Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2013)

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

Übungsblatt 4 **Abgabe: 16.05.2013, Besprechung: 28.05.2013**

Aufgabe 19: Eindimensionales δ-Potenzial (9 Punkte)

Ein eindimensionales δ-Potenzial ist gegeben durch $V(x) = -a\,\delta(x)$.

a) Zeigen Sie durch Integration beider Seiten der stationären Schrödingergleichung von $x = -\varepsilon$ bis $x = \varepsilon$ ($\varepsilon \to 0$), dass die Ableitung der Wellenfunktion bei $x = 0$ einen Sprung besitzt, und berechnen Sie dessen Größe. Begründen Sie, dass $\varphi(x)$ selbst stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass der Wahrscheinlichkeitsstrom $j(x)$ stetig bei $x = 0$ ist.

c) Finden Sie Energie E_0 und Wellenfunktion $u_0(x)$ des gebundenen Zustandes.
Berechnen Sie für diesen Zustand $\langle x^2 \rangle$.

d) Finden Sie alle symmetrischen bzw. antisymmetrischen Streulösungen $u_k^{\pm}(x)$ für $E > 0$.
Normierung ist nicht erforderlich.

e) Berechnen Sie die Transmissionsamplitude $S(k)$ und den Transmissionskoeffizienten $T(k)$.

f) Die Amplitude $S(k)$ hat einen Pol bei $k = k_*$ in der komplexen k-Ebene. Bestimmen Sie die zugehörige Energie E_* und begründen Sie den Zusammenhang mit dem gebundenen Zustand in diesem Potenzial.

Aufgabe 20: Kernpotential zwischen Proton und Neutron (5 Punkte)

Das Kernpotenzial zwischen Proton und Neutron kann durch

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ -V_0, & 0 < x < R_0 \\ 0, & R_0 < x \end{cases}$$

mit $R_0 = 2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$ approximiert werden.

a) Leiten Sie die Lösbarkeitsbedingung für gebundene Zustände her:

$$\cot kR_0 = -\frac{\kappa}{k} \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0) \quad \text{und} \quad \kappa^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}E\,.$$

b) Zeigen Sie, dass außerdem

$$V_0 > \frac{\pi^2\hbar^2}{8mR_0^2}$$

gelten muss, wenn ein gebundener Zustand existiert.

c) Das Deuteron ist der einzige gebundene Zustand. Seine Bindungsenergie beträgt $-E = 2{,}23\,\mathrm{MeV}$. Schätzen Sie hieraus das Potenzial V_0 ab.