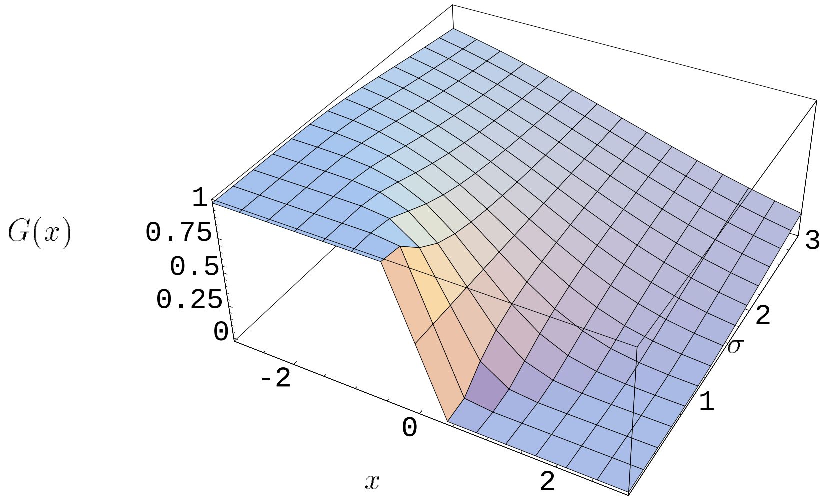

Abbildung 8: Die Funktion $G_\sigma(x) = G(x/\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right]$ in Abhängigkeit von x und σ.

und es wird daher $C(T=0) = \max(x(T) - x_s, 0)$, wie es sein muß.

Im risikolosen Fall $\sigma = 0$, ergibt sich,

$$C = \max(x_0 - x_s e^{-rT}, 0). \tag{67}$$

In der Tat, wenn der Preis eines nicht risikobehafteten Gutes jetzt x_0 beträgt, wird er (bei kontinuierlicher Verzinsung) eine Zeit T später $x_0 e^{rT}$ betragen. Eine Call–Option zum Basispreis x_s wird also $\max(x_0 e^{rT} - x_s, 0)$ einbringen. Abgezinst auf $T = 0$ ist dies gerade $\max(x_0 - x_s e^{-rT}, 0)$, also Gl. (67).

3.5 Put–Call Parität

Hat man den Preis einer Call–Option berechnet findet man den Preis einer Put–Option mit demselben Basispreis x_s und demselben Fälligkeitstermin anhand folgender Überlegung. Ein Portfolio, bestehend aus 1. einem Underlying (Long–Position), 2. einer gekauften Put–Option (Long–Position) und 3. einer verkauften Call–Option (Short–Position) hat am Fälligkeitstag genau den (risikofreien) Wert x_s. In der Tat,

$$W_N = x_N + \max(x_s - x_N, 0) - \max(x_N - x_s, 0) = x_s, \tag{68}$$

unabhängig von x_N. (Siehe Abb. 15.) Es muß also gelten

$$x_N + C_{\rm put}(t_N) + C_{\rm call}(t_N) = x_s, \tag{69}$$

oder das Underlying zue Zeit t_k gekauft und x_s entsprechend abgezinst

$$C_{\rm call}(t_k) = x_k + C_{\rm put}(t_k) - x_s e^{-r(t_N-t_k)}. \tag{70}$$

Die Abhängigkeit des Preises einer Put–Option vom aktuellen Underlyingkurs x_0, Zeit zur Fälligkeit $T = t_N - t_0$, und Zinsrate r ist in den Abbildungen 12 – 14 dargestellt. Man sieht, daß bei Put–Optionen Zins– und Volatilitätseffekt gegenläufig arbeiten. Bei Call–Optionen, dagegen, wirken beide Effekte gleichsinnig. Man überlegt sich leicht, daß die Tatsache, daß der Preis einer Put–Option unter der Geraden, die die Differenz $x_s - x$ darstellt, liegen kann, eine sofortige Einlösung der Option lohnend machen würde. Bei europäischen Optionen ist dies nicht möglich, Preise amerikanischer Put–Optionen aber dürfen aus diesem Grunde nicht unter der Differenz $x_s - x$ liegen. Bei Call–Optionen, deren Preis ja über $x - x_S$ liegt, ist eine frühzeitige Einlösung dagegen nicht sinnvoll. Eine Formelsammlung zur Bepreisung verschiedenster anderer Varianten von Optionen findet man beispielsweise in [5].

