Übungen zur Quantentheorie (WS 2013/14)

Prof. Dr. G. Münster

Übungsblatt 1 **Abgabe: 29.10.2013**

Aufgabe 1: Matrizen (5 Punkte)

Zu einer gegebenen Basis $\{|n\rangle\}, n = 1, 2, \ldots N$ seien zwei Operatoren A und B durch ihre Matrizen (A_{nm}) und (B_{nm}) definiert, der ket-Vektor $|\psi\rangle$ durch c_n und der bra-Vektor $\langle\phi|$ durch b_n^*.

a) Berechnen Sie die Matrixdarstellung des Operators AB.

b) Finden Sie die Darstellung des ket-Vektors $A|\psi\rangle$.

c) Berechnen Sie den Skalar $\langle\phi| A |\psi\rangle$ aus den gegebenen Darstellungen.

d) Die Basis $\{|n\rangle\}$ sei eine Basis aus Eigenvektoren für den Operator K mit Eigenwerten a_n:

$$K|n\rangle = a_n |n\rangle \, .$$

Zeigen Sie, dass K als

$$K = \sum_{n=1}^{N} a_n |n\rangle \langle n|$$

geschrieben werden kann.
Hinweis: Ein Operator ist durch seine Wirkung auf jeden beliebigen Vektor charakterisiert. Zeigen Sie obige Darstellung daher durch Anwendung auf einen unbestimmten Vektor $|\alpha\rangle$.

Aufgabe 2: Projektoren (7 Punkte)

In einem 3-dimensionalen, komplexen Vektorraum seien bezüglich einer Basis $|e_i\rangle$, $i = 1 \ldots 3$ folgende Matrizen gegeben:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass P_1 und P_2 Projektoren sind.

b) Zeigen Sie, dass P_1 und P_2 auf zueinander orthogonale Unterräume projizieren, und dass der Bildraum von P_1 gleich dem Kern von P_2 ist.

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Vektorraums, in der P_1 und P_2 Diagonalgestalt haben. Geben Sie P_1 und P_2 in dieser Basis an.

Aufgabe 3: Projektionsoperator (3 Punkte)

Ein Zustand ψ besitzt die Parität ± 1, wenn $\psi(-\vec{r}) = \pm\psi(\vec{r})$. Finden Sie den Projektionsoperator $P_\pm$, der auf Zustände mit einer eindeutigen Parität, projeziert. Drücken Sie diesen Operator durch den Inversionsoperator I aus, wobei $I\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$.