Übungen zur Quantentheorie (WS 2013/14)

Prof. Dr. G. Münster

Übungsblatt 10 **Abgabe: 14.01.2014**

Aufgabe 29: Eichtransformationen (6 Punkte)

Die Eichtransformationen des Vektorpotenzials und des skalaren Potenzials sind durch

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \nabla\Lambda(\vec{r},t) \quad \text{und} \quad \Phi'(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{r},t)$$

gegeben. Die Wellenfunktion transformiert sich gemäß

$$\psi'(\vec{r},t) = \exp\left\{\mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\Lambda(\vec{r},t)\right\}\psi(\vec{r},t).$$

Dabei ist $\Lambda(\vec{r},t)$ die sogenannte Eichfunktion und genügend häufig differenzierbar.

a) Zeigen Sie, dass für $\psi'(\vec{r},t)$ die Schrödingergleichung mit dem eichtransformierten Hamiltonoperator H' gilt.

b) Wie transformieren sich die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{r},t)$ und der Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}m}\left(\psi^*(\vec{r},t)\nabla\psi(\vec{r},t) - (\nabla\psi^*(\vec{r},t))\,\psi(\vec{r},t)\right) - \frac{e}{m}\vec{A}(\vec{r},t)\,\psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)?$$

Behält die Kontinuitätsgleichung im transformierten System ihre Gültigkeit?

Aufgabe 30: Teilchen im EM–Feld (7 Punkte)

Die Bewegung eines (spinlosen) Elektrons sei derart eingeschränkt, dass es sich auf einem Kreis mit Radius R in der xy–Ebene, symmetrisch um die z–Achse bewegt; d.h. es handelt sich um ein eindimensionales Problem. Durch den Ursprung und in z–Richtung gebe es einen konstanten magnetischen Fluss Φ.

a) Finden Sie das zugehörige Vektorpotenzial $\vec{A}$ in Zylinderkoordinaten, und zwar in der Eichung, in der $|\vec{A}|$ auf dem Kreis konstant ist.

b) Stellen Sie für dieses System die Schrödingergleichung in Zylinderkoordinaten auf.

c) Finden Sie die Eigenzustände und die zugehörigen Energien des Elektrons. Gehen Sie dafür davon aus, dass die Wellenfunktion und ihre Ableitung periodisch in der Winkelvariablen φ sind.

Aufgabe 31: Geschwindigkeitsoperator (4 Punkte)

Der Geschwindigkeitsoperator ist durch $\vec{V} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(H\vec{Q} - \vec{Q}H)$ definiert. Berechnen Sie $\vec{V}$, falls ein Magnetfeld vorhanden ist.

Zeigen Sie, dass die folgenden Kommutatorregeln gelten:

$$\begin{aligned}
V_xV_y - V_yV_x &= \frac{\mathrm{i}e\hbar}{m^2}B_z \\
V_yV_z - V_zV_y &= \frac{\mathrm{i}e\hbar}{m^2}B_x \\
V_zV_x - V_xV_z &= \frac{\mathrm{i}e\hbar}{m^2}B_y\,.
\end{aligned}$$