Übungen zur Quantentheorie (WS 2008/2009)

Blatt 8

Aufgabe 1: Zweifach besetzter Oszillator (6 Punkte)

Zwei nicht miteinander wechselwirkende, spinlose Teilchen bewegen sich in einem Oszillator–Potenzial $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ in einer Dimension.

a) Wie lautet der Grundzustand des Gesamtsystems, wenn es sich

- um Fermionen handelt oder
- die Teilchen Bosonen sind?

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ für den Zustand der Energie $E = 2\hbar\omega$ in den beiden Fällen. Interpretieren Sie das Ergebnis. (4 Punkte)

Aufgabe 2: Variationsrechung (6 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Ritz'schen Variationsverfahrens eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms mit dem Hamilton-Operator H. Verwenden Sie $\psi(\vec{r}, \lambda) = N\mathrm{e}^{-\lambda r}$ als Testfunktion.

a) Berechnen Sie die Normierungskonstante N von $\psi(\vec{r}, \lambda)$. (1 Punkt)

b) Ermitteln Sie

$$E(\lambda) = \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}. \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Hinweis: Es gilt

$$\int_0^\infty dx\, x^n\, \mathrm{e}^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für} \quad a > 0 \quad \text{und} \quad n \in \mathbf{N}.$$

c) Für welchen Wert von λ wird $E(\lambda)$ minimal? Bestimmen Sie die minimale Energie. (2 Punkte)
Hinweis:

$$\tilde{R}_H = \frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\varepsilon_0)^2}.$$

d) Begründen Sie das Ergebnis. (1 Punkt)

Aufgabe 3: Eichtransformationen (6 Punkte)

Die Eichtransformationen des Vektorpotenzials und des skalaren Potenzials sind durch

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t) \quad \text{und} \quad \Phi'(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{r},t)$$

gegeben. Die Wellenfunktion transformiert sich gemäß

$$\psi'(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\Lambda(\vec{r},t)}\psi(\vec{r},t).$$

Dabei ist $\Lambda(\vec{r},t)$ die sogenannte Eichfunktion und genügend häufig differenzierbar.

a) Zeigen Sie, dass für $\psi'(\vec{r},t)$ die Schrödingergleichung mit dem eichtransformierten Hamiltonoperator H' gilt. (2 Punkte)

b) Wie transformieren sich die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{r},t)$ und der Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}m}\left(\psi^*(\vec{r},t)\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t) - \left(\vec{\nabla}\psi^*(\vec{r},t)\right)\psi(\vec{r},t)\right) - \frac{e}{m}\vec{A}(\vec{r},t)\,\psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)?$$

Behält die Kontinuitätsgleichung im transformierten System ihre Gültigkeit? (4 Punkte)

Aufgabe 4: Teilchen im EM–Feld (8 Punkte)

Die Bewegung eines (spinlosen) Elektrons sei derart eingeschränkt, dass es sich auf einem Kreis mit Radius R in der xy–Ebene, symmetrisch um die z–Achse bewegt; d.h. es handelt sich um ein eindimensionales Problem. Durch den Ursprung und in z–Richtung gebe es einen konstanten magnetischen Fluss Φ.

a) Finden Sie das zugehörige Vektorpotenzial $\vec{A}$, und zwar in der Eichung, in der $|\vec{A}|$ auf dem Kreis konstant ist. (2 Punkte)

b) Stellen Sie für dieses System die Schrödingergleichung in Zylinderkoordinaten auf. (2 Punkte)

c) Finden Sie die Eigenzustände und die zugehörigen Energien des Elektrons. Gehen Sie dafür davon aus, dass die Wellenfunktion und ihre Ableitung periodisch in der Winkelvariablen φ sind. (4 Punkte)