Übungen zur Statistischen Physik (SS 2009)

Blatt 9

Aufgabe 1: Das ideale Gas im Schwerefeld (2 Punkte)

Ein ideales Gas im Schwerefeld der Erde werde beschrieben durch das kanonische Ensemble von nichtwechselwirkenden Massenpunkten in einem homogenen konstanten Kraftfeld. Wie groß ist die mittlere potenzielle Energie eines Teilchens?

Aufgabe 2: Isotroper Ferromagnet (5 Punkte)

In der Vorlesung wurde das Ising-Modell für einen Ferromagneten behandelt. Ein Modell eines isotropen Ferromagneten sieht ganz ähnlich aus, mit dem Unterschied, dass die Variablen nun dreikomponentige Einheitsvektoren sind. Jedem Punkt $\vec{x}$ eines dreidimensionalen kubischen Gitters wird ein Einheitsvektor $\vec{s}(\vec{x})$ zugeordnet, $|\vec{s}(\vec{x})| = 1$. Dieser repräsentiert ein elementares magnetisches Moment. Nächste Nachbarn im Gitter wechselwirken über eine ferromagnetische Kopplung, so dass die Hamiltonfunktion mit äußerem Magnetfeld $\vec{H}$

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\vec{x}} \sum_{i=1}^{3} \vec{s}(\vec{x}) \cdot \vec{s}(\vec{x} + \vec{e}_i) - \mu_0 M_0 \sum_{\vec{x}} \vec{H} \cdot \vec{s}(\vec{x})$$

lautet. Hierin bezeichnet $\vec{e}_i$ den Einheitsvektor in der i-ten Richtung, und J, μ_0, M_0 sind positive Konstanten (siehe Vorlesung). Die Anzahl der Gitterpunkte sei N und es seien periodische Randbedingungen gewählt. Das Magnetfeld sei homogen und in Richtung $\vec{e}_3$ orientiert:

$$\vec{H} = H\vec{e}_3 \,.$$

a) Wie lautet die Hamiltonfunktion in der Molekularfeld-Approximation? Nehmen Sie dabei an, dass die mittlere Magnetisierung parallel zu $\vec{H}$ orientiert ist. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie $\frac{1}{N} \ln Z$ als Funktion von β und der mittleren Magnetisierung $\bar{s}$ in der Molekularfeld-Approximation. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Selbstkonsistenzgleichung

$$\bar{s} = f\left(\frac{\beta}{3}(6J\bar{s} + \mu_0 M_0 H)\right)$$

lautet, wobei

$$f(x) = \frac{1}{\tanh(3x)} - \frac{1}{3x}$$

die Langevin-Funktion ist. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Virial-Entwicklung (10 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die kanonische Zustandssumme für ein nicht-ideales einatomiges Gas die Form

$$Z = (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}N} \frac{1}{N!\, h^{3N}}\, Q_N$$

hat, wobei

$$Q_N = \int d^{3N}q \; \mathrm{e}^{-\beta V}$$

das Konfigurationsintegral ist. Das Potenzial sei eine Summe von Paarwechselwirkungstermen:

$$V(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N) = \sum_{i<j} \mathcal{V}(r_{ij})\,, \qquad r_{ij} = |\vec{q}_i - \vec{q}_j|\,,$$

wobei die Summe $\sum\limits_{i<j}$ über alle geordneten Paare von Indices läuft. Wir definieren die Funktion f durch

$$1 + f(r_{ij}) \doteq \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{V}(r_{ij})}\,.$$

a) Drücken Sie den Boltzmann-Faktor $\mathrm{e}^{-\beta V}$ mit Hilfe der Funktion f aus. Ersetzen Sie nun die Faktoren $1 + f(r_{ij})$ durch $1 + \lambda f(r_{ij})$ mit einem reellen Parameter λ, der am Ende zu $\lambda = 1$ gesetzt werden soll. Die Virial-Entwicklung ist eine Entwicklung nach Potenzen von λ. Zeigen Sie, dass für große N

$$\frac{1}{N}\ln Q_N \approx \ln V - \lambda\frac{N}{V}B + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

gilt, mit

$$B = -2\pi\int_0^\infty r^2\, f(r)\, dr\,. \quad \text{(5 Punkte)}$$

b) Zeigen Sie mit dem Ergebnis aus (a), dass der Druck für $\lambda = 1$ durch

$$p = \frac{NkT}{V}\left(1 + \frac{N}{V}B\right)$$

gegeben ist. (2 Punkte)

c) Für das Paarpotenzial sei nun angenommen, dass es einen harten Kern besitzt:

$$\mathcal{V}(r) = \begin{cases} \infty, & 0 < r < 2r_0 \\ -u(r), & 2r_0 < r \end{cases}$$

und $u(r)$ den typischen Verlauf zeigt (siehe Vorlesung). Zeigen Sie, dass für hohe Temperaturen das Integral B durch

$$B = \frac{1}{2}v_0 - \beta A + \mathcal{O}(\beta^2)$$

approximiert werden kann, wobei

$$v_0 = \frac{4\pi}{3}(2r_0)^3\,, \qquad A = 2\pi\int_{2r_0}^\infty r^2\, u(r)\, dr\,. \quad \text{(2 Punkte)}$$

d) Stellen Sie für die in (c) auftretenden Größen v_0 und A eine Beziehung zu den Parametern a und b in der van der Waals-Gleichung

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

her. (1 Punkt)