3.6 Die optimale Hedging–Strategie

3.6.1 Das Prinzip der minimalen Varianz

In Abschnitt 3.1 hatten das Prinzip der minimalen Varianz [Gl. (12)] vorgestellt um eine optimale Hedging–Strategie ϕ^* zu bestimmen,

$$\phi^* = \mathrm{argmin}_\phi < [\Delta_\rho W_N(\phi)]^2 > . \tag{71}$$

Für den Fall einer Call–Option ergibt sich,

$$\begin{aligned}(\Delta_\rho W_N)^2 &= c + \sum_{k=0}^{N-1} (1+\rho)^{2(N-k-1)} < (\phi_k)^2 (\Delta_\rho x_k)^2 > \\ &\quad -2 \sum_{k=0}^{N-1} (1+\rho)^{N-k-1} < \phi_k \, \Delta_\rho x_k \max(x_N - x_s, 0) >, \end{aligned} \tag{72}$$

wobei c kollektiv diejenigen Terme bezeichnet, die unabhängig sind von ϕ.

Für den ersten ϕ_k–abhängigen Term in Gl. (72) erhalten wir unter der Annahme unabhängiger $\Delta_\rho x_k$,

$$
\begin{aligned}
& < (\phi_k)^2 (\Delta_\rho x_k)^2 > \\
= \; & \int \left(\prod_{m=0}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) [\phi_k(x_k)]^2 \; [\Delta_\rho x_k]^2 \\
= \; & \underbrace{\left(\int \left(\prod_{m=0}^{k-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) [\phi_k(x_k)]^2 \right)}_{< \phi_k^2 >} \underbrace{\left(\int d(\Delta_\rho x_k) p(\Delta_\rho x_k) \; [\Delta_\rho x_k]^2 \right)}_{< (\Delta_\rho x_k)^2 >} \\
= \; & < (\phi_k)^2 >< (\Delta_\rho x_k)^2 >,
\end{aligned}
\tag{73}
$$

da weder ϕ_k noch $\Delta_\rho x_k$ von $\Delta_\rho x_m$ mit $m > k$ abhängen und aufgrund der Normierung von Wahrscheinlichkeiten,

$$
\int \left(\prod_{m=k}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) = \prod_{m=k}^{N-1} \int d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) = 1. \tag{74}
$$

Mit

$$
p(x_k) = \int \left(\prod_{m=0}^{k-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) \delta \left(x_k - x_0 (1+\rho)^{N-k} - \sum_{m=0}^{k-1} \Delta_\rho x_m (1+\rho)^{N-k-1} \right), \tag{75}
$$

läßt sich auch schreiben,

$$
< \phi_k^2 > = \int dx_k \, p(x_k) \, \phi_k^2. \tag{76}
$$

Für den zweiten ϕ_k–abhängigen Term in Gl. (72) ist es nützlich die Kursentwicklung von $x_0 \to x_N$ in die drei Abschnitte $x_0 \to x_k$, $x_k \to x_{k+1}$ und $x_{k+1} \to x_N$ zu zerlegen (Physiker mögen sich dabei an die Berechnung von Erwartungswerten mit Pfadintegralen erinnert fühlen),

