# Übungen zur Quantentheorie (WS 2008/2009)

# Blatt 3

## Aufgabe 1: Operatorfunktionen (10 Punkte)

**a)** $f(Q)$ sei eine analytische Funktion des Ortsoperators $Q$ in einer Dimension. Berechnen Sie die Kommutatoren $[Q, f(Q)]$ und $[P, f(Q)]$, indem Sie

- die Definitionen der Operatoren im Ortsraum verwenden,
- $f(Q)$ in eine Potenzreihe entwickeln und den Kommutator $[P, Q^n]$ bestimmen.

**b)** Reproduzieren Sie, dass der Kommutator $[P, f(Q)]$ für $f(Q) = Q$ die Born-Jordansche Vertauschungsrelation liefert.

**c)** Zeigen Sie algebraisch unter Verwendung des Kommutators $[P, Q]$, dass die Relation

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a}{\hbar}P}\, Q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{a}{\hbar}P} = Q + a\mathbb{1}$$

gilt.

**d)** Sei $H = \dfrac{P^2}{2m} + V(Q)$. Zeigen Sie

$$[H, Q] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{P}{m}.$$

**e)** Benutzen Sie das Ergebnis aus d) um $\langle p \rangle$ in einem stationären Zustand zu berechnen.

## Aufgabe 2: Energiedarstellung des harmonischen Oszillators (6 Punkte)

Sei $|n\rangle$ mit $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Familie normierter Eigenvektoren des Hamiltonoperators des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Sei $\hat{A}$ die einem Operator $A$ zugeordnete unendliche Matrix mit Einträgen $\hat{A}_{m,n} = \langle m|A|n\rangle$.

**a)** Berechnen Sie $\hat{P}$ und $\hat{Q}$. Schreiben Sie die linke obere Ecke dieser Matrix bis zur 5. Zeile bzw. Spalte explizit auf. *Hinweis:* Benutzen Sie die Leiteroperatoren $a$ und $a^+$.

**b)** Bestimmen Sie die Matrixprodukte $\hat{P}^2$, $\hat{Q}^2$, $\hat{P}\hat{Q}$ und $\hat{Q}\hat{P}$.

**c)** Ermitteln Sie $\frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{Q}^2$ und $\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P}$ und kommentieren Sie die Ergebnisse.

## Aufgabe 3: Operatortransformationen unter Drehungen (8 Punkte)

**a)** Berechnen Sie die Kommutatoren $[L_i, X_j]$ und $[L_i, P_j]$ der Komponenten des Drehimpulsoperators mit denen des Ortsoperators $\vec{X}$ und des Impulsoperators $\vec{P}$.

**b)** Das Transformationsgesetz der Wellenfunktion unter Drehungen ist $\psi'(\vec{x}\,') = \psi(R(-\vec{\alpha})\vec{x}\,') = U(\vec{\alpha})\psi(\vec{x}\,')$, wobei $U(\vec{\alpha}) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{\alpha}\cdot\vec{L}\right)$ Drehoperator genannt wird. Das Transformationsgesetz eines Operators $A$ unter Drehungen ist $A' = U(\vec{\alpha})AU(-\vec{\alpha})$, so dass $\langle\psi'|A'|\psi'\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$ invariant bleibt. Zeigen Sie für infinitesimale Drehungen, dass $U(\vec{\alpha})X_l U(-\vec{\alpha}) = \sum_{k=1}^{3} R(-\vec{\alpha})_{l,k} X_k$ und $U(\vec{\alpha})P_l U(-\vec{\alpha}) = \sum_{k=1}^{3} R(-\vec{\alpha})_{l,k} P_k$ gilt.
Unter Drehungen transformieren sich Orts- und Impulsoperator somit wie Vektoren.