Übungen zur Quantentheorie (WS 2013/14)

Prof. Dr. G. Münster

Übungsblatt 3 **Abgabe: 12.11.2013**

Aufgabe 8: Unitäre Operatoren (9 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass der Operator $U = \exp(\mathrm{i}A)$ unitär ist, wenn A hermitsch ist. Drücken Sie den Inversionsoperator I in obiger Form aus, wobei I durch $I\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$ definiert ist.

b) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier unitärer Operatoren $U_1 U_2$ wieder unitär ist.

c) Gegeben sei der unitäre Operator U. Kann der Operator $U' = c\,U$ mit $c \in \mathbb{C}$ ebenfalls unitär sein? Falls ja, welche Bedingungen gelten für c?

d) Die quadratischen Matrizen A und A' haben denselben Rang und seien durch die unitäre Transformation $A' = U A U^\dagger$ miteinander verknüpft. Zeigen Sie, dass die Spuren und Determinanten von A und A' gleich sind.

e) Zeigen Sie, dass der hermitsche und der anti-hermitesche Teil eines unitären Operators U miteinander kommutieren. Was sind die Eigenschaften der Eigenwerte von U?

f) Betrachten Sie einen unitären Operator, für den $U^2 = U$ gilt.
Finden Sie die explizite Form von U.

g) Kann ein unitärer Operator U gleichzeitig hermitesch sein? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 9: Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (5 Punkte)

a) Beweisen Sie den Spezialfall der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}\,,$$

falls $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.
Hinweis: Betrachten Sie dazu $C(s) = \mathrm{e}^{As}\mathrm{e}^{Bs}$ und $\frac{\mathrm{d}C(s)}{\mathrm{d}s}$.

b) Der Translationsoperator $T(\vec{a})$ ist gegeben durch $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{P}}$.
Zeigen Sie, dass $T(\vec{a}_1)\,T(\vec{a}_2) = T(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$ gilt.

Aufgabe 10: Operatortransformationen (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Translationsoperator $T(a)$, den Ortsoperator Q und den Impulsoperator P folgende Beziehungen gelten:

a) $T(a)\,Q\,T^\dagger(a) = Q - a\mathbb{1}\,,$

b) $T(a)\,P\,T^\dagger(a) = P\,.$