

Aufgabe 4: Operatoridentität (3 Punkte)

Zeigen Sie die Operatoridentität

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, B]^{(n)},$$

wobei $[A, B]^{(n)}$ rekursiv durch $[A, B]^{(0)} = B$ und $[A, B]^{(n+1)} = [A, [A, B]^{(n)}]$ definiert ist.

Aufgabe 5: Vollständigkeit (2 Punkte)

Führen Sie vor, dass die „Eigenfunktionen“ $\chi_q(x)$ des Ortsoperators Q ein vollständiges Funktionensystem bilden und bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten der Entwicklung einer Funktion $f(x)$ nach den $\chi_q(x)$.

Aufgabe 6: Matrixwertige Funktion (6 Punkte)

Gegeben sei die selbstadjungierte Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die matrixwertige Funktion $T(\alpha) = e^{i\alpha A}$

- a) mithilfe der Matrix-Exponentialreihe,
- b) mithilfe der Spektraldarstellung.

Aufgabe 7: Projektionsoperator II (4 Punkte)

In einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei durch $T = |u\rangle\langle u|$ ($|u\rangle \neq 0$ vorgegebener Vektor) ein linearer Operator definiert.

- a) Ist T selbstadjungiert?
- b) Welche Eigenschaft muss $|u\rangle$ besitzen, damit T ein Projektionsoperator ist?
- c) Es sei B ein beliebiger linearer Operator. Zeigen Sie, dass die Spur des Operators TB durch $\langle u|B|u\rangle$ gegeben ist.