$$
\begin{aligned}
& < \phi_k \, \Delta_\rho x_k \max(x_N - x_s, 0) > \\
= \; & < \phi_k \, \Delta_\rho x_k \, \theta(x_N - x_s)(x_N - x_s) > \\
= \; & \int \left(\prod_{m=0}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) \phi_k \, \Delta_\rho x_k \, \theta(x_N - x_s)(x_N - x_s) \\
= \; & \underbrace{\int \left(\prod_{m=0}^{k-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) \phi_k}_{\int dx_k \, p(x_k|x_0) \, \phi_k \; [\text{Gl. } (78)]}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \times \quad \underbrace{\int d(\Delta_\rho x_k)\, p(\Delta_\rho x_k)\, \Delta_\rho x_k}_{\displaystyle \int dx_{k+1}\, p(x_{k+1}|x_k)\, \Delta_\rho x_k \text{ [Gl. (78)]}} \\
& \underbrace{\times \int \left(\prod_{m=k+1}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) \theta(x_N - x_s)(x_N - x_s)}_{\displaystyle \int_{x_s}^{\infty} dx_N\, p(x_N|x_{k+1})\, (x_N - x_s) \text{ [Gl. (78)]}} \\
= & \int dx_k\, p(x_k|x_0)\, \phi_k \int dx_{k+1} p(x_{k+1}|x_k)\, \Delta_\rho x_k \int_{x_s}^{\infty} dx_N\, p(x_N|x_{k+1})(x_N - x_s) \\
= & \int dx_k\, p(x_k|x_0)\, \phi_k \int_{x_s}^{\infty} dx_N\, (x_N - x_s) \underbrace{\int dx_{k+1} p(x_{k+1}|x_k)\, \Delta_\rho x_k p(x_N|x_{k+1})}_{\displaystyle < \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N} \text{ [Gln. (79, 80)]}} \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} dx_k\, p(x_k|x_0)\, \phi_k \int_{x_s}^{\infty} dx_N\, (x_N - x_s) < \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N} . \qquad (77)
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $p(x_k|x_0) = p(x_k)$, also die Wahrscheinlichkeit für x_k zum Zeitpunkt t_k. Analog sind $p(x_{k+1}|x_k)$ sowie $p(x_N|x_{k+1})$ Spezialfälle der allgemeinen Definition,

$$
p(x_n|x_k) = \int \left(\prod_{m=k}^{n-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) \delta \left(x_n - x_k (1+\rho)^{n-k} - \sum_{m=k}^{n-1} \Delta_\rho x_m (1+\rho)^{n-m-1} \right), \qquad (78)
$$

die Wahrscheinlichkeit von x_{k+1} zur Zeit t_{k+1} nach x_N zur Zeit t_N zu gelangen. Insbesondere ist $p(x_N|x_k)$ also noch von x_k abhängig. Es gilt

$$
p(x_n|x_k) = p(x_n|x_k) = \int dx_l\, p(x_n|x_l) p(x_l|x_k). \qquad (79)
$$

Weiterhin bezeichnet

$$
< \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N} = \int dx_{k+1}\, p(x_N|x_k)\, \Delta_\rho x_k, \qquad (80)
$$

den Mittelwert von $\Delta_\rho x_k$ über alle Pfade, die von x_k nach x_N gehen, gewichtet mit $p(x_N|x_k)$. Diese Größe kann also ungleich Null sein selbst wenn $< \Delta_\rho x_k > = 0$.

3.6.2 Berechnung von $< \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N}$

Wir berechnen nun den Mittelwert $< \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N}$ aus Gl. (80)

$$
< \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int dx_{k+1}\, p(x_N|x_k)\, \Delta_\rho x_k \\
&= \int \left(\prod_{m=k}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) \delta \left(x_N - x_k (1+\rho)^{N-k} - \sum_{l=k}^{N-1} \Delta_\rho x_l (1+\rho)^{N-l-1} \right) \Delta_\rho x_k \\
&= \int \frac{dz}{2\pi} \int \left(\prod_{m=k}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) e^{-iz\left(x_N - x_k (1+\rho)^{N-k} - \sum_{l=k}^{N-1} \Delta_\rho x_l (1+\rho)^{N-l-1} \right)} \Delta_\rho x_k \\
&= \int \frac{dz}{2\pi} e^{-iz\left(x_N - x_k(1+\rho)^{N-k} \right)} \int d(\Delta_\rho x_k)\ p(\Delta_\rho x_k) \qquad \underbrace{\Delta_\rho x_k e^{iz\Delta_\rho x_k (1+\rho)^{N-k-1}}}_{\frac{-i}{(1+\rho)^{N-k-1}} \frac{\partial}{\partial z} e^{iz\Delta_\rho x_k (1+\rho)^{N-k-1}}} \\
&\qquad \times \underbrace{\left(\prod_{m=k+1}^{N-1} \int d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) e^{iz\left(\sum_{l=k}^{N-1} \Delta_\rho x_l (1+\rho)^{N-l-1} \right)} \right)}_{\xi \prod_{m=k+1}^{N-1} \tilde{p}_m(z)} \\
&= -i \int \frac{dz}{2\pi} e^{-iz\left(x_N - x_k(1+\rho)^{N-k} \right)} \left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{p}_k(z) \right) \prod_{m=k+1}^{N-1} \tilde{p}_m(z). \qquad (81)
\end{aligned}
$$

