Übungen zur Quantentheorie (WS 2013/14)

Prof. Dr. G. Münster

Übungsblatt 4 **Abgabe: 19.11.2013**

Aufgabe 11: Operatortransformationen unter Drehungen (4 Punkte)

Das Transformationsgesetz der Wellenfunktion unter Drehungen ist $\psi'(\vec{x}\,') = \psi(R(-\vec{\alpha})\vec{x}\,') = U(\vec{\alpha})\psi(\vec{x}\,')$, wobei $U(\vec{\alpha}) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{\alpha}\cdot\vec{L}\right)$ Drehoperator genannt wird. Das Transformationsgesetz eines Operators A unter Drehungen ist $A' = U(\vec{\alpha})AU(-\vec{\alpha})$, so dass $\langle\psi'|A'|\psi'\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$ invariant bleibt. Zeigen Sie für infinitesimale Drehungen, dass $U(\vec{\alpha})X_l U(-\vec{\alpha}) = \sum_{k=1}^{3} R(-\vec{\alpha})_{l,k}X_k$ und $U(\vec{\alpha})P_l U(-\vec{\alpha}) = \sum_{k=1}^{3} R(-\vec{\alpha})_{l,k}P_k$ gilt.

Unter Drehungen transformieren sich Orts- und Impulsoperator somit wie Vektoren.

Aufgabe 12: Kronig-Penney-Modell (8+4 Punkte)

Ein Teilchen bewegt sich im eindimensionalen Potenzial

$$V(x) = D\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta(x-na), \qquad D>0.$$

Die Wellenfunktion $\varphi(x)$ sei Lösung der stationären Schrödingergleichung. $\varphi(x)$ ist überall stetig.

a) Welchen Sprung macht die Ableitung $\varphi'(x)$ an den Stellen $x = na$?

b) Nach dem Bloch'schen Theorem ist $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}u(x)$ mit $-\pi \le ka < \pi$ und einer periodischen Funktion $u(x) = u(x+a)$. Zeigen Sie, dass die Ableitung $u'(x)$ an den Stellen $x = na$ einen Sprung macht, und geben Sie dessen Größe an.

c) Im Bereich $0 < x < a$ wird die Schrödingergleichung durch den Ansatz

$$u(x) = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\kappa-k)x} + \beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\kappa+k)x}$$

gelöst (siehe Vorlesung). Leiten Sie aus der Stetigkeit von u und der Sprungbedingung an u' zwei Gleichungen für α und β her.

d) Zeigen Sie, dass die Lösbarkeitsbedingung für die Gleichungen aus c)

$$\cos(ka) = \cos(\kappa a) + \frac{mD}{\hbar^2\kappa}\sin(\kappa a)$$

lautet.

e) Zusatzaufgabe für 4 Extrapunkte:
Berechnen Sie ein paar der ersten Lösungen $\kappa_n(k)$, $\quad n = 0,1,\ldots,$ für $-\pi \le ka < \pi$ numerisch und plotten Sie die entsprechenden Energien $E_n(k) = \frac{\hbar^2}{2m}\kappa_n(k)^2$ als Funktion von k. Wählen Sie dafür $\frac{mDa}{\hbar^2} = 4$.

Aufgabe 13: Pauli-Matrizen (3 Punkte)

Beweisen Sie die Identität

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \mathrm{i}\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\,.$$

wobei $\vec{A}$ und $\vec{B}$ Vektor-Operatoren sind, die mit den σ_j kommutieren, nicht aber zwangsläufig miteinander kommutieren.