Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2013)

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

Übungsblatt 5 **Abgabe: 29.05.2013 (Mi!), Besprechung: 04.06.2013**

Aufgabe 21: Pöschl-Teller-Potenzial (7 Punkte)

a) Skizzieren Sie das Potenzial

$$V(x) = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{m}\frac{1}{\cosh^2(\alpha x)}\,, \qquad \alpha > 0\,.$$

b) Zeigen Sie, dass dieses Potenzial den gebundenen Zustand

$$\varphi_0(x) = \frac{N_0}{\cosh(\alpha x)}$$

besitzt, und bestimmen Sie seine Energie und die Normierung.

c) Finden Sie zu jeder Energie $E > 0$ eine Streulösung durch den Ansatz

$$\varphi_k(x) = N_k(a_1 + a_2\tanh(\alpha x))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,,$$

wobei $E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$. Wie verhält sich $\varphi_k(x)$ asymptotisch für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$?

d) Bestimmen Sie aus dem asymptotischen Verhalten der Streulösung die Transmissionsamplitude $S(k)$ und den Transmissionskoeffizient $T(k)$.

e) $S(k)$ besitzt einen Pol in der oberen Halbebene. Finden Sie die dazugehörige Energie und vergleichen Sie mit der Energie des gebundenen Zustandes.

Aufgabe 22: δ-Barriere (7 Punkte)

Eine (freie) Teilchenwelle $\varphi_0(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x}$ laufe von $x = -\infty$ kommend gegen das eindimensionale Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\hbar^2 v_0}{2m}\,\delta(x + x_0), & \text{für } x \le 0;\ x_0 > 0 \\ +\infty, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Formulieren Sie passende Lösungsansätze der Wellenfunktion $\varphi(x)$ für die drei Bereiche $x < -x_0$, $-x_0 \le 0 \le 0$ und $x > 0$ (Teilchenenergie $E > 0$, $k_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$).

b) Wie lauten die Anschlussbedingungen bei $x = 0, -x_0$? Legen Sie damit $\varphi(x)$ fest!

c) Bestimmen und diskutieren Sie für den Bereich $x < -x_0$ den Reflexionskoeffizienten.

d) Untersuchen Sie, für welche Werte des Wellenvektors k_0 die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Teilchens im Bereich $-x_0 \le 0 \le 0$ von v_0 und x_0 unabhängig wird.

Aufgabe 23: Ionenradien (3 Punkte)

Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle r_{nl}\rangle = \int \psi^* r\,\psi\;\mathrm{d}^3r$ für den Abstand des Elektrons im Wasserstoffatom und in wasserstoffähnlichen Ionen.

a) Vergleichen Sie diesen Wert für das 1s Elektron von H und U^{91+}.

b) Vergleichen Sie für H-Atome die Werte von $n = 1$ und von $n = l + 1 = 100$.

Aufgabe 24: Funktionenräume (3 Punkte)

Betrachten Sie die Menge von stetigen und differenzierbaren komplexen Funktionen $\psi(x)$ einer reellen Variablen x. Unter welchen der folgenden Bedingungen bilden die Funktionen einen Vektorraum? Wo dies nicht der Fall ist, begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\int |\psi(x)|^2 dx = 1\,,$

b) $\psi(0) = 0\,,$

c) $\psi(0) = 1\,,$

d) $\psi(x) > 0$ für alle x,

e) $\psi(b) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\psi(a)\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,,$ wobei die Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ definiert ist,

f) $\psi(x) = -\psi(-x)\,.$

Die folgende Aufgabe ist als schriftliche Bonusaufgabe gedacht. Für Abgaben werden die Bonuspunkte angerechnet, nicht aber zusätzlich für ein Vorrechnen.

Aufgabe 25: 1D δ-Potential (Orthonormalität und Vollständigkeit) (6 Bonuspunkte)

Betrachten Sie $V(x) = -a\delta(x)$.

a) Normieren Sie die Wellenfunktionen $u_0(x)$ (zu $E < 0$) und $u_k^\sigma(x)$ (mit $\sigma = \pm$ und $k > 0$ zu $E > 0$) aus Aufgabe 19 so, dass $(u_0, u_0) = 1, (u_0, u_k^\sigma) = 0$ und $(u_k^\sigma, u_{k'}^{\sigma'}) = \delta_{\sigma,\sigma'}\delta(k-k')$ (Orthonormalität).
Hinweis: Betrachten Sie $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ als Limes von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz-\epsilon|x|}$.

b) Zeigen Sie, dass $u_0(x)^* u_0(x') + \sum\limits_{\sigma=\pm} \int\limits_0^\infty dk\, u_k^\sigma(x)^*\, u_k^\sigma(x') = \delta(x-x')$ (Vollständigkeit).
Hinweis: Benutzen Sie den Residuensatz zur Berechnung von $\int\limits_0^\infty dk\, u_k^+(x)^* u_k^+(x')$.

Hier die benötigten Funktionen, falls Sie Aufgabe 19 nicht gelöst haben:

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= N_0 \mathrm{e}^{-\kappa|x|} \\
u_k^-(x) &= N_k^- \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right) \\
u_k^+(x) &= N_k^+ \left((\mathrm{i}\hbar^2 k - ma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|} + (\mathrm{i}\hbar^2 k + ma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|x|}\right)
\end{aligned}
$$