Von der zweiten zur dritten Zeile benutzten wir hierbei

$$
\int dx_{k+1}\, \delta \left(x_{k+1} - x_k - \Delta_\rho x_k + \rho x_k \right) \delta \left(x_N - x_{k+1} - \sum_{l=k+1}^{N-1} (\Delta_\rho x_l + \rho x_l) \right)
$$

$$
= \delta \left(x_N - x_k - \sum_{l=k}^{N-1} (\Delta_\rho x_l + \rho x_l) \right). \qquad (82)
$$

Weiterhin definierten wir die Funktion

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}_m(z) &= (1+\rho)^{-(N-m-1)} \hat{p}_m \left(z (1+\rho)^{N-m-1} \right) \\
&= (1+\rho)^{(-N-m-1)} \int d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) e^{iz\Delta_\rho x_m (1+\rho)^{N-m-1}} \\
&= \int dy\, \frac{p\left(y (1+\rho)^{-(N-m-1)} \right)}{(1+\rho)^{N-m-1}} e^{izy}, \qquad (83)
\end{aligned}
$$

wobei $y = \Delta_\rho x_m (1+\rho)^{N-m-1}$. Für $\rho = 0$ wird $\tilde{p}(z)$ zur (unskalierten) Fouriertransformierten $\hat{p}(z)$. Aus $\sum_{m=1}^{N} m = N(N+1)/2$ folgt $\sum_{m=k+1}^{N-1} m =$

$(N-k-1)(N+k)/2$ und daher

$$\xi = \prod_{m=k+1}^{N-1} (1+\rho)^{N-m-1} = (1+\rho)^{(N-k-1)(N-k-2)/2}. \tag{84}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir im weiteren an, daß $\rho = 0$. Für identisch verteilte $\Delta_\rho x_k = \Delta x_k$ wird $\xi = 1$, und $\prod_{m=k+1}^{N-1} \tilde{p}_m(z) = \tilde{p}_{N-1}^{N-k-1}(z)$, also

$$(-i\xi)\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{p}_k(z)\right) \prod_{m=k+1}^{N-1} \tilde{p}_m(z) = -i\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{p}(z)\right) \tilde{p}_{N-1}^{N-k-1}(z) = \frac{-i}{N-k}\frac{\partial}{\partial z}\tilde{p}_{N-1}^{N-k}(z). \tag{85}$$

Wir finden daher für $\rho = 0$

$$\begin{aligned} <\Delta x_k>_{x_k \to x_N} &= \frac{-i}{N-k}\int \frac{dz}{2\pi} e^{-iz(x_N-x_k)} \frac{\partial}{\partial z}\tilde{p}_{N-1}^{N-k}(z) \\ &= \frac{i}{N-k} \int \frac{dz}{2\pi}\tilde{p}_{N-1}^{N-k}(z) \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\, e^{-iz(x_N-x_k)}}_{\substack{-i\,(x_N-x_k) \\ \times e^{-iz(x_N-x_k)}}} \\ &= \frac{x_N-x_k}{N-k} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int dz\, \tilde{p}_{N-1}^{N-k}(z) e^{-iz(x_N-x_k)}}_{p(x_N|x_k)} \\ &= \frac{x_N-x_k}{N-k}\, p(x_N|x_k), \end{aligned} \tag{86}$$

wobei wir im ersten Schritt partiell integrierten bei verschwindenden Randtermen.

