Übungen zur Statistischen Physik (SS 2009)

Blatt 8

Aufgabe 1: Das Gesetz von Dulong und Petit (2 Punkte)

Ein idealisierter Kristall werde in der harmonischen Näherung beschrieben als ein System von N klassischen Teilchen im $\mathbb{R}^3$ mit der Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i} + \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} \cdot (\vec{q}_i - \vec{q}_j)^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \omega_i^2}{2} \vec{q}_i^{\,2} \,.$$

Wie groß ist die innere Energie U im zugehörigen kanonischen Ensemble? Zeigen Sie, dass das Gesetz von Dulong-Petit gilt!

Hinweis: Für eine homogene Funktion f vom Grade l, d.h.

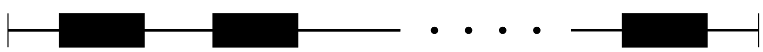
$$f(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^l f(x_1, \cdots, x_n),$$

gilt der Eulersche Satz

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_j} = l f(x_1, \cdots, x_n).$$

Aufgabe 2: Eindimensionales Hardcore-Gas (8 Punkte)

Betrachten Sie ein eindimensionales Gas aus N harten Stäben, die jeweils die Länge l und die Masse m besitzen. Die Länge des Systems sei V.



a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme des Systems. Zeigen Sie dabei mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass die Ortsintegrationen den Ausdruck $Q_N(V) = \frac{1}{N!}(V - Nl)^N$ liefern. (4 Punkte)

b) Ermitteln Sie im Fall großer N (Stirling-Formel!) die freie Energie, die innere Energie, die Entropie und die Zustandsgleichung. (4 Punkte)

Aufgabe 3: Eindimensionales Ising-Modell (11 Punkte)

Das eindimensionale Ising-Modell beschreibt eine eindimensionale Kette von „Spins“. Jeder Spin hat zwei Einstellmöglichkeiten. Dies wird modelliert durch N Variablen σ_i ($i \in \{1, \ldots, N\}$), die jeweils die Werte $+1$ und -1 annehmen können. Die Spinvariablen sind also diskret und werden als klassische Größen aufgefasst. Es wird eine periodische Randbedingung angenommen, d.h. σ_{N+1} wird mit σ_1 identifiziert. Zwischen den Spins besteht eine „Nächste-Nachbar-Wechselwirkung“. Die Hamiltonfunktion hat also die Form

$$\mathcal{H}(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) = -\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} \,.$$

a) Wie groß ist der Zustandsraum des Systems? (1 Punkt)

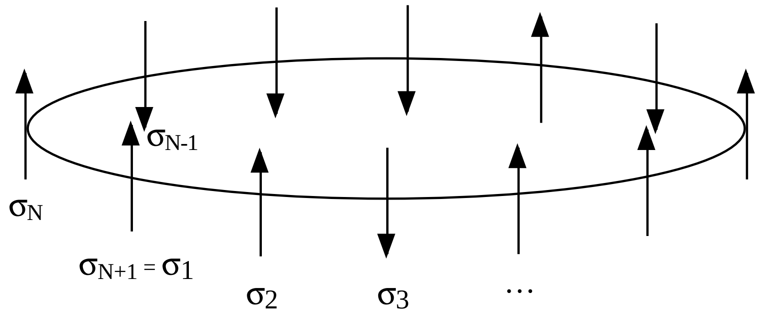


Abbildung 1: Eindimensionales Ising-Modell mit periodischen Randbedingungen

b) Welches sind die beiden niedrigsten Energiewerte und wie groß ist ihr Entartungsgrad $d(E, N)$? Welche Werte kann die Energie E bei festem N annehmen? (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie durch Verallgemeinerung dieser Überlegung die Entartungsgrade $d(E, N)$ für alle Werte von E! (1 Punkt)

d) Berechnen Sie für gerades N die kanonische Zustandssumme

$$Z(\beta, N) = \sum_E d(E, N) \mathrm{e}^{-\beta E} \quad ! \quad \text{(2 Punkte)}$$

e) Bestimmen Sie daraus die Größe $\frac{1}{N} \ln(Z)$ für große Werte von N! Welche physikalische Bedeutung hat diese Größe? (1 Punkt)

f) Bestimmen Sie die mittlere Energie $U = \langle \mathcal{H}(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \rangle$ und die mittlere Magnetisierung $\bar{M} \equiv \frac{1}{N} \langle \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \rangle$! (2 Punkte)

g) Berechnen Sie die Entropie für große Werte von N ! (1 Punkt)