Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2013)

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

Übungsblatt 6 **Abgabe: 06.06.2013, Besprechung: 11.06.2013**

Aufgabe 26: Eigenschaften des Hamiltonoperators (8 Punkte)

Untersuchen Sie die Eigenschaften des Differenzialoperators H_0, mit $H_0\,\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x)$, auf dem Raum der zweimal differenzierbaren Funktionen φ mit Träger im Intervall $[-a, a]$, die den Randbedingungen $\varphi(-a) = \varphi(a)$ und $\varphi'(-a) = \varphi'(a)$ genügen.

a) Zeigen Sie, dass H_0 hermitesch bzgl. des Skalarprodukts $(\varphi, \psi) = \int\limits_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, \varphi(x)^* \psi(x)$ ist.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von H_0. Zeigen Sie Orthonormalität und Vollständigkeit.

c) Warum kann man H_0 nicht als den Hamiltonoperator eines Teilchens interpretieren, das im Kasten $-a \leq x \leq a$ eingesperrt ist? Für welchen anderen Behälter wäre H_0 ein akzeptabler Hamiltonoperator? *Hinweis:* Betrachten Sie die Stromdichte j.

Aufgabe 27: Lineare Operatoren (6 Punkte)

Folgende Operatoren seien gegeben ($-\infty < x < \infty$):

(1) $\hat{T}_a$: $\hat{T}_a\,\psi(x) \coloneqq \psi(x + a)$, (Translationsoperator)

(2) $\hat{P}$: $\hat{P}\,\psi(x) \coloneqq \psi(-x)$, (Paritätsoperator)

(3) $\hat{M}_c$: $\hat{M}_c\,\psi(x) \coloneqq \sqrt{c}\,\psi(x)$ $(c > 0)$, (Skalierungsoperator)

(4) $\hat{K}$: $\hat{K}\,\psi(x) \coloneqq \psi^*(x)$. (Operator der komplexen Konjugation)

a) Welche der obigen Operatoren sind linear?

Finden Sie für (1)-(3)

b) die zu den obigen Operatoren hermitesch konjugierten Operatoren und

c) die inversen Operatoren.

Aufgabe 28: Normen und Skalarprodukte (3 Punkte)

a) Beweisen Sie die Schwarz'sche Ungleichung

$$|(\phi, \psi)| \leq \|\phi\| \cdot \|\psi\|\,.$$

Hinweis: Zerlegen Sie ψ in Komponenten parallel und senkrecht zu ϕ.

b) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$\big|\|\psi\| - \|\phi\|\big| \leq \|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie die 2. Ungleichung zuerst.