Übungen zur Statistischen Physik I (SS 2003)

Blatt 10

Aufgabe 38: Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung (6 Punkte)

Betrachten Sie die mikrokanonische Gesamtheit von N freien klassischen Teilchen mit Massen $m_1, m_2, \cdots, m_N$ in einem Volumen V.

a) Bestimmen Sie die Strukturfunktion $\Omega(E, N)$ dieser Gesamtheit.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(\vec{p}_1)$ für den Impuls des Teilchens Nr.1 durch die Verteilung

$$w(\vec{p}_1) = (2\pi m_1 E)^{-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}N)}{\Gamma(\frac{3}{2}(N-1))} \left(1 - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1 E}\right)^{\frac{3N-5}{2}}$$

gegeben ist, wobei $\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} \leq E$ vorausgesetzt wird.

c) Zeigen Sie, dass im Limes $N \to \infty$ die obige Verteilung in die Maxwellsche Verteilung übergeht, wobei $E = \frac{3N}{2\beta}$ mit $\beta = \text{const.}$ sei.

d) Bestimmen Sie in diesem Limes den Erwartungswert der Energie des ersten Teilchens und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 39: Gleichverteilungssatz (3 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N freien, relativistischen Teilchen.

a) Welche Aussage macht der Gleichverteilungssatz?

b) Zeigen Sie im ultrarelativistischen Grenzfall, d.h. $|\vec{p}_i| \gg mc$ für $i = 1, \cdots, N$, dass die Beziehungen $c\langle|\vec{p}_i|\rangle = 3kT$ und $U = 3NkT$ gelten.

Aufgabe 40: Das Dulong-Petitsche Gesetz (2 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N klassischen Teilchen im $\mathbb{R}^3$ mit der Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i} + \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} \cdot (\vec{q}_i - \vec{q}_j)^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \omega_i^2}{2} \vec{q}_i^{\,2} \quad .$$

Wie groß ist die innere Energie U im zugehörigen kanonischen Ensemble? Zeigen Sie, dass das Gesetz von Dulong-Petit gilt!
Hinweis: Für eine homogene Funktion f vom Grade l, d.h.

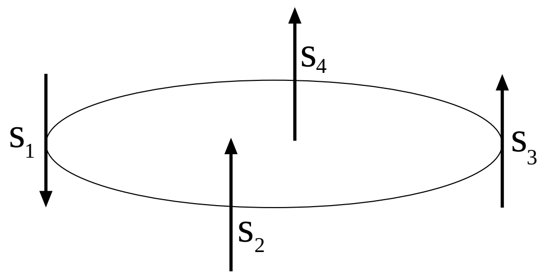
$$f(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^l f(x_1, \cdots, x_n),$$

gilt der Eulersche Satz

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_j} = l f(x_1, \cdots, x_n).$$

Aufgabe 41: Das kleine Ising-Modell (4 Punkte)

Betrachten Sie eine eindimensionale Kette von 4 „Spins“ mit jeweils zwei Einstellmöglichkeiten $s_i = \pm 1$ für $i = 1, \cdots, 4$. Ein Spin wechselwirke nur mit seinen nächsten Nachbarn und es wird eine periodische Randbedingung angenommen, d.h. in diesem Fall wechselwirkt s_4 mit s_1.



Damit hat die Hamiltonfunktion die Form

$$\mathcal{H}(s_1, \cdots, s_4) = -(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_4 + s_4 s_1).$$

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme.

b) Bestimmen Sie die mittlere Energie $U = \langle \mathcal{H}(s_1, \cdots, s_4) \rangle$ und die mittlere Magnetisierung $\bar{M} \equiv \frac{1}{4}\langle \sum_{i=1}^{4} s_i \rangle$.