3.6.3 Lösung der Stationaritätsgleichung

Nachdem wir die ϕ–abhängigen Terme, die zur Varianz $(\Delta W_N)^2$ beitragen bestimmt haben, sind wir nun in der Lage die Stationaritätsgleichung

$$0 = \frac{\delta < (\Delta W_N)^2 >}{\delta \phi_k}, \tag{87}$$

(für $\rho = 0$) zu lösen. Aus Gl. (72) folgt direkt

$$\begin{aligned} 0 &= 2\phi_k(x_k)p(x_k) <(\Delta x_k)^2> \\ &\quad -2p(x_k)\int_{x_s}^{\infty} dx_N < \Delta x_k >_{x_k \to x_N} (x_N - x_s), \end{aligned} \tag{88}$$

und damit

$$\phi_k(x_k) = \frac{1}{<(\Delta x_k)^2>} \int_{x_s}^{\infty} dx_N < \Delta x_k >_{x_k - \to x_N} (x_N - x_s). \tag{89}$$

Setzen wir Gl. (86), so ergibt sich,

$$\phi_k(x_k) = \frac{1}{<(\Delta x_k)^2>} \int_{x_s}^{\infty} dx_N \frac{x_N - x_k}{N-k}\, p(x_N|x_k)(x_N - x_s). \tag{90}$$

Nehmen wir nun an, daß $p(x_N|x_k)$ gut durch eine Gaußverteilung in $x_N - x_k$ mit Varianz

$$<(\Delta x_k)^2> (N-k) = D\tau(N-k) \tag{91}$$

approximiert wird, so gilt

$$\frac{x_N - x_k}{D\tau(N-k)} p(x_N|x_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} p(x_N|x_k), \tag{92}$$

und damit,

$$\phi_k(x_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{x_s}^{\infty} dx_N\, (x_N - x_s) p(x_k|x_k). \tag{93}$$

Aus Vergleich mit Gl. (42) für $\rho = 0$ ergibt sich die "Delta"–Hedging Regel von Black–Scholes,

$$\phi_k(x_k) = \frac{\partial C(x, x_s, \tau(N-k))}{\partial x}\Big|_{x=x_k}. \tag{94}$$

Vergleich mit Abb. (9) zeigt, daß die Ableitung des Black–Scholes–Preises zwischen 0 und 1 schwankt. Bei Aktienkursen weit unter dem Basispreis ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Option eingelöst wird sehr gering. Es ist deshalb für den Halter der Short–Position nicht hilfreich selbst Underlyinganteile zu halten. Insbesondere wäre ein Kursverlust des Underlyings nicht durch die Short–Position einer Call–Option abgefangen. Daher ist verständlich, daß ϕ_k klein wird für kleine x. Bei hohen Kursen verhält sich eine Option immer mehr wie ein Forwardkontrakt. Solch ein Kontrakt wird durch $\phi_k = 1$ perfect gehedgt. In der Tat wird dann der Verlust aus der Short–Position exakt durch das Halten des Underlyings kompensiert. Genau am Strikepreis ist $\phi_k(x_s) = 1/2$.

Literatur

[1] M. Baxter, A. Rennie: *Financial Calculus.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] R. Beike, A. Potthoff: *Optionsscheine.* (2. Auflage) Beck–Wirtschaftsberater im dtv, Verlag Beck, München, 1998.

[3] R. Beike, J. Schlütz: *Finanznachrichten. Lesen–Vestehen–Nutzen.* (2. Auflage) Schäffer–Poeschel Verlag, Stuttgart, 1999.

[4] J.-P. Bouchaud, M. Potters: *Theory of Financial Risk.* Draft version available from `http://www.science-finance.fr`, 1999.

[5] E. G. Haug: *The Complete Guide to Option Pricing Formulas.* MacGraw–Hill, New York, 1997.

[6] J. Hull: *Options, Futures, and Other Derivative Securities.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[7] A. Irle: *Finanzmathematik.* Teubner Studienbücher Mathematik. Teubner Verlag, Stuttgart, 1998.

[8] R. Korn, E. Korn: *Optionsbewertung und Portfolio–Optimierung.* Gabler/Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1999.

[9] I. Uszczapowski: *Optionen und Futures verstehen.* Beck–Wirtschaftsberater im dtv, Verlag Beck, München, 1991.

[10] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison,: *Option Pricing: Mathematical Models and Computation.* Oxford Financial Press, Oxford, 1993.

