Übungen zur Quantentheorie (WS 2013/14)

Prof. Dr. G. Münster

Übungsblatt 6 **Abgabe: 03.12.2013**

Aufgabe 17: Energiedarstellung des harmonischen Oszillators (6 Punkte)

Sei $|n\rangle$ mit $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Familie normierter Eigenvektoren des Hamiltonoperators des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Sei $\hat{A}$ die einem Operator A zugeordnete unendliche Matrix mit Einträgen $\hat{A}_{m,n} = \langle m|A|n\rangle$.

a) Berechnen Sie $\hat{P}$ und $\hat{Q}$. Schreiben Sie die linke obere Ecke dieser Matrix bis zur 5. Zeile bzw. Spalte explizit auf.
Hinweis: Benutzen Sie die Leiteroperatoren a und a^+.

b) Bestimmen Sie die Matrixprodukte $\hat{P}^2$, $\hat{Q}^2$, $\hat{P}\hat{Q}$ und $\hat{Q}\hat{P}$.

c) Ermitteln Sie $\frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{Q}^2$ und $\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P}$ und kommentieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 18: Parität der Kugelflächenfunktionen (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ die Beziehung

$$\Pi Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

gilt, wobei Π der Paritätsoperator ist.

Aufgabe 19: Spin-Resonanz (7 Punkte)

Ein freies Elektron ist zwei Magnetfeldern ausgesetzt, einem konstanten homogenen Magnetfeld $\vec{B}_0$ in z-Richtung und einem Feld $\vec{B}_1$ mit $\vec{B}_1 = B_1(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ habe das Elektron seinen Spin in $+z$-Richtung und das Feld $\vec{B}_1$ werde dann erst eingeschaltet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P eines Umklappen des Spins in $-z$-Richtung als Funktion von der Zeit t.
Vernachlässigen Sie die Ortsfreiheitsgrade, so dass nur der Spinanteil im Hamiltonoperator berücksichtigt wird. Dieser ist durch $H = \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ gegeben (μ_B ist das Bohr'sche Magneton). Untersuchen Sie auch den Resonanzfall.
Hinweis: Stellen Sie die Pauli-Gleichung für die Spinwellenfunktion $|\chi(t)\rangle = a(t)\,|\uparrow\rangle + b(t)\,|\downarrow\rangle$ auf und verwenden Sie die Abkürzungen $\omega_0 = eB_0/m = \mu_B B_0/\hbar$ und $\omega_1 = eB_1/m = \mu_B B_1/\hbar$. Lösen Sie auftretende Differentialgleichungen mit dem Ansatz $a(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_a t}$, $b(t) = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_b t}$.