Übungen zur Quantentheorie (WS 2008/2009)

Blatt 4

Aufgabe 1: Kronig–Penney–Modell (8 Punkte)

Ein Teilchen bewegt sich im eindimensionalen Potenzial

$$V(x) = D \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta(x - na), \qquad D > 0.$$

Die Wellenfunktion $\varphi(x)$ sei Lösung der stationären Schrödingergleichung. $\varphi(x)$ ist überall stetig.

a) Zeigen Sie, dass die Ableitung $\varphi'(x)$ an den Stellen $x = na$ einen Sprung macht:

$$\lim_{\epsilon \to 0} [\varphi'(na + \epsilon) - \varphi'(na - \epsilon)] = \frac{2m}{\hbar^2} D \, \varphi(na).$$

Hinweis: Integrieren Sie die Schrödingergleichung im Intervall $[na - \epsilon, na + \epsilon]$.

b) Nach dem Bloch'schen Theorem ist $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} u(x)$ mit $-\pi \leq ka < \pi$ und einer periodischen Funktion $u(x) = u(x + a)$. Zeigen Sie, dass die Ableitung $u'(x)$ an den Stellen $x = na$ einen Sprung macht, und geben Sie dessen Größe an.

c) Im Bereich $0 < x < a$ wird die Schrödingergleichung durch den Ansatz

$$u(x) = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\kappa - k)x} + \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\kappa + k)x}$$

gelöst (siehe Vorlesung). Leiten Sie aus der Stetigkeit von u und der Sprungbedingung an u' zwei Gleichungen für α und β her.

d) Zeigen Sie, dass die Lösbarkeitsbedingung für die Gleichungen aus **c)**

$$\cos(ka) = \cos(\kappa a) + \frac{mD}{\hbar^2 \kappa} \sin(\kappa a)$$

lautet.

e) Zusatzaufgabe für 4 Extrapunkte:
Berechnen Sie ein paar der ersten Lösungen $\kappa_n(k)$, $n = 0, 1, \ldots$, für $-\pi \leq ka < \pi$ numerisch und plotten Sie die entsprechenden Energien $E_n(k) = \frac{\hbar^2}{2m} \kappa_n(k)^2$ als Funktion von k. Wählen Sie dafür $\frac{mDa}{\hbar^2} = 4$.

Aufgabe 2: Periodisches Potenzial (4 Punkte)

Gegeben sei das eindimensionale Potenzial

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{1}{1 + A \cos \frac{x}{a}}.$$

Finden Sie eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung von der Form

$$\varphi(x) = 1 + \beta \cos \frac{x}{a}$$

und bestimmen Sie die Energie.

Aufgabe 3: Drehung eines Spin–$\frac{1}{2}$–Systems (6 Punkte)

Betrachten Sie die Eigenvektoren $|\vec{n}_+\rangle$ und $|\vec{n}_-\rangle$ von $S_{\vec{n}} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$, der Spinkomponente in $\vec{n}$–Richtung, wobei $\vec{n}$ der Einheitsvektor

$$\vec{n} = \vec{e}_x \sin\theta\cos\phi + \vec{e}_y \sin\theta\sin\phi + \vec{e}_z\cos\theta$$

bezüglich der Basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sei. Weiterhin seien $|+\rangle$ und $|-\rangle$ die Eigenvektoren zu S_z. Die Eigenwerte seien jeweils $\pm\frac{\hbar}{2}$.

a) Zeigen Sie, dass bis auf eine Phase folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
|\vec{n}_+\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|-\rangle, \\
|\vec{n}_-\rangle &= -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}|+\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle.
\end{aligned}$$

b) Finden Sie den Rotationsoperator U_R mit

$$U_R|+\rangle = |\vec{n}_+\rangle, \qquad U_R|-\rangle = |\vec{n}_-\rangle.$$

c) Beweisen Sie, dass für die Pauli–Matrizen $\vec{\sigma}$, einen beliebigen Winkel θ und einen ebenfalls beliebigen Einheitsvektor $\vec{n}$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{1} - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta}{2}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})}$$

gilt.