[11] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne: *The Mathematics of Financial Derivatives.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

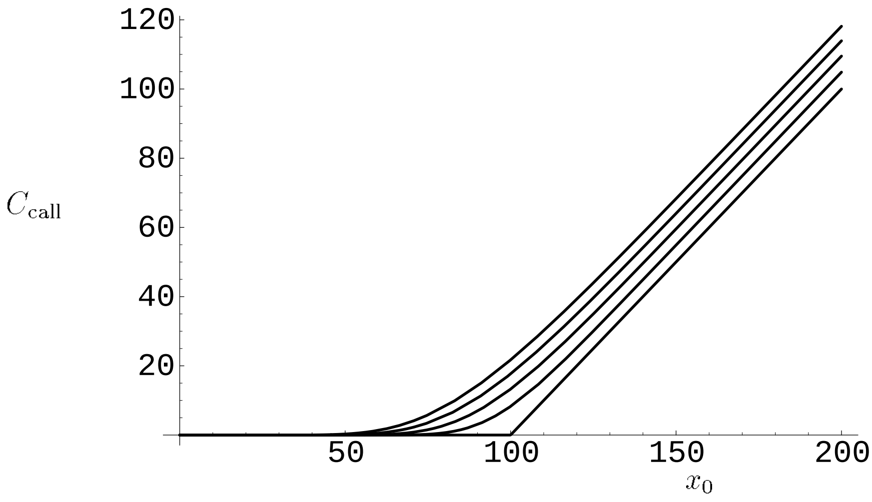

Abbildung 9: Preis einer Call–Option nach Black–Scholes bei einer Standardabweichung von $\sigma = 0.2$ (20%) pro Jahr, einem Basispreis von $x_s = 100$, und einer jährlichen risikofreien Zinsrate von $r = 0.1$ (10%). Gezeigt ist die Abhängigkeit des Preises C vom aktuellen Kurs x_0 des Underlyings für eine verschiedene Anzahl von Tage bis zum Ablauf der Option. Von links nach rechts: $T = 2$, 1.5, 1, 0.5, 0 Jahre.

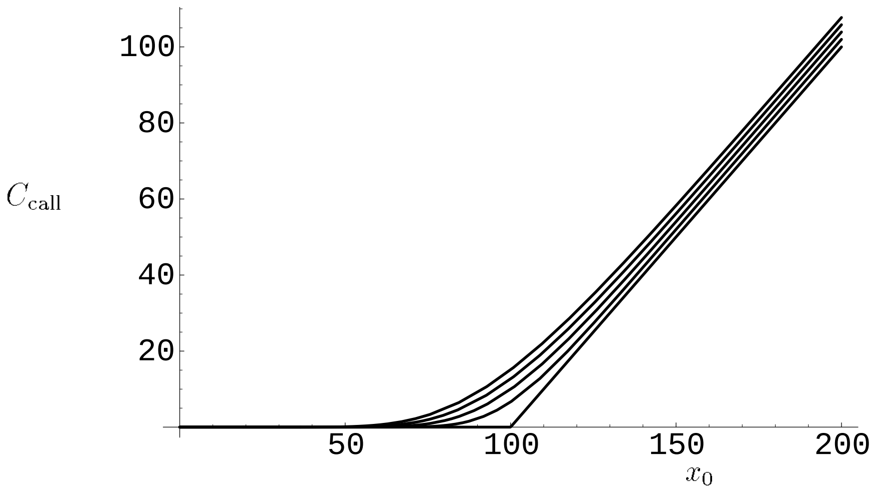

Abbildung 10: Wie Abb.9 jedoch bei einer risikofreien Zinsrate von $r = 0.04$ (4%) pro Jahr. (Ebenfalls, von links nach rechts, für $T = 2$, 1.5, 1, 0.5, 0 Jahre.)

