Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2008)

Blatt 13

Übungsklausur (ohne Wertung)

Der Umfang entspricht **UNGEFÄHR** der Hälfte der vierstündigen Klausur (ohne Gewähr).

Aufgabe 1: Atom- und Molekülphysik

a) Bleiatome mit der Elektronenkonfiguration $\ldots 6p^2\ {}^3P_0$ (Spin-Triplett $S = 1$) werden durch einen Stern-Gerlach-Magneten geschickt. Ist eine Aufspaltung des Atomstrahls zu erwarten? Wenn ja, in wieviele Teilstrahlen? Ignorieren Sie den Kernspin (die meisten Pb-Isotope haben Kernspin 0).

b) Welche mittlere Wellenlänge hat die Lyman-β-Linie ($n = 3 \to n = 1$) im Wasserstoffatom? Welche Dipolauswahlregeln für atomare Übergänge kennen Sie?

c) Welche Frequenz ist nötig, um in einem Magnetfeld von $B = 1,4\,\mathrm{T}$ Protonenspin-Übergänge zwischen der parallelen und der antiparallelen Ausrichtung zu induzieren? Ignorieren Sie Kopplungen des Protonenspins an andere Drehimpulse.

d) Der Gleichgewichtsabstand des Moleküls $H^{35}Cl$ beträgt 1,27 Å. Ermitteln Sie das Trägheitsmoment des Moleküls und den Frequenzabstand zweier Rotationsabsorptionslinien. Die Frequenz der Grundschwingung des $H^{35}Cl$-Moleküls beträgt etwa $8,7 \cdot 10^{13}$ Hz. Berechnen Sie die Kraftkonstante der H-Cl-Bindung.

Zahlenwerte und Begriffe, die Sie nicht unbedingt parat haben:

Wellenzahl: ν/c = Frequenz/Vakuumlichtgeschwindigkeit
Planck'sches Wirkungsquantum: etwa $h = 6,63 \cdot 10^{34}$ Js
Bindungsenergie des $1s$-Elektrons im H-Atom: etwa 13,6 eV
1 eV entspricht einer Strahlungsfrequenz von etwa $\nu = 2,4 \cdot 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}$
g-Faktor des Protons: etwa $g_\mathrm{P} = 5,59$
Bohr'sches Magneton: etwa $\mu_\mathrm{B} = 9,27 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J/T} = 5,79 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV/T}$
Kernmagneton: etwa $\mu_\mathrm{K} = 5,05 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{J/T} = 3,15 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{eV/T}$
atomare Masseneinheit: amu etwa $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg

Aufgabe 2: Grundlagen

a) Formulieren Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung.

b) Was sind stationäre Zustände und wie lautet ihre Zeitabhängigkeit?

c) Wie sind die Unschärfen Δx und Δp für ein quantenmechanisches Teilchen definiert?

d) Wie lautet das Matrixelement $(\psi, A\phi)$ mit Wellenfunktionen geschrieben?

e) Geben Sie das Energiespektrum der folgenden eindimensionalen Systeme an, und skizzieren Sie diese:

- **i)** freies Teilchen
- **ii)** Teilchen im unendlich hohen Potenzialtopf der Breite a

iii) Teilchen im harmonischen Potenzial $V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2$.

f) Sei ψ ein normierter stationärer Zustand im physikalischen Hilbertraum und sei $\{\varphi_n\}$ ein diskretes vollständiges Orthonormalsystem.

i) Wie lautet die Entwicklung von ψ nach den Zuständen $\{\varphi_n\}$?

ii) Welche physikalische Bedeutung haben die Entwicklungskoeffizienten?

iii) Wie lässt sich die Normierung von ψ durch die Entwicklungskoeffizienten ausdrücken?

Aufgabe 3: Potentialstufe

Betrachten Sie die eindimensionale Potentialstufe

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0\,, \\ V_0 > 0, & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

a) Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung?

b) Welche Bedingungen werden an die Wellenfunktion bei $x = 0$ gestellt? (Keine Herleitung erforderlich.)

c) Betrachten Sie den Fall $E > V_0$. Für welche Werte von A, B und C liefert der Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,, & x < 0 \\ C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}, & x > 0 \end{cases}$$

eine Lösung der Schrödingergleichung?

d) Welche physikalische Situation beschreibt diese Wellenfunktion?

e) Wie lautet $\psi(x,t)$, wenn $\psi(x,0)$ durch die Wellenfunktion in (**c**) gegeben ist?

Aufgabe 4: Drehimpuls

Ein dreidimensionales System befinde sich in dem Zustand mit der Wellenfunktion

$$\psi(\vec{r}\,) = N(\kappa) \cdot (x + y + z) \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\kappa}\right).$$

a) Berechnen Sie die Normierungskonstante $N(\kappa)$.

b) Drücken Sie die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}\,)$ als Linearkombination der Kugelflächenfunktionen

$$Y_{1,1}(\vartheta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$
$$Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$$
$$Y_{1,-1}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$$

aus.

Formelsammlung:

Gauß'sches Integral: $\displaystyle\int dx\;\mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$