Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2008)

Blatt 10

Aufgabe 36: Stoßverbreiterung (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine emittierte Spektrallinie bei reiner Stoßdämpfung LORENTZ-Form hat. Nehmen Sie dabei als Modell an, dass das Atom zunächst „semiklassisch“ ungestört strahlt und durch Stöße mit anderen Teichen (Atom, Ion, Wand, ...) den Strahlungsvorgang abrupt abbricht. Die Stöße erfolgen statistisch, d.h. die Wahrscheinlichkeit $P(\tau)d\tau$ dafür, einen einzigen Stoß im Zeitintervall $[\tau,\, \tau + d\tau]$ zu finden, ist durch die Verteilung

$$P(\tau) = \gamma \mathrm{e}^{-\gamma\tau}$$

gegeben. Hierbei ist γ die Stoßrate, bzw. $1/\gamma$ die mittlere Stoßzeit. Hinweis: Berechnen Sie zunächst die FOURIER-Transformierte eines nach der Zeit τ abgehackten Wellenzuges und wichten Sie das Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\tau)$.

Aufgabe 37: Kommutatoren mit dem Drehimpuls (4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Kommutatoren mit Hilfe der Born-Jordan'schen Vertauschungsrelationen:

$$[L_j, Q_k]\,,\ [L_j, P_k]\,,\ [L_j, \vec{Q}^2]\,,\ [L_j, \vec{P}^2]\,.$$

Aufgabe 38: Drehimpuls 1 (6 Punkte)

Die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} mit $l = 1$ spannen einen dreidimensionalen Vektorraum auf.

a) Finden Sie die Matrix-Darstellung der Operatoren L_1, L_2, L_3 und $\vec{L}^2$ in dieser Basis.

b) Finden Sie die Eigenfunktionen zu L_1 für $l = 1$. Schreiben Sie diese explizit als Funktion der Winkel ϑ und φ auf.

Aufgabe 39: Symmetrischer Kreisel (3 Punkte)

Ein symmetrischer Kreisel mit den Trägheitsmomenten $I_x = I_y$ und I_z lässt sich durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2I_x}\,(L_x^2 + L_y^2) + \frac{1}{2I_z}\,L_z^2$$

beschreiben.

a) Berechnen Sie die Energie-Eigenwerte und die Eigenzustände des Hamiltonoperators.

b) Wie groß ist der Erwartungswert des Operators $L_x + L_y + L_z$ in einem Energie-Eigenzustand des Systems?

c) Der Kreisel befinde sich im Zustand $l = 3$ und $m = 0$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die Messung von L_z zu einem Zeitpunkt t den Wert $\hbar$?