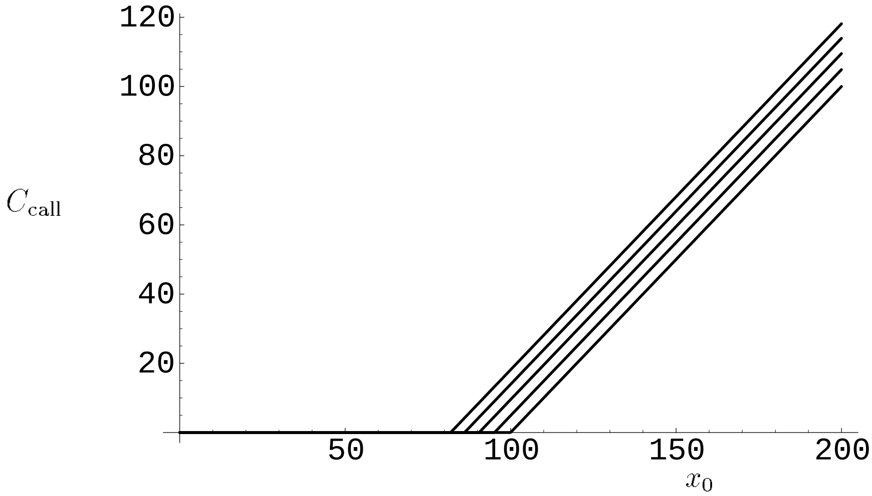

Abbildung 11: Wie Abb.9 jedoch bei einer Volatilität von $\sigma = 0.001$ (0.1%) pro Jahr. (Ebenfalls, von links nach rechts, für $T = 2, 1.5, 1, 0.5, 0$ Jahre.) Die Abbildung zeigt also den Zinseffekt am Optionspreis.

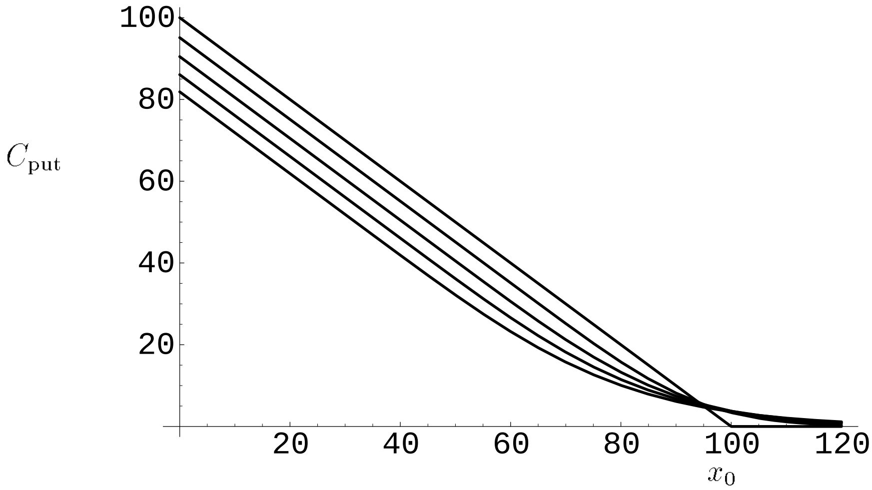

Abbildung 12: Preis einer Put–Option nach Black–Scholes bei einer Standardabweichung von $\sigma = 0.2$ (20%) pro Jahr, einem Basispreis von $x_s = 100$, und einer jährlichen risikofreien Zinsrate von $r = 0.1$ (10%). Gezeigt ist die Abhängigkeit des Preises C vom aktuellen Kurs x_0 des Underlyings für eine verschiedene Anzahl von Tage bis zum Ablauf der Option. Von links nach rechts (bezogen auf das obere Ende): $T = 2,\ 1.5,\ 1,\ 0.5,\ 0$ Jahre. Der Preis ergibt sich aus der "Put–Call Parity" [Gl. (70),Abb. 15] als $C_{\mathrm{put}} = C_{\mathrm{call}} + x_s e^{-rT} - x_0$.

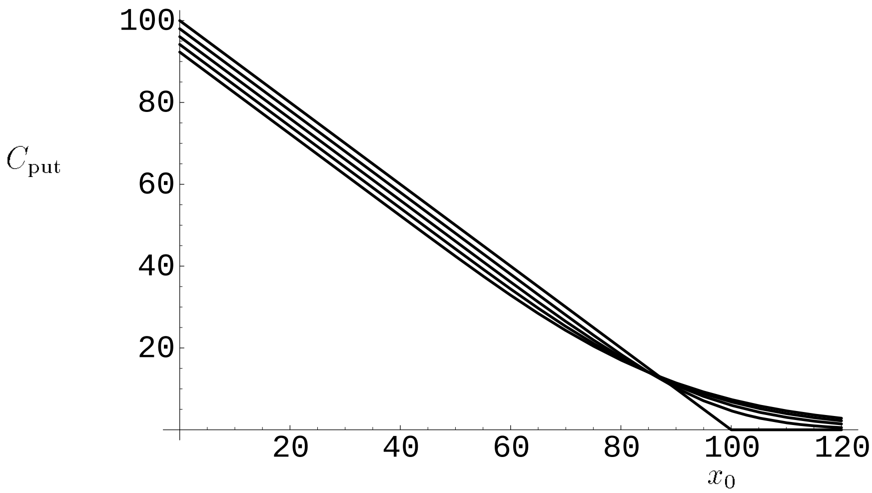

Abbildung 13: Wie Abb. 12 jedoch für eine jährliche risikofreie Zinsrate von $r = 0.04$ (4%). Von links nach rechts (bezogen auf das obere Ende): $T = 2$, 1.5, 1, 0.5, 0 Jahre.

