Übungen zur Statistischen Physik (SS 2009)

Blatt 10

Aufgabe 1: Statistischer Operator dreier Oszillatoren (6 Punkte)

Gegeben sei ein System von drei nichtwechselwirkenden, eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren derselben Kreisfrequenz ω.

a) Die drei Oszillatoren seien zunächst als unterscheidbar zu betrachten. Am Gesamtsystem werde der scharfe Energiewert $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ gemessen. Geben Sie den dieser Präparation entsprechenden statistischen Operator ρ in der Dirac-Notation und seine statistische Entropie $S[\rho]$ an.

b) Die drei Oszillatoren seien nun nicht mehr unterscheidbar, sondern identische Bosonen. Wie lautet der Zustand ρ bei der Präparation von **a)** und welches ist die Entropie?
Hinweis: Bei identischen Bosonen sind nur Zustände möglich, die gegen Vertauschung der Oszillatoren bzw. ihrer Quantenzahlen vollständig symmetrisch sind. Überlegen Sie, dass im Unterraum der Zustände mit Gesamtenergie $\frac{7}{2}\hbar\omega$, die bei **a)** vorkommen, nur zwei solche vollständig symmetrischen Zustände existieren.

Aufgabe 2: Zustandssummen (9 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N unterscheidbaren Teilchen, bei dem die Energie jedes Teilchens entweder 0 oder E ($E > 0$) beträgt. Eine Konfiguration ist gegeben durch Quantenzahlen $n_1, \ldots, n_N$. Die Energie des j'ten Teilchens beträgt 0 für $n_j = 0$ und E für $n_j = 1$. Die Hamilton–Funktion ist gegeben durch

$$H_N(\mathbf{n}) = E(n_1 + \ldots + n_N).$$

Zeigen Sie, dass für dieses System

a) die mikrokanonische Zustandssumme

$$\Omega(U, N) = \sum_{n_1=0}^{1} \ldots \sum_{n_N=0}^{1} \delta_{U, H_N(n)} = \binom{N}{k}, \quad \text{wobei} \quad U = kE,$$

b) die kanonische Zustandssumme

$$Z(T, N) = \sum_{n_1=0}^{1} \ldots \sum_{n_N=0}^{1} \mathrm{e}^{-\beta H_N(n)} = \left(1 + \mathrm{e}^{-\beta E}\right)^N,$$

c) und die großkanonische Zustandssumme

$$\Xi(T, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{n_1=0}^{1} \ldots \sum_{n_N=0}^{1} \mathrm{e}^{-\beta H_N(n)} = \left[1 - z\left(1 + \mathrm{e}^{-\beta E}\right)\right]^{-1},$$

mit $z = \mathrm{e}^{\beta\mu}$, lautet.
Hinweis: Der Term mit $N = 0$ ist einfach 1.

Aufgabe 3: Zustandssumme des harmonischen Oszillators (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme für einen einzelnen quantenmechanischen Oszillator der Kreisfrequenz ω durch $Z(\beta) = \left(2 \sinh \frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)^{-1}$ gegeben ist. Berechnen Sie die innere Energie U.