

Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2008)

Blatt 8

Aufgabe 28: Auswahlregeln und Übergangswahrscheinlichkeit (3 Punkte)

- a) Ermitteln Sie unter Berücksichtigung der Feinstruktur, des Lamb-Shifts und der Dipol-Auswahlregeln die Struktur der Lyman- α -Linie ($n = 2 \rightarrow n = 1$) im Wasserstoffatom. Ignorieren Sie die Hyperfeinstruktur.
- b) Der Zustand $2s_{1/2}$ ist metastabil. Er könnte doch spontan in den Zustand $2p_{1/2}$ zerfallen. Warum beobachtet man das nicht? Ist eine Auswahlregel verletzt?

Aufgabe 29: Teilchen im unendlich hohen Potenzialtopf (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befindet sich im unendlich hohen Potenzialtopf zwischen $x = 0$ und $x = L$. Sein Zustand ist gegeben durch

$$\varphi(x) = N \left(\frac{L}{2} - \left| x - \frac{L}{2} \right| \right), \quad 0 \leq x \leq L.$$

- a) Skizzieren Sie $\varphi(x)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n , bei einer Energiemessung den Wert E_n zu finden?
- b) Zeigen Sie mit Hilfe von $\sum_n p_n = 1$, dass gilt:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}.$$

Aufgabe 30: Optimierungsproblem (2 Punkte)

Für einen Zustand des harmonischen Oszillators mit verschwindenden Erwartungswerten $\langle P \rangle = \langle Q \rangle = 0$ ist der Erwartungswert der Energie

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{m\omega^2}{2}(\Delta x)^2.$$

Finden Sie das Minimum dieses Ausdrucks unter der Bedingung $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ und kommentieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 31: Leiter-Matrizen (2 Punkte)

- a) Die Spur einer endlichen quadratischen Matrix A ist definiert als Summe ihrer Diagonalelemente: $\text{Sp}(A) = \sum_k A_{kk}$. Zeigen Sie, dass

$$\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA).$$

- b) Eine Matrix A und ihre Adjungierte A^\dagger erfüllen die Vertauschungsregel der Leiteroperatoren:

$$[A, A^\dagger] = \mathbf{1}.$$

Zeigen Sie, dass A keine endliche Matrix sein kann.