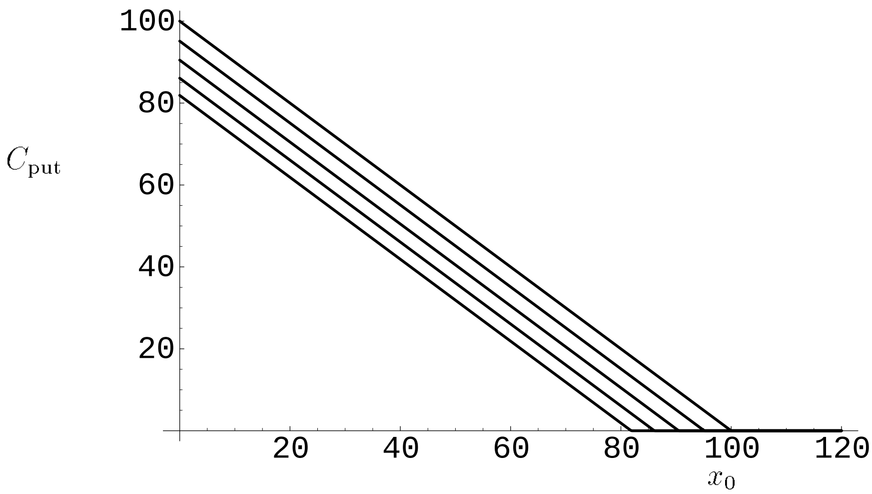

Abbildung 14: Wie Abb. 12 jedoch für eine Volatilität von $\sigma = 0.001$ (0.1%) pro Jahr. Von links nach rechts: $T = 2$, 1.5, 1, 0.5, 0 Jahre.

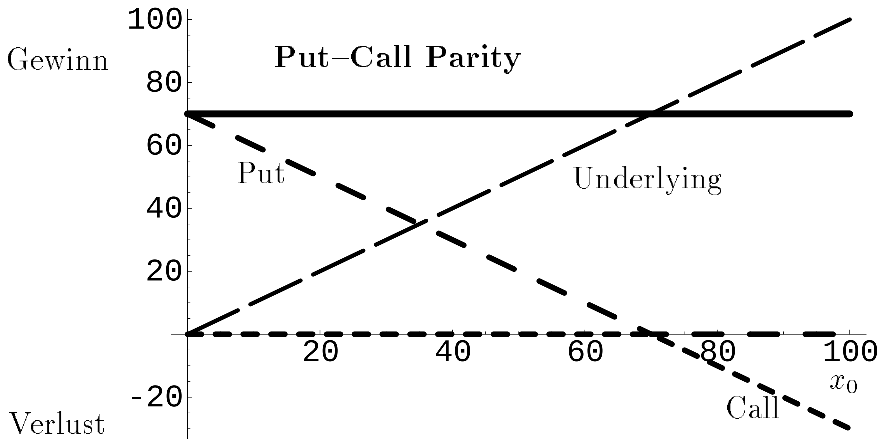

Abbildung 15: Put–Call Parity: Ein Portfolio, aus 1. einem Underlying (Long–Position), 2. einer gekauften Put–Option (Long–Position) zum Basispreis $x_s = 70$ und 3. einer verkauften Call–Option (Short–Position) ebenfalls mit $x_s = 70$ und der gleichen Fälligkeit wie Put, hat zum Fälligkeitstermin einen risikolosen Wert von x_s. Daraus Preis ergibt sich eine Beziehung zwischen den Preisen der Put– und der Call–Option $C_{\text{put}} = C_{\text{call}} + x_s e^{-rT} - x_0$. [Gl. (70)].