Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2008)

Blatt 2

Aufgabe 5: Quantenphänomene an Atomstrahlen (3 Punkte)

Ein Silberatomstrahl, der aus einem 1500 K heißen Ofen kommt, legt zwischen der letzten Blende, die eine kreisförmige Öffnung besitzt, und der Photoplatte eine Strecke von 1 m zurück. Wie groß muss die Blendenöffnung sein, damit das Abbild des Atomstrahls so klein wie möglich wird? Masse der Silberatome: $1{,}8 \cdot 10^{-22}$ g. (Annahme: Alle Atome haben dieselbe thermische Geschwindigkeit. Hinweis: hinter der Öffnung „weitet“ sich der Atomstrahl auf. Warum?)

Aufgabe 6: Dreieckiges Wellenpaket (4 Punkte)

Zur Zeit $t = 0$ wird ein Teilchen durch die Wellenfunktion

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \dfrac{Ax}{a}\,, & \text{für } 0 \le x \le a \\ \dfrac{A(b-x)}{(b-a)}\,, & \text{für } a \le x \le b \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

dargestellt, wobei A, a und b Konstanten sind.

a) Normieren Sie $\psi(x,0)$, d.h. finden Sie A als Funktion von a und b.

b) Skizzieren Sie $\psi(x,0)$ als Funktion von x.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen links von a zu finden?

d) Berechnen Sie den Erwartungswert von x.

Aufgabe 7: Wellenpakete und Breiten (12 Punkte)

Das Wellenpaket $\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \varphi(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}$ ist gegeben durch

i) $\varphi(k) = \begin{cases} A_1\,, & \text{für } k_0 - \alpha \le k \le k_0 + \alpha \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$

ii) $\varphi(k) = \dfrac{A_2}{k^2 + \alpha^2}$

iii) $\varphi(k) = \begin{cases} A_3(\alpha - |k|)\,, & \text{für } |k| \le \alpha \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$

a) Berechnen Sie jeweils $\psi(x)$.

b) Bestimmen Sie die Konstanten A_i aus der Normierungsbedingung im Orts- oder Impulsraum.

c) Definieren Sie in den Fällen (i) und (ii) geeignete Maße Δk und Δx für die Breite im k- und x-Raum (zum Beispiel die Halbwertsbreite, die Breite bei 1/e-tel des Maximalwertes, ...) und berechnen Sie jeweils $\Delta x \cdot \Delta k$.

d) Berechnen Sie für den Fall (iii): $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle k\rangle$, $\langle k^2\rangle$, $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$, $\Delta k = \sqrt{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2}$ und $\Delta x \cdot \Delta k$.

Hinweis: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\,.$