Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2008)

Blatt 6

Aufgabe 19: „Schalenaufbau" der Atome (3 Punkte)

a) Geben Sie die Elektronenkonfiguration des Eisenatoms an. (1 Punkt)

b) Die Bindungsenergien der Zustände $4p$, $4d$ und $4f$ im Lithiumatom sind praktisch gleich der Bindungsenergie des Zustands mit $n = 4$ im Wasserstoffatom. Wie lässt sich das erklären? Die Bindungsenergie des Li-Zustands $4s$ ist hingegen deutlich abgesenkt (das bedeutet festere Bindung!). Erklären Sie auch diese Beobachtung. (2 Punkte)

Aufgabe 20: Pöschl-Teller-Potenzial (7 Punkte)

a) Skizzieren Sie das Potenzial

$$V(x) = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{m}\frac{1}{\cosh^2(\alpha x)}\,, \qquad \alpha > 0\,. \quad \text{(1 Punkt)}$$

b) Zeigen Sie, dass dieses Potenzial den gebundenen Zustand

$$\psi_0(x) = \frac{N_0}{\cosh(\alpha x)}$$

besitzt, und bestimmen Sie seine Energie und die Normierung. (2 Punkte)

c) Finden Sie zu jeder Energie $E > 0$ eine Streulösung durch den Ansatz

$$\psi_k(x) = N_k(a_1 + a_2\tanh(\alpha x))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,,$$

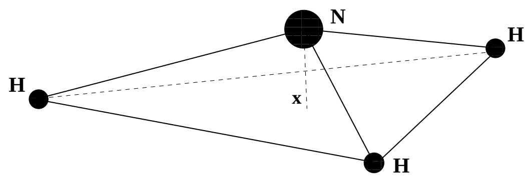
wobei $E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$. Wie verhält sich $\psi_k(x)$ asymptotisch für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$? (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie aus dem asymptotischen Verhalten der Streulösung die Transmissionsamplitude $S(k)$ und den Transmissionskoeffizient $T(k)$. (1 Punkt)

e) $S(k)$ besitzt einen Pol in der oberen Halbebene. Finden Sie die dazugehörige Energie und vergleichen Sie mit der Energie des gebundenen Zustandes. (1 Punkt)

Aufgabe 21: Ammoniak-Molekül (5 Punkte)

Das Ammoniak-Molekül NH_3 hat die Form einer Pyramide, wobei die H-Atome an den Ecken der Basis sitzen. Der Abstand des N-Atoms von der Mitte der Basis beträgt $a = 3{,}8 \cdot 10^{-11}$m.



Betrachtet man die H-Atome als starres Dreieck, und das N-Atom in einem variablen Abstand x von der Mitte des Dreiecks, so kann die potentielle Energie approximativ durch

$$V(x) = \lambda(x^2 - a^2)^2$$

beschrieben werden.

a) Experimentell ist $V(0) = 4,12 \cdot 10^{-20}\,\text{J}$ bekannt. Bestimmen Sie den Parameter λ und die Frequenz ν für kleine Schwingungen um die Ruhelage und vergleichen Sie sie mit dem experimentellen Wert $\nu = 2,85 \cdot 10^{13}\,\text{s}^{-1}$. Für die Masse ist die reduzierte Masse

$$m = \frac{3m_\text{H}m_\text{N}}{3m_\text{H} + m_\text{N}}$$

zu verwenden. (2 Punkte)

b) Das N-Atom kann durch die Basis-Ebene hindurch tunneln. Berechnen Sie den Exponenten B im Gamow-Faktor $T(0) = \exp(-2B)$ für $E = 0$. Wiederum ist die reduzierte Masse zu verwenden. (2 Punkte)

c) Die beiden niedrigsten Energie-Eigenwerte liegen nahe beieinander und sind durch eine Lücke ΔE getrennt. Ein quantenmechanisches Näherungsverfahren liefert

$$\Delta E \;\approx\; 8\,\hbar\,a\,\sqrt{\frac{3B\lambda}{m\pi}}\;\mathrm{e}^{-B}.$$

Berechnen Sie hiermit ΔE. Die Energie-Lücke findet Anwendung im Ammoniak-Maser, wo die zugehörige „Inversionsfrequenz“ $\nu_I = \Delta E/h$ angeregt wird. Vergleichen Sie ihren theoretischen Wert mit dem experimentellen $\nu_I = 2,38 \cdot 10^{10}\,\text{s}^{-1}$. (1 Punkt)

Aufgabe 22: Funktionenräume (3 Punkte)

Betrachten Sie die Menge von stetigen und differenzierbaren komplexen Funktionen $\psi(x)$ einer reellen Variablen x. Unter welchen der folgenden Bedingungen bilden die Funktionen einen Vektorraum? Wo dies nicht der Fall ist, begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\int |\psi(x)|^2 dx = 1\,,$

b) $\psi(0) = 0\,,$

c) $\psi(0) = 1\,,$

d) $\psi(x) > 0$ für alle x,

e) $\psi(b) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\psi(a)\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,,$ wobei die Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ definiert ist,

f) $\psi(x) = -\psi(-x)\,.$

Aufgabe 23: Operator-Adjungierte (4 Punkte)

Finden Sie die adjungierten Operatoren $A_i^\dagger$ zu den nachfolgend definierten Operatoren A_i, wobei das übliche Skalarprodukt auf $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ vorausgesetzt wird:

a) $A_1\,\psi(x) = \left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi(x)$, (1 Punkt)

b) $A_2\,\psi(x) = \alpha\,\psi(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}$, (1 Punkt)

c) $A_3\,\psi(x) = \psi(x + a), \quad a \in \mathbb{R}$, (1 Punkt)

d) $A_4\,\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - y)\,\psi(y)\,dy$. (1 Punkt)