

# Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2008)

## Blatt 7

### Aufgabe 24: Drehimpulskonfigurationen in Zweielektronensystemen (3 Punkte)

Beschreiben Sie ein Zweielektronensystem mit einem  $2p$ - und einem  $3d$ -Elektron in  $LS$ - und  $jj$ -Kopplung. Zeigen Sie, dass die möglichen Werte für den Gesamtdrehimpuls und die Zahl der insgesamt möglichen Zustände in beiden Fällen gleich ist. Welcher Zustand ist in  $LS$ -Kopplung am stärksten gebunden?

### Aufgabe 25: Impuls im Kasten (2 Punkte)

Die Wellenfunktion eines Teilchens im unendlichen hohen Potenzialtopf zwischen  $x = 0$  und  $x = L$  erfüllt die Randbedingungen  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ . Der Impulsoperator  $P$  wirke auf einem Raum von stetigen und differenzierbaren Funktionen, welche diese Randbedingungen erfüllen. Zeigen Sie folgendes:

- a)  $P$  ist hermitesch,
- b)  $P$  ist nicht selbstadjungiert.

### Aufgabe 26: Diagonalisierung eines Hamilton-Operators (4 Punkte)

Betrachten Sie ein physikalisches System mit einem dreidimensionalen Zustandsraum. Eine Orthonormalbasis des Zustandsraumes sei gewählt. In dieser Basis wird der Hamiltonoperator durch folgende Matrix dargestellt:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Welches sind die möglichen Ergebnisse einer Messung der Energie des Systems?
- b) Finden sie eine Orthonormalbasis aus Energie-Eigenzuständen.

### Aufgabe 27: Operatoridentitäten (4 Punkte)

- a) Beweisen Sie die Operatoridentitäten

$$[B, A] = -[A, B], \quad [A + B, C] = [A, C] + [B, C], \quad [AB, C] = [A, C]B + A[B, C].$$

- b) Zeigen Sie, dass für Operatoren  $A$ ,  $B$  und  $C$  die Jacobi-Identität

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

erfüllt ist.

- c) Sei  $A$  ein linearer Operator und  $A^\dagger$  sein Adjungiertes, beide definiert auf ganz  $\mathcal{H}$ . Zeigen Sie:

- i) der Operator  $A^\dagger A$  ist selbstadjungiert,
- ii) der Operator  $A^\dagger A$  ist positiv-semidefinit, d.h. er besitzt nur nichtnegative Erwartungswerte.