

Aufgabe 33: Operatorfunktionen (7 Punkte)

a) $f(Q)$ sei eine analytische Funktion des Ortsoperators Q in einer Dimension. Berechnen Sie die Kommutatoren $[Q, f(Q)]$ und $[P, f(Q)]$, indem Sie

- die Definitionen der Operatoren im Ortsraum verwenden,
- $f(Q)$ in eine Potenzreihe entwickeln und den Kommutator $[P, Q^n]$ bestimmen.

b) Reproduzieren Sie, dass der Kommutator $[P, f(Q)]$ für $f(Q) = Q$ die Born-Jordansche Vertauschungsrelation liefert.

c) Sei $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$. Zeigen Sie

$$[H, Q] = \frac{\hbar}{i} \frac{P}{m}.$$

d) Benutzen Sie das Ergebnis aus d) um $\langle p \rangle$ in einem stationären Zustand zu berechnen.

Aufgabe 34: Dreidimensionaler harmonischer Oszillator (4 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators mit der Masse m und der Kreisfrequenz ω habe die Form

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2)$$

a) Zeigen Sie, dass die Energie der Eigenzustände durch $E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega$ ($n \in \mathbb{N}_0$) gegeben ist, indem Sie H als Summe dreier ähnlicher Hamiltonoperatoren H_x, H_y, H_z für eindimensionale Oszillatoren schreiben.

b) Geben Sie den Grad der Entartung für die Zustände mit den drei niedrigsten Energien an und zeigen Sie, dass dieser allgemein für Zustände der Energie E_n durch $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ gegeben ist.

Aufgabe 35: Harmonische Erwartungswerte (5 Punkte)

Bestimmen Sie folgende Erwartungswerte für den harmonischen Oszillator:

a) $\langle n | Q^4 | n \rangle,$

b) $\langle 0 | Q^n | 0 \rangle.$

Hinweis: Berechnen Sie $\langle 0 | e^{tQ} | 0 \rangle$ durch Integration im Ortsraum und entwickeln Sie die Reihe.

Aufgabe 36: Hyperfeinstrukturaufspaltung (3 Punkte)

Berechnen Sie die Hyperfeinstrukturaufspaltung in magnetischer Dipolnäherung im Grundzustand des Deuteriumatoms. Vergleichen Sie die Lage der Niveaus mit dem 1s Niveau ohne Hyperfeinstruktur. In wie viele m_F Komponenten können die Zustände aufspalten?

Hinweis: $I = 1$, $g_I = 0,8574$