

Übungen zur Quantentheorie (WS 2008/2009)

Blatt 5

Aufgabe 1: Clebsch-Gordan-Koeffizienten (12 Punkte)

a) Zeigen Sie für zwei Drehimpulse $\vec{J}^{(1)}$ und $\vec{J}^{(2)}$:

$$(\vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)})^2 = (\vec{J}^{(1)})^2 + (\vec{J}^{(2)})^2 + 2\vec{J}_3^{(1)}\vec{J}_3^{(2)} + J_+^{(1)}J_-^{(2)} + J_-^{(1)}J_+^{(2)}.$$

Die Notation J_+ und J_- steht für die jeweiligen Auf- und Absteigeoperatoren.

b) Ein Elektron mit Spin $\frac{1}{2}$ habe den Bahndrehimpuls $l = 1$. Ermitteln Sie die möglichen Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses und berechnen Sie die zugehörigen Clebsch-Gordan-Koeffizienten, indem Sie das Quadrat des Gesamtdrehimpulses \vec{J}^2 auf die in Frage kommende Linearkombination von Zuständen anwenden.

Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus a) und verwenden Sie die „Condon-Shortley-Konvention“

$$\begin{aligned} J_+|j, m\rangle &= \hbar(j(j+1) - m(m+1))^{1/2}|j, m+1\rangle, \\ J_-|j, m\rangle &= \hbar(j(j+1) - m(m-1))^{1/2}|j, m-1\rangle. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Parität der Kugelflächenfunktionen (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ die Beziehung

$$\Pi Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

gilt, wobei Π der Paritätsoperator ist.

Aufgabe 3: Stark-Effekt (8 Punkte)

Ein Wasserstoffatom befindet sich in einem statischen elektrischen Feld E , das entlang der z -Achse ausgerichtet ist. Das führt zu einem Term

$$H_E = -\lambda E z$$

im Hamilton-Operator. Man beachte dabei, dass für elektrische Felder, wie sie typischerweise in Labors erzeugt werden, $H_E \ll H_0$ erfüllt ist, wobei H_0 der Hamilton-Operator des freien Wasserstoffatoms sei. Diese Störung des Systems hebt die Degeneriertheit mancher Zustände des Wasserstoffs auf; dies ist als „Stark-Effekt“ bekannt.

a) Argumentieren Sie, warum die Matrixelemente von H_E nur zwischen Zuständen mit entgegengesetzten Paritäten nicht verschwinden.

b) Berechnen Sie den Stark-Effekt für ein Wasserstoffatom im Zustand $n = 2$ mit Hilfe der Störungstheorie für entartete Zustände. Wählen Sie dazu zwei Zustände so, dass der Effekt nicht verschwindet.